

# 重力ダムの耐震性について

准員 小坪 清真\*

## STABILITY OF GRAVITY DAMS DURING EARTHQUAKES

By Seima Kotsubo, C.E. Assoc. Member

**Synopsis :** This paper shows that, in case the period of earthquake is shorter than the resonance period of dynamic water pressure, the phase of the dynamic water pressure due to the elastic deformation of dam is 90 degrees later than that of the deformation, and that the dynamic water pressure acts upon the dam as a kind of damping forces. This damping force is so strong that it greatly increases the stability of gravity dams during earthquakes.

### 1. 緒 言

著者は前論文<sup>1)</sup>において、地震週期が動水圧の共振週期より短い場合には、地動の位相より 90° おくれた位相の動水圧が支配的であることを示した。このことは、また、このような地震週期の場合には、ダムの弾性変形によつて生ずる付加的動水圧がダムの弾性変位の位相より 90° おくれて生じ、減衰力としてダムに作用することを示すものである。この減衰力はきわめて大きく、ダムの弾性変形を強く抑制するものと考えられる。

一般に、ダム地点の地震卓越週期は 0.2 秒前後である。これに対し、高さ 100 m のダムの動水圧の共振週期は 0.278 秒である。従つて、動水圧が単に慣性力としてダムに作用するとみなした従来の理論<sup>2)</sup>と、はなはだ異なつた結果になることが予想される。

### 2. 動水圧生成のために消費されるエネルギー

不規則な地震加速度  $\alpha g \psi(t)$  により、ダムに作用する動水圧  $\sigma$  は、前論文により次式で表わされる。

$$\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4 \alpha w_0 v (-1)^m \cos \lambda_m (h-z)}{(2m+1)\pi} \int_0^t \psi(\tau) J_0 \{ \lambda_m v (t-\tau) \} d\tau \dots \dots \dots (1)$$

ここに、

$$\lambda_m = \frac{(2m+1)\pi}{2h}, \quad v = \sqrt{\frac{gK}{w_0}} \quad (\text{水中音速})$$

$\alpha$  は震度、 $g$  は重力加速度、 $w_0$  は水の単位重量、 $K$  は水の体積弾性率、 $h$  は堤高、 $z$  はダム天端より鉛直下方にとつた座標である。 $\psi(t)$  は、地震加速度の最大値を 1 としたときの他の時刻における加速度の大きさである。

ダム表面の水平方向単位幅に作用する動水圧の合力  $P$  は、(1) 式を  $0 \sim h$  に積分して求められ、従つて、ダム表面水平方向単位幅が、地震が始まつて  $t$  秒後までに水にあたえるエネルギー  $V$  は次式で表わされる。

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8 \alpha^2 g w_0 h v}{(2m+1)^2 \pi^2} \int_0^t \left[ \int_0^{\tau} \psi(\xi) J_0 \{ \lambda_m v (\tau-\xi) \} d\xi \int_0^{\tau} \psi(\xi) d\xi \right] d\tau \dots \dots \dots (2)$$

地動が  $\cos \omega_0 t$  で始まる場合には、

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8 \alpha^2 g w_0 h v}{(2m+1)^2 \pi^2 \omega_0} \int_0^t \left[ \frac{1}{2} \sin 2 \omega_0 \tau \cdot \int_0^{\tau} \cos \omega_0 \xi J_0(\lambda_m v \xi) d\xi + \sin^2 \omega_0 \tau \right. \\ \left. \times \int_0^{\tau} \sin \omega_0 \xi J_0(\lambda_m v \xi) d\xi \right] d\tau \dots \dots \dots (3)$$

(3) 式から明らかなように、地震の起り始めにおいては、地震週期のいかんにかかわらず、第 1 項も第 2 項もエネルギーの消費に係る。しかるに、時間が十分経過した後においては、(3) 式の第 2 項だけが残り、一週間の間に消費されるエネルギーは、

$$V_T = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{8 \alpha^2 g w_0 h v}{(2m+1)^2 \pi^2 \omega_0^2 \sqrt{\omega_0^2 - \lambda_m^2 v^2}} \left. \begin{array}{l} \lambda_m v < \omega_0 \text{ のとき} \\ \lambda_m v > \omega_0 \text{ のとき} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

となり、地震週期が動水圧の共振週期より短い場合には、動水圧生成のために多量のエネルギーが失われる。

\* 九大大学院研究奨学生、工学部土木教室

3. 定常強制振動

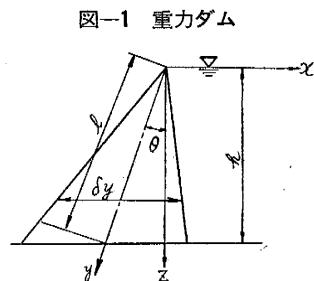
(a) 微分方程式

地動が  $\Re\{\alpha g/\omega_0^2\}e^{i\omega_0 t}$  で定常的に振動する場合を考える。

図-1 に示すような、地動と共に動く座標系で考えると、ダムに作用する外力は堤体慣性力と動水圧である。堤体慣性力は次式で表わされる。

$$F = \alpha w_c \delta y e^{i\omega_0 t} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $w_c$  はコンクリートの単位重量、 $\delta y$  は図-1 の座標  $y$  における堤厚である。



動水圧  $\sigma$  は前論文の結果を用いて次のようになる。

$$\sigma = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{4\alpha w_0 v (-1)^m \cos \lambda_m (h-z)}{(2m+1)\pi \sqrt{\omega_0^2 - \lambda_m^2 v^2}} i e^{i\omega_0 t} - \sum_{m=s}^{\infty} \frac{4\alpha w_0 v (-1)^m \cos \lambda_m (h-z)}{(2m+1)\pi \sqrt{\lambda_m^2 v^2 - \omega_0^2}} e^{i\omega_0 t} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $s$  は  $\lambda_m v > \omega_0$  を満足する  $m$  の最小値である。なお表面波の影響は微小であるから省略した。

ダムの弾性変形  $u$  による付加的動水圧  $\sigma_u$  は、 $u = \bar{u} e^{i\omega_0 t}$  とおいて次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma_u = & \sum_{m=0}^{s-1} \frac{2w_0 v \omega_0^2 \cos \lambda_m (h-z)}{gh \sqrt{\omega_0^2 - \lambda_m^2 v^2}} \int_0^h \bar{u} \cos \lambda_m (h-z) dz \cdot i e^{i\omega_0 t} \\ & - \sum_{m=s}^{\infty} \frac{2w_0 v \omega_0^2 \cos \lambda_m (h-z)}{gh \sqrt{\lambda_m^2 v^2 - \omega_0^2}} \int_0^h \bar{u} \cos \lambda_m (h-z) dz \cdot e^{i\omega_0 t} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

さて、図-1 に示すような重力ダムの振動の微分方程式は次式で表わされる<sup>2)</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{E_c \delta^3 y^3}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} - \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial y} \left\{ \frac{w_c \delta^3 y^3}{12g} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + \frac{w_c \delta y}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ = - \frac{2w_c \delta y}{g} \mu \frac{\partial u}{\partial t} + F - \sigma - \sigma_u \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここに、 $\mu$  は等値粘性減衰係数で、コンクリートの内部粘性、ダム上流面と貯水との粘性抵抗、基礎の変形により岩盤中へ逃げるエネルギーなどを総合したものである。

いま、 $u = \bar{u} e^{i\omega_0 t}$  とおいて上式に代入し、かつ、座標を、 $\zeta = y/l = z/h$  に変換すると、振動の微分方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\zeta^2} \left( \zeta^3 \frac{d^2 \bar{u}}{d\zeta^2} \right) + B \omega_0^2 \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^3 \frac{d\bar{u}}{d\zeta} \right) - C \omega_0^2 \zeta \bar{u} = -2iC\mu\omega_0 \zeta \bar{u} \\ + \sum_{m=0}^{s-1} \frac{iD\omega_0^2 \cos \lambda_m h(1-\zeta)}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda_m^2 v^2}} \int_0^1 \bar{u} \cos \lambda_m h(1-\zeta) d\zeta - \sum_{m=s}^{\infty} \frac{D\omega_0^2 \cos \lambda_m h(1-\zeta)}{\sqrt{\lambda_m^2 v^2 - \omega_0^2}} \int_0^1 \bar{u} \cos \lambda_m h(1-\zeta) d\zeta \\ + F'\zeta - \sum_{m=0}^{s-1} \frac{iG(-1)^m \cos \lambda_m h(1-\zeta)}{(2m+1)\pi \sqrt{\omega_0^2 - \lambda_m^2 v^2}} + \sum_{m=s}^{\infty} \frac{G(-1)^m \cos \lambda_m h(1-\zeta)}{(2m+1)\pi \sqrt{\lambda_m^2 v^2 - \omega_0^2}} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに

$$B = \frac{w_c h^2}{E_c g}, \quad C = \frac{12 w_c h^2}{E_c g \delta^2}, \quad D = \frac{24 w_0 h^2 v}{E_c g \delta^3 l}, \quad F' = \frac{12 \alpha w_c h^2}{E_c \delta^2}, \quad G = \frac{48 \alpha w_0 h^2 v}{E_c \delta^3 l}$$

(9) 式を解くに当たつての境界条件は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \zeta^3 \frac{d^2 \bar{u}}{d\zeta^2} \right\}_{\zeta=0} = 0 \dots\dots\dots (i) & \quad \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^3 \frac{d^2 \bar{u}}{d\zeta^2} \right) \right\}_{\zeta=1} = 0 \dots\dots\dots (ii) \\ \left\{ \bar{u} \right\}_{\zeta=1} = 0 \dots\dots\dots (iii) & \quad \left\{ \frac{d\bar{u}}{d\zeta} \right\}_{\zeta=1} = 0 \dots\dots\dots (iv) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(b) 微分方程式の解

(9) 式は、 $\bar{u}$  を  $\zeta$  の昇べきの級数において解くこともできる。しかしながら、動水圧がダムの固有週期におよぼす影響をみるためには、(9) 式の解  $\bar{u}$  の形として、池水空虚時における固有函数の級数を用いた方が便利である。それには、次の同次方程式

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \left( \zeta^3 \frac{d^2 \bar{u}}{d\zeta^2} \right) + B \omega_0^2 \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^3 \frac{d\bar{u}}{d\zeta} \right) - C \omega_0^2 \zeta \bar{u} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

を、条件 (10) 式によつて解けばよい<sup>2)</sup>。いま、(11) 式の解を、

$$\bar{u} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \dots\dots\dots (12)$$

とおいて、(11) 式に代入すると次の関係が得られる。

$$b_{n+2} = -\frac{n(n+2)B-C}{(n+2)^2(n+1)(n+3)}\omega^2 b_n \dots\dots\dots (13)$$

(12) 式は、条件 (10) の (i), (ii) を自ら満足しているから、いま

$$b_2 = b_0 b_2', \quad b_4 = b_0 b_4', \quad \dots\dots\dots$$

$$b_3 = b_1 b_3', \quad b_5 = b_1 b_5', \quad \dots\dots\dots$$

とにおいて (10) 式の (iii), (iv) を用いると次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} b_0(1+b_2'+b_4'+\dots\dots) + b_1(1+b_3'+b_5'+\dots\dots) &= 0 \\ b_0(2b_2'+4b_4'+\dots\dots) + b_1(3b_3'+5b_5'+\dots\dots) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

従つて、両式の  $b_0, b_1$  の係数の determinant を 0 に等置すれば振動数方程式が得られる。その根を小なるものより順次  $\omega_j (j=1, 2, \dots\dots)$  とすれば、それに相当する固有函数  $u_j$  が得られる。

このようにして得られた固有函数をもつて、(9) 式の解を

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j$$

とおき、(9) 式に代入すれば、(9) 式は次のように変形される。

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty} a_j \left[ C(\omega_j^2 - \omega_0^2 + 2i\mu\omega_0)\zeta u_j - B(\omega_j^2 - \omega_0^2) \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^3 \frac{du_j}{d\zeta} \right) \right. \\ &+ \sum_{m=0}^{s-1} \frac{iD\omega_0^2}{\omega_0^2 - \lambda_m^2 v^2} \cos \lambda_m h(1-\zeta) \int_0^1 u_j \cos \lambda_m h(1-\zeta) d\zeta \\ &- \sum_{m=s}^{\infty} \frac{D\omega_0^2}{\lambda_m^2 v^2 - \omega_0^2} \cos \lambda_m h(1-\zeta) \int_0^1 u_j \cos \lambda_m h(1-\zeta) d\zeta \left. \right] \\ &= F'\zeta - \sum_{m=0}^{s-1} \frac{iG(-1)^m \cos \lambda_m h(1-\zeta)}{(2m+1)\pi\sqrt{\omega_0^2 - \lambda_m^2 v^2}} + \sum_{m=s}^{\infty} \frac{G(-1)^m \cos \lambda_m h(1-\zeta)}{(2m+1)\pi\sqrt{\lambda_m^2 v^2 - \omega_0^2}} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

回転慣性の影響を考えた場合の固有函数の直交条件は次式となる (証明省略)。

$$\int_0^1 \left\{ C\zeta u_j u_r + B\zeta^3 \frac{du_j}{d\zeta} \frac{du_r}{d\zeta} \right\} d\zeta = 0 \quad (j \neq r) \dots\dots\dots (16)$$

従つて、(15) 式の両辺に  $u_r (r=1, 2, \dots\dots)$  をかけて 0~1 に積分すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} &a_j [Cd_j(\omega_j^2 - \omega_0^2 + 2i\mu\omega_0) + Be_j(\omega_j^2 - \omega_0^2)] + \sum_{r=1}^{\infty} a_r D\omega_0^2 \left[ i \sum_{m=0}^{s-1} \frac{f_{jm} f_{rm}}{\omega_0^2 - \lambda_m^2 v^2} - \sum_{m=s}^{\infty} \frac{f_{jm} f_{rm}}{\lambda_m^2 v^2 - \omega_0^2} \right] \\ &= F'c_j - iG \sum_{m=0}^{s-1} \frac{(-1)^m f_{jm}}{(2m+1)\pi\sqrt{\omega_0^2 - \lambda_m^2 v^2}} + G \sum_{m=s}^{\infty} \frac{(-1)^m f_{jm}}{(2m+1)\pi\sqrt{\lambda_m^2 v^2 - \omega_0^2}} \quad (j=1, 2, 3, \dots\dots) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} c_j &= \int_0^1 \zeta u_j d\zeta \\ d_j &= \int_0^1 \zeta u_j^2 d\zeta \\ e_j &= \int_0^1 \zeta^3 \left( \frac{du_j}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \\ f_{jm} &= \int_0^1 u_j \cos \lambda_m h(1-\zeta) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} b_{jn} k_{m,n} \\ k_{m,0} &= \int_0^1 \cos \lambda_m h(1-\zeta) d\zeta = \frac{2(-1)^m}{(2m+1)\pi} \\ k_{m,1} &= \int_0^1 \zeta \cos \lambda_m h(1-\zeta) d\zeta = \frac{4}{(2m+1)^2 \pi^2} \\ k_{m,n} &= \int_0^1 \zeta^n \cos \lambda_m h(1-\zeta) d\zeta = \frac{4n}{(2m+1)^2 \pi^2} \{1 - (n-1)k_{m,n-2}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

(17) 式を用いて  $a_j$  を連立に解けば、一般に  $a_j$  は複素数として求められる。いまこれを、 $a_j = \beta_j + i\tau_j$  とおけば、ダムの弾性変位は次のようになる。

$$\begin{aligned} u &= \Re \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j + i\tau_j) u_j e^{i\omega_0 t} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j u_j \cos \omega_0 t - \tau_j u_j \sin \omega_0 t) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\beta_j^2 + \tau_j^2} u_j \cos(\omega_0 t - \varphi_j) \dots\dots\dots (19)$$

ここに  $\varphi_j$  は、 $u_j$  なる振動型の変位の、地動の位相よりのおくれで次式によつて求められる。

$$\varphi_j = \tan^{-1} \left( \frac{-\tau_j}{\beta_j} \right) \dots\dots\dots (20)$$

(17) 式から明らかなように、地震週期が動水圧の共振週期より短い場合には、ダムの弾性変形による動水圧は慣性力としてダムに作用する項と、減衰力としてダムに作用する項とに分れる。

動水圧のために、満水時における振動型は、空虚時における振動型とは多少異なるのであるが、近似的に考えると、 $u_j$  なる振動型の固有週期は、(17) 式の  $a_j$  の係数の実数部が 0 となるときである。これより、固有週期の伸びにおよぼす動水圧の影響がわかる。

(c) 池水空虚時

この場合には、(17) 式において、 $D=0$ 、 $G=0$  とおけば  $a_j$  が単独に求められ、次式となる。

$$a_j = \frac{(\omega_j^2 - \omega_0^2)(Cd_j + Be_j)F'c_j - 2i\mu\omega_0 F'c_j}{(\omega_j^2 - \omega_0^2)^2(Cd_j + Be_j)^2 + (2\mu\omega_0)^2} \dots\dots\dots (21)$$

4. 不規則な地震動による強制振動

(a) 微分方程式

実際に起る全く不規則な地震動の場合には、前論文に示したように、外力たる動水圧は地動加速度と同一位相で生ずるものでなく、刻々の地動の変化により、その大きさおよび位相が全く不規則な状態を示すものである。また、ダムの弾性変形によつて生ずる付加的動水圧も、変形の大きさ、週期および継続時間などにより、その大きさおよび位相が刻々変化する。従つて、従来のように、一定量の水がダムに付着しているとする考え方では、現象を的確につかむことはできない。

いま、全く不規則な地震加速度を、 $\alpha g \psi(t)$  とすれば、ダムに作用する堤体慣性力は、次式となる。

$$F = \alpha w_c \delta y \psi(t) \dots\dots\dots (22)$$

ダムに作用する外力たる動水圧  $\sigma$  は (1) 式で表わされる。

ダムの弾性変形  $u(z, t)$  による動水圧  $\sigma_u$  は、次の微分方程式を、条件 (24) 式によつて解けば求められる。すなわち

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{w_0}{gK} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} (\phi)_{t=0} &= 0 \dots\dots\dots (i), & \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{t=0} &= 0 \dots\dots\dots (ii) \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=h} &= 0 \dots\dots\dots (iii), & \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} &= 0 \dots\dots\dots (iv) \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=0} &= -\frac{\partial u}{\partial t} \dots\dots\dots (v), & (u)_{t=0} &= 0 \dots\dots\dots (vi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ただし、

$$\sigma_u = \frac{w_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots\dots\dots (25)$$

(23)、(24) 式を  $t$  について Laplace 変換 (第 2 種) し、 $\mathcal{L}u = U$  とおけば、前論文と同一の方法により解を求めると、動水圧  $\sigma_u$  が次のようになる。

$$\sigma_u = \mathcal{L}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2w_0 v p^2 \cos \lambda_m (h-z)}{gh \sqrt{\lambda_m^2 v^2 + p^2}} \int_0^h U \cos \lambda_m (h-z) dz \dots\dots\dots (26)$$

(1)、(22)、(26) 式を、(9) 式に入れて整理すると、微分方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left( \zeta^3 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right) - B \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial \zeta} \left( \zeta^3 \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + C \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2C \mu \zeta \frac{\partial u}{\partial t} \\ & + D \mathcal{L}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^2 \cos \lambda_m h (1-\zeta)}{\sqrt{\lambda_m^2 v^2 + p^2}} \int_0^1 U \cos \lambda_m h (1-\zeta) d\zeta \\ & = F' \zeta \psi(t) + G \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos \lambda_m h (1-\zeta)}{(2m+1)\pi} \int_0^t \psi(\tau) J_0 \{ \lambda_m v (t-\tau) \} d\tau \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

ここに、 $B, C, D, F', G$  の定義は (9) 式におけると同一である。なお、(27) 式においては、コンクリート内を伝わる弾性波の速度はきわめて早く、ダムの底部と天端の位相差は、動水圧の位相差に比し微小なりとして省略

した。

境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \left( \zeta^3 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right)_{\zeta=0} = 0 \dots\dots (i) & \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta^3 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right) \right\}_{\zeta=0} = 0 \dots\dots (ii) \\ & (u)_{\zeta=1} = 0 \dots\dots\dots (iii) & \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} = 0 \dots\dots\dots (iv) \\ & (u)_{t=0} = 0 \dots\dots\dots (v) & \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \dots\dots\dots (vi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

**(b) 微分方程式の解**

(27) 式を  $t$  について Laplace 変換すると, (28) 式の (v), (vi) を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\zeta^2} \left( \zeta^3 \frac{d^2 U}{d\zeta^2} \right) - B p^2 \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^3 \frac{dU}{d\zeta} \right) + C p^2 \zeta U + 2 C \mu p \zeta U \\ & + D \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^2 \cos \lambda_m h (1-\zeta)}{\sqrt{\lambda_m^2 v^2 + p^2}} \int_0^1 U \cos \lambda_m h (1-\zeta) d\zeta \\ & = F' \zeta \mathfrak{B} \psi(t) + G \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos \lambda_m h (1-\zeta)}{(2m+1)\pi \sqrt{\lambda_m^2 v^2 + p^2}} \mathfrak{B} \psi(t) \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

(29) 式の解  $U$  の形として, この場合にも前節で用いた池水空虚時における固有函数の級数を採用すると便利である。

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} A_j u_j, \quad (A_j \text{ は } p \text{ の函数}) \dots\dots\dots (30)$$

とおけば, これは条件 (28) 式の (i)~(iv) を満足する。従つて (30) 式を (29) 式に代入し, 両辺に  $u_r$  をかけて 0~1 に積分すると, 前節と同じようにして次式が得られる。

$$\begin{aligned} & A_j [C d_j (\omega_j^2 + p^2 + 2 \mu p) + B e_j (\omega_j^2 + p^2)] + \sum_{r=1}^{\infty} A_r D \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^2 f_{jm} f_{rm}}{\sqrt{\lambda_m^2 v^2 + p^2}} \\ & = \left[ F' c_j + G \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m f_{jm}}{(2m+1)\pi \sqrt{\lambda_m^2 v^2 + p^2}} \right] \mathfrak{B} \psi(t) \dots\dots\dots (31) \\ & (j=1, 2, \dots\dots) \end{aligned}$$

ここに,  $c_j, d_j, e_j, f_{jm}, f_{rm}$  は (18) 式で定義される。

一般に, (31) 式は  $A_j$  の連立方程式となるから, その厳密解を求めることはきわめて困難である。従つて, 次のような近似解法を用いる。

(31) 式の左辺第2項は,  $u_r$  なる振動型による付加的動水圧を表わす。従つて,  $u_j$  なる振動型の振幅を求める場合には, 左辺第2項の中,  $r=j$  なる項だけが重要な意味を持ち,  $r \neq j$  なる項は単に外力としての意味を持つに過ぎない。この項は, 右辺の外力に比べると一般に非常に小さく省略してさしつかえない。第1次の振動型の振幅が高次の振動型の振幅に比し特に大きいことを考えると, 上述のような省略が, 第1次の振動型の振幅におよぼす影響はほとんど無視しうる程度である。このような近似法を用いると, (31) 式は次のようになる。

$$A_j = \left[ \frac{F' c_j + G \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m f_{jm}}{(2m+1)\pi \sqrt{\lambda_m^2 v^2 + p^2}}}{C d_j (\omega_j^2 + p^2 + 2 \mu p) + B e_j (\omega_j^2 + p^2) + D \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^2 f_{jm}^2}{\sqrt{\lambda_m^2 v^2 + p^2}}} \right] \mathfrak{B} \psi(t)$$

いま, 上式の [ ] 内の上位函数を  $Q_j(t)$  とおけば, 各振動型の時間函数は (32) 式であたえられ, ダムの変位  $u$  は (33) 式で表わされることになる。

$$a_j = \int_0^t \psi(\tau) Q_j(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots (32)$$

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \int_0^t \psi(\tau) Q_j(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots (33)$$

**(c) 池水空虚時**

この場合には,  $D=0, G=0$  であるから, (31) 式から  $A_j$  が単独に求められる。すなわち,

$$A_j = \frac{F' c_j \mathfrak{B} \psi(t)}{(C d_j + B e_j) (p^2 + \omega_j^2) + 2 \mu C d_j p}$$

これを逆変換すると, 結局変位  $u$  が次式で表わされる。

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{F' c_j u_j}{(C d_j + B e_j) \omega_j^2} \right\} L_j \dots \dots \dots (34)$$

上式の { } 内は、加速度  $ag$  による各次振動型の静的変位を表わし、 $L_j$  は、それら各振動型の振動倍率で次式で表わされる。

$$L_j = \frac{\omega_j^2}{\sqrt{\omega_j^2 - \varepsilon_j^2}} \int_0^t \psi(\tau) e^{-\varepsilon_j(t-\tau)} \sin \sqrt{\omega_j^2 - \varepsilon_j^2} (t-\tau) d\tau \dots \dots \dots (35)$$

$$\varepsilon_j = \frac{C d_j \mu}{C d_{j+1} + B e_j} \dots \dots \dots (36)$$

5. 固有週期におよぼす岩盤変形の影響

上述の理論は、基礎岩盤が外力によつて変形しないと仮定したものであるが、実際のダム地点の岩盤はダム底部の曲げモーメントおよびせん断力によつて多少変形するものである。岩盤を半無限弾性体と考えると、変形<sup>4)</sup>は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{k_1}{E_R T^2} \dots \dots \dots (i) \\ \gamma' &= \frac{k_2}{E_R} \dots \dots \dots (ii) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

ここに  $k_1$  および  $k_2$  は基礎面の形状によつて決まる比例常数、 $\alpha'$  は単位曲げモーメントによる基礎面に垂直な平面内の平均回転角、 $\gamma'$  は単位せん断力による基礎面を含む平面内の平均変位、 $E_R$  は岩盤のヤング率、 $T$  はダム底部の厚さである。変形はこの他に、曲げモーメントによる基礎面内の変位およびせん断力による基礎面に垂直な平面内の回転などがあるが、これらは微小であるから省略する。

(37) 式のような変形を考えると、境界条件 (10) 式の (iii), (iv) は次のように修正されねばならない。

$$\left. \begin{aligned} \{u\}_{\zeta=1} &= \frac{k_2 E_c \delta^3}{12 E_R} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^3 \frac{d^2 u}{d\zeta^2} \right) \right\}_{\zeta=1} \dots \dots \dots (i) \\ \left\{ \frac{d u}{d\zeta} \right\}_{\zeta=1} &= \frac{-k_1 E_c \delta}{12 E_R} \left\{ \zeta \frac{d^2 u}{d\zeta^2} \right\}_{\zeta=1} \dots \dots \dots (ii) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

従つて、(14) 式に相当する式はこの場合次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} b_0 \{1 + (1 - 6 q_2) b_2' + (1 - 60 q_2) b_4' + \dots\} + b_1 \{1 + (1 - 24 q_2) b_3' + (1 - 120 q_2) b_5' + \dots\} &= 0 \\ b_0 \{2 + 2 q_1 b_2' + (4 + 12 q_1) b_4' + \dots\} + b_1 \{1 + (3 + 6 q_1) b_3' + (50 + 20 q_1) b_5' + \dots\} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

ただし、

$$q_1 = \frac{k_1 E_c \delta}{12 E_R}, \quad q_2 = \frac{k_2 E_c \delta^3}{12 E_R}$$

(39) 式の  $b_0, b_1$  の係数の determinant<sub>2</sub> を 0 とおけば、振動数方程式が得られる。

6. 数値計算

以上の結果を明らかにするために、一例として、上流面コウ配 0.1, 下流面コウ配 0.82 なる高さ  $h=100$  m のダムに対する計算例を示す。ただし、 $E_c=2.1 \times 10^6$  t/m<sup>2</sup>,  $W_c=2.3$  t/m<sup>3</sup> とした。

(a) 空虚時固有週期および振動型

表-1 は、このダムの池水空虚時における固有振動率  $\omega_j$  および振動型を示す級数 (12) 式の係数  $b_n$  の値を示したものであるが、高次振動型ほど級数の取れんがおそくなる。

図-2 は各次振動型  $u_j$  を図示したものである。図-3 は岩盤変形による基本型固有週期の伸びを、 $E_c/E_R$  のいろいろの値について求めたもので、変形の比例常数  $k_1, k_2$  の値として、“Abridged trial load method”<sup>4)</sup> に採用された近似値  $k_1=5.075, k_2=1.785$  を用いた。固有週期の伸びは、 $E_c/E_R$  に直線的に比例していることがわかる。

(b) 空虚時振動応力

図-4 は、各次振動型の静的変位および静的モーメントを、(21)式において  $\omega_0=0, \mu=0$  とおいて求めたものである。定常振動においては、(21)式における  $\omega_0$  を種々変えることによつて  $a_j$  が求められ、従つ

表-1 固有週期および振動型

| $j$        | 1       | 2        | 3        |
|------------|---------|----------|----------|
| $\omega_j$ | 37.4    | 100.4    | 180.0    |
| $T_j$      | 0.168 S | 0.062 S  | 0.035 S  |
| $b_0$      | 1.0000  | 1.0000   | 1.0000   |
| $b_1$      | -2.4931 | -6.9505  | -12.4318 |
| $b_2$      | 2.0921  | 15.0795  | 48.5270  |
| $b_3$      | -0.7068 | -14.2015 | -81.7432 |
| $b_4$      | 0.1097  | 5.6994   | 59.0259  |
| $b_5$      | -0.0019 | -0.2782  | -5.1531  |
| $b_6$      | -0.0011 | -0.4061  | -13.5326 |
| $b_7$      | 0.0000  | 0.0252   | 1.5078   |
| $b_8$      |         | 0.0363   | 3.8936   |
| $b_9$      |         | -0.0021  | -0.3966  |
| $b_{10}$   |         | -0.0026  | -0.9131  |
| $b_{11}$   |         | 0.0001   | 0.0823   |
| $b_{12}$   |         | 0.0001   | 0.1673   |
| $b_{13}$   |         |          | -0.0133  |
| $b_{14}$   |         |          | -0.0241  |
| $b_{15}$   |         |          | 0.0017   |
| $b_{16}$   |         |          | 0.0028   |
| $b_{17}$   |         |          | -0.0002  |

図-2 重力ダムの振動型

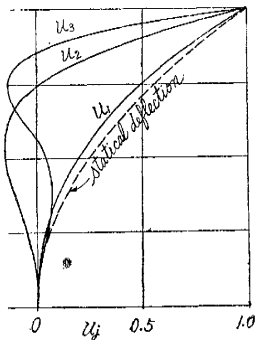


図-4 各次振動型の静的変位およびモーメント

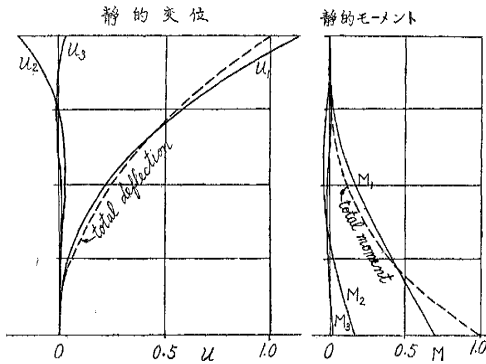


図-6 塚原ダムサイト地震加速度記録

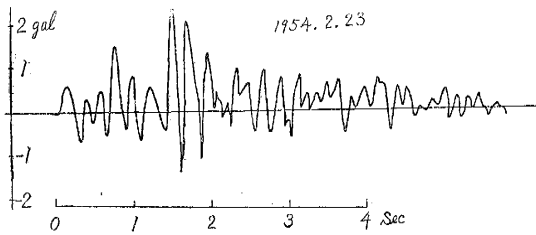


図-7 同上

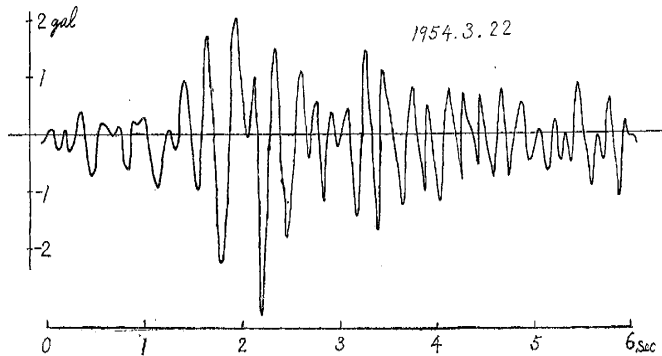


図-3 岩盤変形による基本型固有週期の伸び

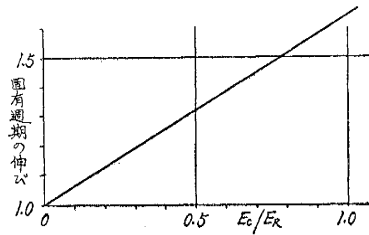
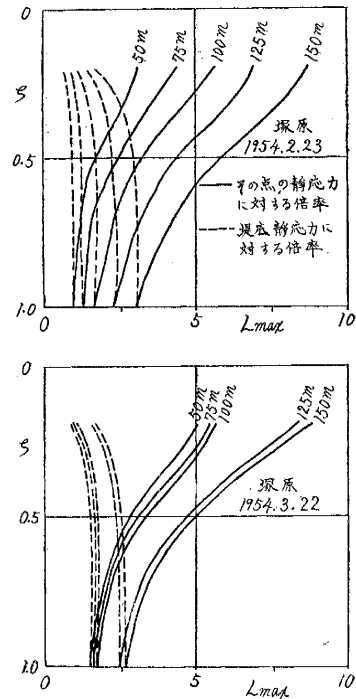


図-5 不規則な地震動による応力



て、これより、いろいろの地震週期におけるダムの変位および応力を計算することができるが、ここでは省略する。図-4の静的変位は(34)式{ }内の値と同一である。従つて、不規則な地震動による振動応力は、図-4の静的モーメントに、各次振動型の振動倍率をかけて、それらの総和を取れば求められる。しかるに、各次振動型の最大倍率は同時に起るものではないから、刻々における総和をとらねばならず煩雑である。従つてここでは、各次振動型の最大倍率が同時に起るものとし、堤体各部の曲げモーメントは、その絶対値が最大になる方向に加え

合わせれば安全側である。図-5 は、このような方法によつて、図-6~7 に示した塚原ダムサイト地震加速度記録<sup>3)</sup>による振動モーメントを、堤高をいろいろに変えた場合について図示したものである。ただし、ダムはすべて前記  $h=100\text{ m}$  のものと相似であるとし、減衰係数  $\mu=0.1\omega_j$  とした。図中の実線は各部の振動モーメントの、その点の静モーメントに対する倍率、点線は各部の振動応力の、堤底静応力に対する倍率である。

図から明らかのように、モーメントの倍率は堤体上部ほど大きい、応力の倍率は堤体各部とも、大体 3.5 倍以下である。

(c) 満水時

図-8 は、地震が  $\cos \omega_0 t$  で始まる場合、動水圧生成のために、ダム表面が水にあたるエネルギーを、種々の地震週期に対して (3) 式によつて求めたものである。図から明らかのように、地震週期が動水圧の共振週期より短い場合には、多量のエネルギーを消費することがわかる。

図-8 地動が  $\cos \omega_0 t$  で始まる場合のエネルギー消費量 ( $h=100\text{ m}$ )

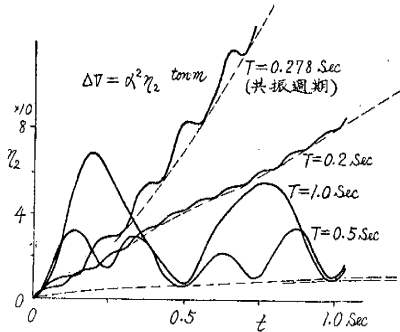


図-9 定常強制振動による堤底応力の倍率

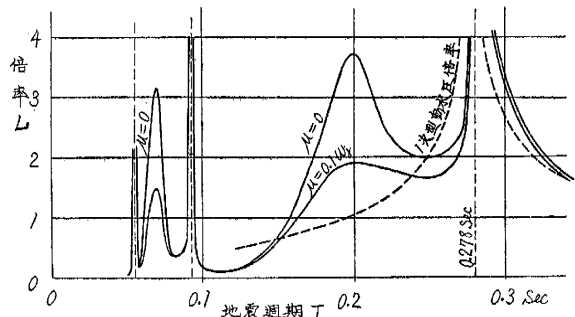
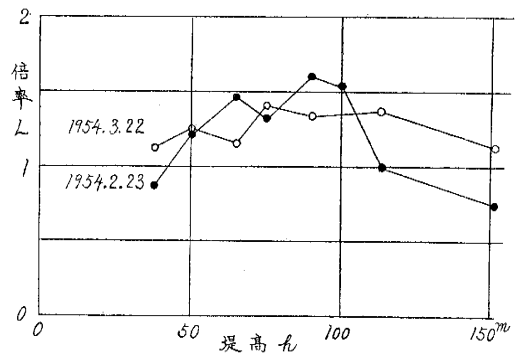


図-9 は、 $h=100\text{ m}$  のダムに対し、地震週期をいろいろ変えた場合の堤底曲げモーメントに対する倍率で表わしたものである。堤底静モーメントは、(17) 式において  $\omega_0=0$  とおけば求められる。なお、図には、 $\mu=0$  の場合と  $\mu=0.1\omega_j$  とした場合とを示した。点線は、1次型動水圧 ( $m=0$ ) の倍率、縦点線は動水圧の共振週期を表わす。

図-10 は、いろいろの高さのダムが、図-6~7 の地震を受けたとき生ずる動水圧の最大値を、(1) 式によつて求め、Westergaard の式による値に対する倍率で示したものである。

図-10 不規則な地震動による動水圧の倍率



7. 計算結果に対する考察

池水空虚時の計算結果に対して

- (1) 各次振動型の静的変位の中で第1次のものが最も大きく、かつ、全静変位の大部分を占めている。ゆえに、地震の卓越週期がダムの第1次固有週期に近接する場合に、ダムは最も大きな応力を生ずる。高次振動型が共振する場合には、振動倍率が特に大きくないかぎり応力は小さい。
- (2) 第1次振動型の堤底静モーメントは、全堤底静モーメントの約 70% である。従つて、減衰係数の限界減衰係数に対する比を 0.1 とすれば、堤底振動モーメントの全堤底静モーメントに対する倍率は 3.5 を越えない。  
満水時計算結果に対して
- (1) 満水時共振週期には、ダムの共振週期と動水圧の共振週期があり、前者は後者より短週期である。
- (2) ダムの固有週期の伸びにおよぼす動水圧の影響は、第1次振動型で約 15%、第2次振動型で約 10% である。
- (3) 動水圧が共振する場合を除けば、堤底曲げモーメントの倍率は、減衰係数  $\mu$  を考えない場合にも 4 を越えない。 $\mu=0.1\omega_j$  とすれば、倍率は 2 以下となる (不規則な地震動に対しては、この倍率はさらに小さくなるであろうが、この計算は別の機会にゆずる)。
- (4) 動水圧が共振するような地震週期の場合には、ダムの振動倍率は外力たる動水圧の倍率に支配される。このような地震週期に対しては、他の方法により動水圧の最大値を検討しなければならない。すなわち、図-10



は、実際に起る全く不規則な地震によつて生ずる動水圧の倍率の一例を示したものであるが、その倍率は高々1.6倍程度に過ぎない。従つて、地震卓越週期が動水圧の共振週期に一致する場合にも、図-6,7の地震に対しては、ダム振動倍率は1.6倍程度に過ぎないであろう。

- (5) 地形の影響で動水圧の共振週期が短くなり、一方岩盤の変形が大きくてダムの固有週期が動水圧の共振週期より大きくなる場合も考えられる。この場合にも動水圧の共振週期が地震週期より大であれば、動水圧の減衰作用が働かず、振動倍率は小さくなる。動水圧の共振週期が地震週期より小であれば、動水圧の減衰作用がなくなり、従来の考え方と同一になつて、振動倍率は大きくなる。

## 8. 結論

以上を要約して、河幅が広く動水圧の共振週期がダムの固有週期より大きい場合には、重力ダムはいかなる週期の地震に対しても、満水時においては耐震性に富む構造物であるといふことができる。一方、動水圧の共振週期がダムの固有週期より短い場合にも、動水圧の共振週期が地震卓越週期より大なる高堰堤では、やはり動水圧の減衰作用を期待することができる。ダムの固有週期が地震週期より遙かに小であれば、剛振動として取り扱うことができ、従つて、ダムの振動応力が小さいことは言うまでもない。

本研究にあたり、九大工学部応用理学教室 渡部信夫教授、土木工学教室 田中吉郎教授および松尾春雄教授に御指導をいただいた。ここに厚く感謝の意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) 小坪清真:「不規則な地震動による動水圧」土木学会論文集 第47号
- 2) 畑野 正:「重力堰堤に作用する地震力の影響」I, II, III 土木学会論文集 昭和22,23,26年度
- 3) 高橋 忠:「ダム地点の地震動と構造物の Response について」電研所報 Vol. 6 No. 4,5
- 4) Bureau of Reclamation: "Treatise on Dams". Chapt. 10 Arch. Dams. p. 435

(昭.32.3.27)