

弾性基礎上の剛体の振動特性

—岸壁の地震時安定に関する研究—第一報

正員 梶原 光 久*

OSCILLATING CHARACTERISTICS OF RIGID BODY ON ELASTIC FOUNDATION

—ON THE SEISMIC STABILITY OF QUAYWALL—REPORT NO. 1

By Mitsuhsa Kajiwara, C.E. Member

Synopsis: According to the recent study, the distribution of the seismic earth pressure is affected by the displacement of the oscillating wall. So, discussing the seismic stability of the quay wall, it is necessary to examine the motion of the body. Here, some characteristics, especially natural frequency and centre of rotation of the oscillating rigid body without earth pressure are studied.

要旨 最近の研究によれば地震時土圧の分布は振動体の変位に影響されるらしい。従つて、岸壁の地震時安定を論ずる場合壁体自身の運動状態を究明する必要がある。ここでは簡単な矩形断面を有する剛体が地震時土圧を受けない場合の水平振動を取り扱い、固有周期、回転中心の問題に対する若干の考察を行った。

1. ま え が き

日本のような地震国における構造物の設計は地震時を対象にしているが、岸壁のような剛体が基礎地盤上で地震動を受けた場合、どのような運動のもとで、どのような力が作用するかについて究明することは耐震学上極めて重要である。このような意味から関東大地震以来特に岸壁に作用する外力としての地震時土圧¹⁾の研究が行われ、最近はかなり大規模な野外模形式験²⁾も行われつつある。岸壁の地震時安定を論ずる場合にいま一つ考えなければならないことは壁体自身の運動である。最近の研究³⁾によれば、地震時土圧は壁体の変位に影響されるらしい。従つて、壁体の運動と地震時土圧は極めて密接な関係にあるといえる。しかしここでは土圧の作用を受けない剛体がある種の水平振動を受ける場合のいろいろの性質特に固有周期、回転中心等について若干の考察を行う。

2. 自由振動

矩形断面で奥行の長い剛体が弾性基礎地盤上にある場合を想定し、基礎地盤を鉛直、水平方向のバネで置き換えることができるものとすれば、剛体はその重心が次の自由振動方程式を満足する水平、回転運動を行う。

$$M\ddot{x} + b_x\dot{x} + k_x(x - h\theta) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)_1$$

$$I_G\ddot{\theta} + b_\theta\dot{\theta} + (k_\theta - Mgh_N)\theta - h\{k_x(x - h\theta)\} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)_2$$

ここに、 M は剛体の質量、 g は重力の加速度、 I_G は重心の周りの慣性モーメント、 k_x, k_θ はそれぞれ地盤の水平バネ常数および回転バネ常数、 b_x, b_θ はそれぞれ地盤の水平、回転速度に比例する減衰係数、 h は重心高、 x, θ は重心の水平変位、回転角を表わす。

(1) 式を次のように書き改める。

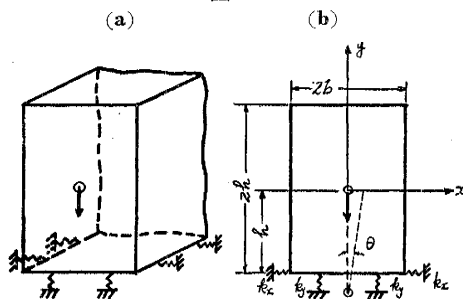
$$\ddot{x} + 2\lambda_x\dot{x} + \omega_x^2x - \delta_x^4\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (2)_1$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda_\theta\dot{\theta} + \omega_\theta^2\theta - \delta_\theta^4x = 0 \quad \dots\dots\dots (2)_2$$

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda_x &= \frac{b_x}{M}, \quad 2\lambda_\theta = \frac{b_\theta}{I_G}, \quad \omega_x^2 = \frac{k_x}{M} = \frac{G_x A}{M} \\ \omega_\theta^2 &= \frac{k_\theta - Mgh_N + k_x h^2}{I_G}, \\ \delta_x^4 &= \frac{k_x h}{M}, \quad \delta_\theta^4 = \frac{k_x h}{I_G} \end{aligned} \right\} \quad (2)_3$$

ここに G_x は水平地盤係数、 A は底面積を表わす。ここで、

図—1



* 徳島大学助教授，工学部土木工学教室

回転バネ常数を考える場合には、バネ常数の力に対してはモーメントを、変位に対しては回転角を対応させる。すなわち次式で表わすことができる。

$$k_{\theta} = \frac{\text{モーメント}}{\text{回転角}} \dots\dots\dots (3)$$

バネ及び基礎地盤に対しては次のように考えることができる。

$$\text{バネ}; k_{\theta} = \frac{2(k_y l_1^2 \theta + k_y l_2^2 \theta + \dots)}{\theta} = k_y \Sigma l^2 \dots\dots\dots (4)_1$$

地盤; (4)₁ 式は Hooke の法則にもとづくものであるが、基礎地盤の場合には弾性、接触圧力分布等の性質が複雑である。ここでは接触圧力分布は直線的でしかも地盤の変位と作用圧力は比例するものと仮定すれば、図-2 (b) より次の関係式がえられる。

$$k_{\theta} = \frac{2 \int_0^b G_y x^2 \theta \cdot D \cdot dx}{\theta} = G_y I \dots\dots\dots (4)_2$$

G_y は鉛直地盤係数、 I は底面の断面二次モーメントである。従つて、(4) はバネ常数または鉛直地盤係数と回転バネ常数との関係を示している。さて、(1) または (2) 式は減衰する場合の自由振動方程式であるが、減衰しない場合と減衰する場合とにわけて性質を調べてみよう。

[I] 減衰しない場合; $\lambda_x = \lambda_{\theta} = 0$

$$x = A_x \cos(\omega t + \epsilon), \quad \theta = A_{\theta} \cos(\omega t + \epsilon) \dots\dots\dots (5)$$

とおけば、 $A_x \neq 0$, $A_{\theta} \neq 0$ の場合には次式が成立するはずである。

$$(-\omega^2 + \omega_x^2)(-\omega^2 + \omega_{\theta}^2) - \delta_x^4 \delta_{\theta}^4 = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\therefore \omega^2_{I,II} = \frac{1}{2} \left[(\omega_x^2 + \omega_{\theta}^2) \pm \sqrt{(\omega_x^2 - \omega_{\theta}^2)^2 + 4(\delta_x \delta_{\theta})^4} \right] \dots\dots\dots (7)$$

すなわち、 ω は ω_{θ} と ω_x の中間値をとらないで、大きいものより大きく、小さいものより小さくなる。また、 $(\delta_x \delta_{\theta})^2$ が大きいほど、すなわち、基礎地盤の性質だけを対象にすれば、水平地盤係数が大きいほど ω は ω_{θ} より遠ざかることがわかる。

数値計算による、円振動数、回転中心の考察

いま、基本振動だけを対象にして、きわめて簡単な矩形断面に対して数値計算を試みよう。

$$M = \frac{4bhDr}{g}, \quad I_G = \frac{4bhDr}{3g} (b^2 + h^2)$$

および、(4)₂ を (2)₃ に代入すれば次式がえられる。

$$\omega_x^2 = \frac{gG_y}{2rh\sigma}, \quad \omega_{\theta}^2 = \frac{gG_y}{2rh\sigma} \frac{3 + \sigma n - c'}{1 + n}$$

$$\delta_x^4 = \frac{gG_y}{2r\sigma}, \quad \delta_{\theta}^4 = \frac{3gG_y}{2rh^2\sigma} \frac{1}{1 + n}$$

$$n = \left(\frac{b}{h}\right)^2, \quad \sigma = \frac{G_y}{G_x}, \quad c' = \frac{6r}{G_x} \quad r; \text{剛体の単位重量}$$

c' は無視できる程度であるから (7) は次のようになる。

$$\omega^2 = \frac{gG_y}{rh} \frac{4 + n(1 + \sigma) \pm \sqrt{\{2 - n(1 - \sigma)\}^2 + 12(1 + n)}}{4\sigma(1 + n)} = \frac{gG_y}{rh} \eta \dots\dots\dots (8)$$

また、基本振動における振幅比は次式で表わされる。

$$\frac{A_{xI}}{A_{\theta I}} = \frac{h}{1 - 2\sigma\eta} \dots\dots\dots (9)$$

底面から回転中心までの距離を Δh とすれば、回転角はきわめて小さいから次式が成立する。

$$h + \Delta h = \frac{A_{xI}}{A_{\theta I}} \quad \therefore \frac{\Delta h}{h} = \frac{2\sigma\eta}{1 - 2\sigma\eta} = \eta^* \dots\dots\dots (10)$$

$b/h = 0.3 \sim 0.6$, $\sigma = 4 \sim 1/2$ に対する数値計算の結果は表-1 に示した通りである。表-1 から次のようなことが

図-2

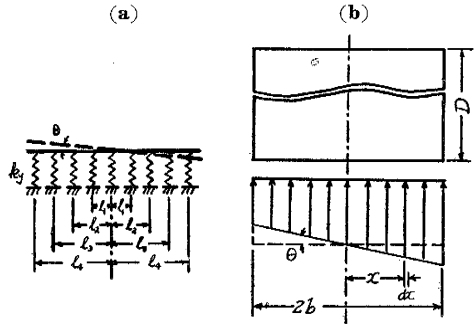


表-1 η, η_*, η' 値

σ	b/h	0.3	0.4	0.5	0.6
4	η	0.01032	0.01724	0.02500	0.03309
	$\sqrt{\eta}$	0.10159	0.13131	0.15811	0.18190
	η_*	0.0900	0.1600	0.2500	0.3600
2	η	0.01065	0.01820	0.02709	0.03689
	$\sqrt{\eta}$	0.10322	0.13491	0.16458	0.19207
	η_*	0.0445	0.0785	0.1215	0.1731
1	η	0.01083	0.01871	0.02822	0.03901
	$\sqrt{\eta}$	0.10405	0.13677	0.16799	0.19751
	η_*	0.0221	0.0389	0.0598	0.0846
1/2	η	0.01091	0.01897	0.02881	0.04013
	$\sqrt{\eta}$	0.10447	0.13772	0.16973	0.20032
	η_*	0.0110	0.0193	0.0297	0.0418
	$\sqrt{\eta'}$	0.10489	0.13868	0.17150	0.20319

わかる。

(1) 固有円振動数 ω は地盤係数の平方根 $\sqrt{G_y}$ に比例し、重心高の平方根に逆比例するが、 b/h つまり底幅と重心高の比が大きいかほど固有円振動数も大きくなる。

(2) 固有円振動数は σ の減少に伴って多少増加するが、その影響はほとんど無視できる程度であるといえる。

(3) 次に、回転中心の位置については、 b/h が増加すれば底面から遠ざかつてゆく。このことから、例えば建築物のように、 b/h がかなり大きい構造物では回転中心は底面よりかなり下にあるだろうということが想像できる。しかし、表-1 によれば b/h が 0.6 以下、 σ が 2 以下であれば回転中心の降下量は重心高の 20% を超えない。従つて、このような場合には回転中心は底面上にあると仮定してもさしつかえなさそうである。

さて、(1) 式において $b_x = b_0 = 0$ とし、(1)₁ からえられる $k_x(x-h\theta) = -M\ddot{x}$ を (1)₂ に代入すれば次式がえられる。

$$I_G \ddot{\theta} + (k_0 - Mgh_N)\theta + Mh\ddot{x} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

前述の考察によれば、回転中心が底面の中点にほぼ一致していると仮定できる可能性があるので、 $x = h\theta$ において (11) に代入すれば次式がえられる。

$$(I_G + Mh^2)\ddot{\theta} + (k_0 - Mgh_N)\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

従つて、(12) は回転中心が底面上にあるものと仮定した場合の自由振動方程式である⁵⁾。

あるいは、エネルギーを Lagrange の方程式に代入して導くこともできる。すなわち、運動のエネルギーとしては重心における回転運動のエネルギー $Mi_G^2\dot{\theta}^2$ ($i_G^2 = I_G/M$) と回転に伴う水平運動のエネルギー $M(h\dot{\theta})^2$ があり (回転に伴う鉛直運動のエネルギーを無視する) 位置のエネルギーとしては回転に伴う地盤のひずみエネルギー $G_y b^3 \theta^2 / 3$ と重心の降下に伴う位置のエネルギーの減少 $Mgh_N \theta^2 / 2$ がある。

$$\therefore T = M(i_G^2 + h^2)\dot{\theta}^2, \quad V = \left(\frac{G_y b^3 D}{3} - \frac{Mgh_N}{2} \right) \theta^2$$

運動のエネルギー T および位置のエネルギー V を Lagrange の方程式に代入すれば次式を導入できる。

$$M(i_G^2 + h^2)\ddot{\theta} + \left(\frac{2G_y b^3 D}{3} - Mgh_N \right) \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

(13)式と(12)式は全く同一の式である。そこで、前述の矩形断面に対して数値計算を試みると次のようになる。

$$\omega'^2 = \frac{k_0 - Mgh_N}{I_G + Mh^2} = \frac{g(G_y n - 6r)}{rh} \cdot \frac{1}{2(4+n)} = \frac{gG_y}{rh} \eta' \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{ここに} \quad \eta' = \frac{n}{2(4+n)}$$

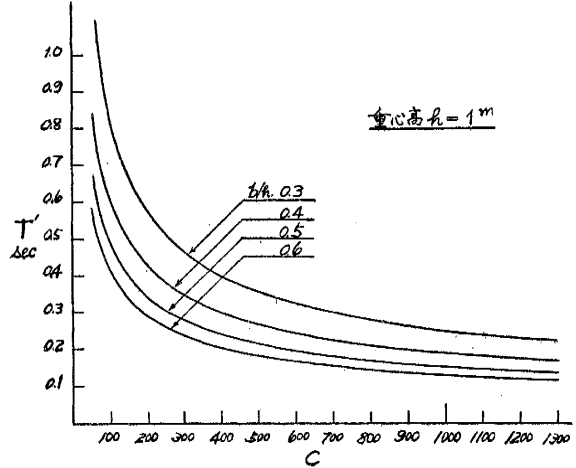
(14) の η' は (8) において $\sigma \rightarrow 0$ とした場合の η にほかならない。 $\sqrt{\eta'}$ の数値計算結果は表-1 に示してある。 $\sqrt{\eta}$ と $\sqrt{\eta'}$ を比較することは回転中心を底面上にあるものと仮定したために生ずる固有円振動数の誤差を

検討することになる。 b/h が 0.6, σ が 4 の場合誤差は約 12% であるから b/h がこの程度以下の構造物で減衰しない基礎地盤上の矩形断面のものを考えれば、固有周期に関する限り回転中心は底面上にあるものと仮定した近似計算法で十分であるといえる。このような観点から (13) によつて固有周期を計算した結果が 図-3 に示されている。ただし、この場合の計算式は次の通りである。

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{h}{3g} \frac{4+n}{cn-1}} \quad c = \frac{G_y}{6r} \dots (15)$$

図-3 は $h=1\text{m}$ の場合の b/h をパラメータにした $C-T'$ 関係図である。任意の重心高 H m に対しては 図-3 の \sqrt{H} 倍になる。コンクリートブロックで G_y が 4~10 kg/cm^2 程度の基礎地盤を考えれば C は 300~800 位になるから $h=1\text{m}$ で T' は 0.2~0.4 sec 位になる。従つて背の高い壁体では裏込土のない場合、固有周期が大きくなる可能性が大となる。

図-3 $C-T'$ 曲線



[II] 減衰する場合

実際には減衰しない基礎地盤は存在しないから減衰項を考慮した (2) 式から固有周期を論ずべきである。(2) 式から次の関係式をうる⁶⁾。

$$z^4 + \left\{ \mu_x^2 + \mu_0^2 - \frac{(\lambda_x - \lambda_0)^2}{2} \right\} z^2 - (\lambda_x - \lambda_0)(\mu_x^2 - \mu_0^2)z + \mu_x^2 \mu_0^2 + \frac{(\lambda_x - \lambda_0)^2}{4} (\mu_x^2 + \mu_0^2) + \frac{(\lambda_x - \lambda_0)^4}{16} - \beta(\mu_x^2 + \lambda_x^2)(\mu_0^2 + \lambda_0^2) = 0 \dots (16)$$

ただし $z = \omega\lambda + (\lambda_x + \lambda_0)/2$, $\mu_x^2 = \omega x^2 - \lambda_x^2$, $\mu_0^2 = \omega_0^2 - \lambda_0^2$, $\beta = \delta x^4 \delta_0^4 / \omega x^2 \omega_0^2$ とし, x も θ も同じ円振動数 ω_λ で振動するものとして $x = x_0 e^{\omega_\lambda t}$, $\theta = \theta_0 e^{\omega_\lambda t}$ とおいて導かれたものである。(16)によつて z を求めれば ω_λ もわかる。矩形断面に対する数値計算を試みるために

$$\lambda_x = \epsilon_x \omega_x, \quad \lambda_0 = \epsilon_0 \omega_0, \quad z = \alpha \sqrt{\frac{gG_x}{2rh}}$$

とおけば次式がえられる。

$$\alpha^4 + \left\{ 1 - \epsilon_x^2 + \frac{3 + \sigma n}{1 + n} (1 - \epsilon_0^2) - \frac{1}{2} (\epsilon_x - \epsilon_0 \sqrt{\frac{3 + \sigma n}{1 + n}})^2 \right\} \alpha^2 - (\epsilon_x - \epsilon_0 \sqrt{\frac{3 + \sigma n}{1 + n}}) \left\{ 1 - \epsilon_x^2 - (1 - \epsilon_0^2) \frac{3 + \sigma n}{1 + n} \right\} \alpha + (1 - \epsilon_x^2)(1 - \epsilon_0^2) \frac{3 + \sigma n}{1 + n} + \frac{1}{4} (\epsilon_x - \epsilon_0 \sqrt{\frac{3 + \sigma n}{1 + n}})^2 \left\{ 1 - \epsilon_x^2 + (1 - \epsilon_0^2) \frac{3 + \sigma n}{1 + n} \right\} + \frac{1}{16} (\epsilon_x - \epsilon_0 \sqrt{\frac{3 + \sigma n}{1 + n}})^4 - \frac{3}{1 + n} = 0 \dots (17)$$

(16) または (17) を解くことはきわめて面倒である。

そこで、[I] と同様にして $x = h\theta$ とおけば (1) より次の方程式をうる。

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{\lambda_0 I_G + \lambda_x M h^2}{I_G + M h^2} \dot{\theta} + \frac{k_0 - M g h N}{I_G + M h^2} \theta = 0 \dots (18)$$

従つて、この場合の固有円振動数 ω_λ' は次式で与えることができる。

$$\omega_\lambda' = \sqrt{\omega_\lambda'^2 - \lambda'^2}, \quad \lambda' = \frac{\lambda_0 I_G + \lambda_x M h^2}{I_G + M h^2}, \quad \omega_\lambda'^2 = \frac{k_0 - M g h N}{I_G + M h^2} \dots (19)$$

矩形断面に対しては次の形で表わされる。

$$\frac{\omega_\lambda'}{\sqrt{\frac{gG_y}{rh}}} = \sqrt{\frac{n}{2(4+n)}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda'}{\omega_\lambda'}\right)^2}, \quad \left(\frac{\lambda'}{\omega_\lambda'}\right)^2 = \frac{6}{n} \left\{ \epsilon_0 \frac{1+n}{3} \sqrt{\frac{3+\sigma n}{2\sigma(1+n)}} + \epsilon_x \sqrt{\frac{1}{2\sigma}} \right\}^2 \dots (20)$$

数値計算による円振動数の考察

(17), (20) によつて $\sigma=1$, $b/h=0.5$, $\varepsilon_x=\varepsilon_\theta=0.1, 0.2$ の場合の
 数値計算結果は円振動数に対して 表-2 をうる。この表では, (18) を
 導く過程の回転中心に及ぼす影響を詳細に説明することができない。こ
 れに関しては次節で検討することにしよう。

3. 強制振動

[I] 減衰しない場合

重心より上方 h' なる距離に水平強制力 $P \cos pt$ が作用する場合の強制
 振動方程式は次のように表わすことができる。

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x - \delta_x^4 \theta = a_x \omega_x^2 \cos pt \dots (21)_1$$

$$\ddot{\theta} + \omega_\theta^2 \theta - \delta_\theta^4 x = a_\theta \omega_\theta^2 \cos pt \dots (21)_2$$

$$a_x = \frac{P}{k_x}, \quad a_\theta = \frac{Ph'}{k_\theta - Mgh_N + k_x h^2} \dots (21)_3$$

(21) の一般解は次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} x &= A_x \cos(\omega t + \varepsilon) + A_x' \cos pt \\ \theta &= A_\theta \cos(\omega t + \varepsilon) + A_\theta' \cos pt \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

$$A_x' = \frac{a_x \omega_x^2 (-p^2 + \omega_\theta^2) + a_\theta \omega_\theta^2 \delta_x^4}{(-p^2 + \omega_x^2)(-p^2 + \omega_\theta^2) - \delta_x^4 \delta_\theta^4}, \quad A_\theta' = \frac{a_\theta \omega_\theta^2 (-p^2 + \omega_x^2) + a_x \omega_x^2 \delta_\theta^4}{(-p^2 + \omega_x^2)(-p^2 + \omega_\theta^2) - \delta_x^4 \delta_\theta^4} \dots (23)$$

$A_x, A_\theta, \varepsilon$ は初期条件によつて決まる。

数値計算による回転中心の考察

強制力が $P \sin pt$ なる場合を取り扱い初期条件として $t=0, x=\theta=0, \dot{x}=\dot{\theta}=0$ を考えれば x, θ として次式
 がえられる。

$$x = \frac{A_x'}{\omega} (-p \sin \omega t + \omega \sin pt), \quad \theta = \frac{A_\theta'}{\omega} (-p \sin \omega t + \omega \sin pt) \dots (24)$$

従つて, この場合の回転中心を底面下 Δh とすれば

$$\Delta h = \frac{x}{\theta} - h = \frac{a_x \omega_x^2 (-p^2 + \omega_\theta^2) + a_\theta \omega_\theta^2 \delta_x^4}{a_\theta \omega_\theta^2 (-p^2 + \omega_x^2) + a_x \omega_x^2 \delta_\theta^4} - h \dots (25)$$

となる。ここで, 前記の矩形断面に適用すれば次の関係が成立する。

$$\frac{\Delta h}{h} = j = \frac{3 + \sigma n - q(1+n) + 3s}{3\{s(1-q) + 1\}} - 1 \dots (26)_1$$

$$p^2 = q \omega_x^2, \quad s = \frac{h'}{h} \dots (26)_2$$

σ, q, s, n のいろいろの値に対する j の計算値を 表-3 に示した。数値計算結果によれば, 回転中心の性質と

表-2 $\omega_\lambda, \omega_\lambda'$ 値

$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta$	0.1	0.2
$\omega_\lambda \sqrt{\frac{gC_N}{rh}}$	0.1664	0.03086
$\omega_\lambda' \sqrt{\frac{gC_N}{rh}}$	0.1498	0.03928

図-4

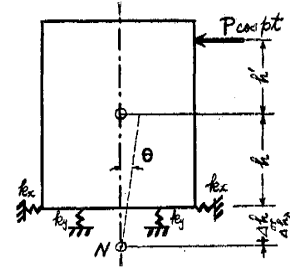


表-3 j 値

σ	q	b/h			s			n			j		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
4	1	-0.243	0.257	0.076	-0.173	0.327	0.827	-0.083	0.417	0.917	0.027	0.527	1.027
	0.5	-0.062	0.151	0.029	0.020	0.216	0.346	0.125	0.300	0.416	0.253	0.403	0.502
	0.1	0.084	0.092	0.097	0.175	0.155	0.145	0.292	0.235	0.206	0.435	0.335	0.281
	0.05	0.102	0.086	0.078	0.194	0.148	0.125	0.313	0.228	0.186	0.457	0.327	0.260
2	1	-0.300	0.197	0.697	-0.280	0.220	0.720	-0.250	0.250	0.750	-0.217	0.287	0.787
	0.5	-0.122	0.103	0.252	-0.020	0.131	0.275	-0.042	0.167	0.305	0.013	0.211	0.342
	0.1	0.024	0.051	0.065	0.068	0.081	0.088	0.125	0.121	0.118	0.195	0.169	0.155
	0.05	0.042	0.045	0.047	0.087	0.076	0.071	0.146	0.116	0.100	0.217	0.166	0.137
1	1	-0.333	0.167	0.667	-0.333	0.167	0.667	-0.333	0.167	0.667	-0.333	0.167	0.667
	0.5	-0.152	0.079	0.232	-0.140	0.088	0.240	-0.125	0.100	0.250	-0.107	0.115	0.267
	0.1	-0.006	0.030	0.049	0.015	0.045	0.060	0.042	0.063	0.075	0.075	0.086	0.092
	0.05	0.012	0.025	0.032	0.034	0.040	0.040	0.043	0.063	0.059	0.058	0.097	0.083
1/2	1	-0.348	0.152	0.652	-0.360	0.140	0.640	-0.375	0.125	0.625	-0.393	0.107	0.607
	0.5	-0.167	0.067	0.222	-0.167	0.067	0.222	-0.167	0.067	0.222	-0.167	0.067	0.222
	0.1	-0.021	0.020	0.041	-0.012	0.026	0.046	0	0.034	0.053	0.015	0.045	0.060
	0.05	-0.003	0.015	0.024	0.007	0.022	0.029	0.021	0.031	0.036	0.037	0.042	0.045

して次の諸点が明らかにされた。すなわち、回転中心の位置は強制振動数によつて変化するが、その模様は次のとおりである。

(1) $q < (s+1)/s$, $\sigma n + q\{3s - (1+n)\} > 0$ ならば回転中心は底面下にある。すなわち、 $s > (1+n)/3$ ならば、回転中心は必ず底面下にあつて q が大きい程中心は降下してゆく。 $s < (1+n)/3$ の場合でも q が $(s+1)/s$ と $\sigma n/\{(1+n)-3s\}$ の間にあれば底面下にあつて、 q が大きい程中心は上昇してゆく。例えば、 b/h が 0.3~0.6 の範囲であれば $s=0.5$ は $s > (1+n)/3$ の条件を満足しており、 $q < (s+1)/s=3$ の範囲では確かに回転中心は底面下になつている。

(2) $q < (s+1)/s$, $\sigma n + q\{3s - (1+n)\} < 0$ ならば底面の上方にくる。同様にして、 $q > (s+1)/s$ が成立し、 $\sigma n + q\{3s - (1+n)\} > 0$ ならば回転中心は底面の上方に、 $\sigma n + q\{3s - (1+n)\} < 0$ ならば下方にくる。その傾向は表-3によく現われている。計算結果は σ その他を仮定して (26)₁ によつて求めたものであるが実際問題として σ , q の値がきわめて重要な要素であることがわかる。例えば、 $h=2$ m, $p=60$ rad/sec, $G_x=10$ kg/cm³ 程度であれば $q=0.3$ 位になる。 σ に関しては鉛直、水平動的地盤係数を対象にする必要があり、今後の大きな研究課題であるが、静的な係数の比によれば2前後ではなからうかと思われる。これは勿論土質によつて異なるものであろうから断定できない。ただ、1に対しては著しく大きい値でもなく、小さい値でもない。以上のことから減衰項を無視した強制振動における回転中心の位置を大きく左右する因子は強制振動数であると言えよう。従つて、もしもその値がはなはだしく大きいものでなければ、回転中心はほぼ底面上にあるものと仮定してもさしつかえないようである。

そこで、次に問題を回転中心に関する自由度1の振動方程式として解くことを試みよう。

$$M\ddot{x} + k_x(x-h\theta) = P \cos pt \dots\dots\dots(27)_1$$

$$I_G\ddot{\theta} + (k_0 - MgH_N + k_x h^2)\theta - k_x h x = Ph' \cos pt \dots\dots\dots(27)_2$$

(27) 式は重心に関する水平、回転の振動方程式であるが、いま回転中心 N に関する慣性モーメントを I_N 、回転バネ常数を Nk_0 とすれば、 N に関する回転運動方程式は次式で表わされる。

$$I_N\ddot{\theta} + Nk_0\theta - MgH_N\theta = P(h' + H_N)\cos pt \dots\dots\dots(28)$$

この場合、 $x = H_N\theta$ とおくことができるからこれを (27) に代入すれば次のようになる。

$$MH_N\ddot{\theta} + k_x H_N\theta - k_x h\theta = P \cos pt \dots\dots\dots(29)_1$$

$$I_G\ddot{\theta} + (k_0 - MgH_N + k_x h^2)\theta - k_x h H_N\theta = Ph' \cos pt \dots\dots\dots(29)_2$$

(28) の右辺の $PH_N \cos pt$ に (29)₁ の左辺を代入すれば

$$(I_N - MH_N^2)\ddot{\theta} + (Nk_0 - MgH_N - k_x H_N^2 + k_x h H_N)\theta = Ph' \cos pt \dots\dots\dots(30)$$

(29)₂ と (30) の左辺同士を比較すれば次の関係を満足する必要があることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} I_N &= I_G + MH_N^2 \\ Nk_0 &= k_0 + k_x(H_N - h)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

従つて、(27) を解くことは (28), (31) を解くことにほかならない。ここでもし、 $H_N = h$ とみなすことができれば

$$I_N = I_G + Mh^2, \quad Nk_0 = k_0 \dots\dots\dots(32)$$

となるから、この場合の (28) の左辺は (13) の自由振動方程式にほかならない。総括的にいえば、前述の説明でもわかるように強制振動数が低ければ回転中心は底面付近にあるから振動特性を把握する上に近似的な計算法が可能である。この点については別の機会に稿を改めて発表することにする。もし、回転中心が底面上よりはなはだしくはずれる場合には、例えば、(26)₁ より $H_N = \Delta h + h$ となるからこれより得られた H_N を用いて、(31), (28) より特性を解析しなければならない。

さて、基礎地盤が周期的変位を起す場合には次のように考えることもできる。すなわち、固定の空間座標を x, y とし地盤の x, y 方向の変位をそれぞれ ξ, η で表わし、地盤反力の x, y 方向の分力を F, R とし R の偏心距離を e とすれば x, y 方向および回転に関する運動方程式は次式で表わすことができる。

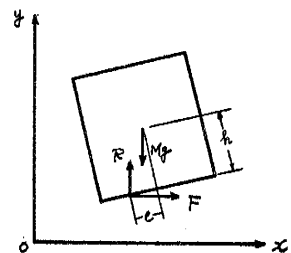
$$M\ddot{x} = F, \quad M\ddot{y} = R - Mg \dots\dots\dots(33)_1, (33)_2$$

$$Mi_G\ddot{\theta} = -R(e-h\theta) + F(e\theta+h) \dots\dots\dots(33)_3$$

回転中心が底面上にあるものと仮定すれば、

$$x = \xi - h\theta, \quad y = \eta + h$$

図-5



$$\therefore F=M(\xi-h\ddot{\theta}), R=M(g+\ddot{\eta}) \dots\dots\dots (34)$$

さて、外力と地盤反力とは釣り合わなければならないから、回転中心に関するモーメントを考えれば次式が成立するはずである。

$$Re - Fe \theta = Re = G_y I \theta = \frac{2}{3} G_y b^3 D \theta$$

$$\therefore e = \frac{2 G_y b^3 D \theta}{3 R} = \frac{2 G_y b^3 D \theta}{3 M(g+\ddot{\eta})} \dots\dots\dots (35)$$

(35) を (33) に代入すれば次式がえられる。

$$h \frac{(g+\ddot{\eta})\theta + \xi - \delta \ddot{\theta}}{g+\ddot{\eta} - \xi\theta + h\theta\ddot{\theta}} = \frac{2 G_y b^3 D \theta}{3 M(g+\ddot{\eta})}, \delta = h + \frac{iG^2}{h}$$

水平振動だけを取り扱い $\ddot{\eta}=0$ とおけば

$$\ddot{\theta} = \frac{g(1-\zeta)\theta + (1+\zeta\theta^2)\xi}{\delta + h\zeta\theta^2}, \zeta = \frac{2 G_y b^3 D}{3 Mgh} \dots\dots\dots (36)$$

θ^2 の項は他の項に比較して無視できるから、(14) を考慮すれば次の振動方程式がえられる。

$$\ddot{\theta} + \omega'^2 \theta = \frac{\xi}{\delta} \dots\dots\dots (37)$$

$M\ddot{\xi} = P \cos pt$ とおけば (37) は (28) において $h'=0, H_N=h$ とおいた式に一致している。この考え方のきわめて便利な点は (34) から、基礎地盤が回転変形を伴えば、水平作用力はその第二項だけ変化しうる可能性がはつきりしていることである。このことは、この種の構造物の耐震性を論ずる場合の有力な手がかりになるが、この点に関しては今後の研究に託したい。

$h' \neq 0$ の場合の一般的強制振動に対しても (28) において $H_N=h$ とおいた振動方程式を導くことができる。

[II] 減衰する場合

[I] と同じ条件で水平、回転に関する振動方程式は減衰項を考慮すれば次のようになる。

$$M\ddot{x} + b_y \dot{x} + k_x x - k_x h \theta = P \cos pt \dots\dots\dots (38)_1$$

$$I_G \ddot{\theta} + b_\theta \dot{\theta} + (k_\theta - Mgh_N + k_x h^2) \theta - k_x h x = Ph' \cos pt \dots\dots\dots (38)_2$$

$$\therefore \ddot{x} + 2\lambda_x \dot{x} + \omega_x^2 x - \delta_x^4 \theta = a_x \omega_x^2 \cos pt \dots\dots\dots (39)_1$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda_\theta \dot{\theta} + \omega_\theta^2 \theta - \delta_\theta^4 x = a_\theta \omega_\theta^2 \cos pt \dots\dots\dots (39)_2$$

一般に基礎地盤の減衰係数はかなり大きいから定常状態に落ちつくのもきわめて早い。従つて、定常状態を対象にすれば強制項だけを考えればよい。いま

$$x = A_x p e^{ipt}, \theta = A_\theta p e^{ipt} \dots\dots\dots (40)$$

とおき (39) に代入すれば次の関係式をうる。

$$\left. \begin{aligned} (-p^2 + 2\lambda_x pi + \omega_x^2) A_x p + (-\delta_x^4) A_\theta p &= a_x \omega_x^2 \\ (-\delta_\theta^4) A_x p + (-p^2 + 2\lambda_\theta pi + \omega_\theta^2) A_\theta p &= a_\theta \omega_\theta^2 \\ \therefore A_x p &= \frac{a_x \omega_x^2 (-p^2 + 2\lambda_\theta pi + \omega_\theta^2) + a_\theta \omega_\theta^2 \delta_x^4}{(-p^2 + 2\lambda_x pi + \omega_x^2) (-p^2 + 2\lambda_\theta pi + \omega_\theta^2) - \delta_x^4 \delta_\theta^4} \\ A_\theta p &= \frac{a_\theta \omega_\theta^2 (-p^2 + 2\lambda_x pi + \omega_x^2) + a_x \omega_x^2 \delta_\theta^4}{(-p^2 + 2\lambda_x pi + \omega_x^2) (-p^2 + 2\lambda_\theta pi + \omega_\theta^2) - \delta_x^4 \delta_\theta^4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

いま

$$\left. \begin{aligned} A &= p^4 - (\omega_x^2 + 4\lambda_x \lambda_\theta + \omega_\theta^2) p^2 + \omega_x^2 \omega_\theta^2 - \delta_x^4 \delta_\theta^4 \\ B &= 2p \{ \lambda_\theta (-p^2 + \omega_x^2) + \lambda_x (-p^2 + \omega_\theta^2) \} \\ C &= a_x \omega_x^2 (-p^2 + \omega_\theta^2) + a_\theta \omega_\theta^2 \delta_x^4 \\ E &= a_\theta \omega_\theta^2 (-p^2 + \omega_x^2) + a_x \omega_x^2 \delta_\theta^4 \\ D &= 2a_x \omega_x^2 \lambda_\theta p, F = 2a_\theta \omega_\theta^2 \lambda_x p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} A_x p &= \frac{AC + BD}{A^2 + B^2} + i \frac{AD - BC}{A^2 + B^2} \\ A_\theta p &= \frac{AE + BF}{A^2 + B^2} + i \frac{AF - BE}{A^2 + B^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

従つて、実振幅は次式で表わされる。

$$a_{x\rho} = \sqrt{\left(\frac{AC+BD}{A^2+B^2}\right)^2 + \left(\frac{AD-BC}{A^2+B^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{C^2+D^2}{A^2+B^2}}, \quad a_{0\rho} = \sqrt{\frac{E^2+F^2}{A^2+B^2}} \quad (44)$$

また、位相差は次の通りである。

$$\tan \beta_x = \frac{AD-BC}{A^2+B^2} / \frac{AC+BD}{A^2+B^2} = \frac{AD-BC}{AC+BD}, \quad \tan \beta_0 = \frac{AF-BE}{AE+BF} \quad (45)$$

[I] と同じように回転中心 N_λ に関する回転運動方程式を求めると次のようになる。

$$I_N \ddot{\theta} + N b_0 \dot{\theta} + N k_0 \theta - M g H_{N\lambda} \theta = P(h' + H_{N\lambda}) \cos pt \quad (46)_1$$

$$\left. \begin{aligned} I_N &= I_G + M H_{N\lambda}^2, \quad N b_0 = b_0 + b_x H_{N\lambda}^2 \\ N k_0 &= k_0 + k_x (H_{N\lambda} - h)^2 \end{aligned} \right\} \quad (46)_2$$

(45) の位相差が同じであると仮定すれば、すなわち

$$\beta_x = \beta_0, \quad \therefore H_{N\lambda} = \frac{x}{\theta} = \frac{a_{x\rho}}{a_{0\rho}} = \sqrt{\frac{C^2+D^2}{E^2+F^2}} \quad (47)$$

となる。この場合の (39) の解は次の通りである。

$$\theta = \frac{P H_R}{I_N \omega^2 N_0 \sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_{N_0}^2}\right)^2 + 4 \frac{\lambda N^2}{\omega_{N_0}^2} \frac{p^2}{\omega_{N_0}^2}}} \cos(pt - \gamma') \quad (48)_1$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{N b_0}{I_N} &= 2 \lambda N, \quad \frac{N k_0 - M g H_{N\lambda}}{I_N} = \omega_{N_0}^2 \\ \gamma' &= \tan^{-1} \frac{2 \lambda N p}{\omega_{N_0}^2 - p^2}, \quad H_R = h' + H_{N\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (48)_2$$

数値計算による回転中心の考察

前記の矩形断面に対して数値計算を試みよう。

$$\begin{aligned} C &= a_x \omega_x^2 \omega_0^2 \frac{(3+\sigma n) - q(1+n) + 3s}{3+\sigma n} \\ D &= a_x \omega_x^2 \omega_0^2 \left\{ 2 \epsilon_0 \sqrt{q} \sqrt{\frac{(1+n)(3+\sigma n)}{3+\sigma n}} \right\} \\ E &= a_x \omega_x^2 \omega_0^2 \frac{1}{h} \frac{3s(1-q) + 3}{3+\sigma n} \\ F &= a_x \omega_x^2 \omega_0^2 \frac{1}{h} \frac{6s \epsilon_x \sqrt{q}}{3+\sigma n} \\ \therefore \frac{H_{N\lambda}}{h} &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\{(3+\sigma n) - q(1+n) + 3s\}^2 + 4q(1+n)(3+\sigma n) \epsilon_0^2}{[1+s(1-q)]^2 + 4q s^2 \epsilon_x^2}} \quad (49) \end{aligned}$$

$\epsilon_x = \epsilon_0 = 0$ であれば言う迄もなく $H_{N\lambda} = H_N$ となる。前例と同じように、 $b/h = 0.3 \sim 0.6$, $q = 0.05 \sim 1$, $\epsilon_0 = 0.3 \sim 0.6$, $\epsilon_x = 0.3$ に対する $\Delta h_\lambda/h$ を計算すれば表-4 をうる。 ϵ_x の変化が $\Delta h_\lambda/h$ に及ぼす影響は表-5 の通りである。ここに $\Delta h_\lambda/h = (H_{N\lambda}/h) - 1$ である。

表-4 より回転中心に関して次のようなことが言える。

- (1) σ が大きい程回転中心は降下する。
- (2) b/h が大きい程回転中心は降下する。
- (3) ϵ_0 が増加する、つまり回転の減衰項が増加しても、また、 s が増加しても回転中心は降下する。地震動を対象にすれば $s=0$ に相当するが、 $\sigma \leq 2$ においては回転中心はほとんど重心直下底面上と考えても差支えない。このことは近似解析を行う上に非常に大切な性質である。
- (4) q すなわち強制振動数が変動すれば回転中心も変動するが、その傾向は $s, \epsilon_0, b/h, \sigma$ によつて違ふ。
- (5) 総括的には $\sigma \leq 2$ で、強制振動数が余り高くなければ回転中心は重心直下底面上と考えると大差はなく誤差は高々 30% 程度である。

次に表-5 より ϵ_x の影響を論ずれば次の通りである。すなわち、表-4 の結果は $\epsilon_x = 0.3$ に対する値を示し

表-5 $\left(\frac{\Delta h_\lambda}{h}\right)_{\epsilon_x} / \left(\frac{\Delta h_\lambda}{h}\right)_{\epsilon_x=0.3}$

ϵ_x		0.3	0.4	0.5	0.6
1	0	1	1	1	1
	0.5	1	0.9694	0.9338	0.8952
	1	1	0.9106	0.8246	0.7466
0.5	0	1	1	1	1
	0.5	1	0.9893	0.9760	0.9605
	1	1	0.9724	0.9400	0.9045
0.1	0	1	1	1	1
	0.5	1	0.9983	0.9962	0.9937
	1	1	0.9962	0.9913	0.9855
0.05	0	1	1	1	1
	0.5	1	0.9992	0.9969	0.9969
	1	1	0.9982	0.9958	0.9930

表-4 $\Delta h_{\lambda}/h$ 値 ($\epsilon_x=0.3$)

ρ	g	b/h	ϵ_0	s	0.3						0.4						0.5						0.6						
					0.3		0.4		0.5		0.6		0.3		0.4		0.5		0.6		0.3		0.4		0.5		0.6		
					0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
4	0	0	0	0	0	-0.152	-0.087	-0.011	0.076	-0.073	-0.008	0.074	0.166	0.020	0.094	0.182	0.281	0.138	0.218	0.313	0.421								
					0.5	0.258	0.289	0.350	0.409	0.330	0.375	0.430	0.495	0.423	0.472	0.533	0.605	0.605	0.536	0.591	0.659	0.739							
					1	0.542	0.569	0.603	0.643	0.605	0.635	0.673	0.718	0.688	0.721	0.763	0.814	0.788	0.826	0.874	0.931								
	0.5	0	0	0	0	-0.023	0.005	0.041	0.083	0.061	0.091	0.129	0.174	0.169	0.201	0.242	0.291	0.301	0.336	0.381	0.433								
					0.5	0.154	0.170	0.189	0.212	0.221	0.237	0.258	0.283	0.306	0.324	0.347	0.375	0.410	0.430	0.456	0.488								
					1	0.255	0.265	0.277	0.291	0.309	0.319	0.333	0.348	0.378	0.390	0.405	0.422	0.463	0.476	0.493	0.513								
	0.1	0	0	0	0	0.090	0.096	0.102	0.110	0.182	0.187	0.194	0.203	0.299	0.305	0.313	0.322	0.443	0.449	0.458	0.468								
					0.5	0.093	0.096	0.099	0.102	0.156	0.159	0.162	0.166	0.237	0.240	0.244	0.248	0.395	0.306	0.306	0.343	0.315							
					1	0.093	0.095	0.096	0.099	0.141	0.143	0.145	0.147	0.202	0.204	0.207	0.209	0.278	0.280	0.282	0.285	0.285							
	0.05	0	0	0	0	0.105	0.108	0.111	0.115	0.198	0.200	0.204	0.208	0.316	0.319	0.323	0.328	0.462	0.465	0.469	0.474								
					0.5	0.086	0.088	0.089	0.091	0.149	0.150	0.152	0.154	0.229	0.231	0.233	0.235	0.328	0.329	0.331	0.334	0.334							
					1	0.076	0.077	0.078	0.079	0.123	0.124	0.125	0.126	0.184	0.185	0.186	0.187	0.258	0.259	0.260	0.262	0.262							
2	0	0	0	0	0	-0.211	-0.145	-0.067	0.019	-0.180	-0.110	-0.027	0.065	-0.141	-0.065	0.024	0.124	-0.014	-0.011	0.087	0.195								
					0.5	0.200	0.241	0.291	0.350	0.228	0.271	0.326	0.390	0.296	0.311	0.371	0.441	0.296	0.306	0.350	0.426	0.504							
					1	0.489	0.561	0.549	0.589	0.502	0.523	0.567	0.611	0.543	0.575	0.615	0.663	0.580	0.580	0.616	0.661	0.715							
	0.5	0	0	0	0	-0.083	-0.054	-0.018	0.024	-0.045	-0.015	0.024	0.069	0.003	0.036	0.078	0.126	0.062	0.098	0.144	0.196								
					0.5	0.107	0.122	0.141	0.164	0.136	0.152	0.173	0.198	0.174	0.192	0.214	0.241	0.220	0.240	0.265	0.295								
					1	0.217	0.226	0.237	0.251	0.240	0.250	0.263	0.278	0.271	0.282	0.295	0.312	0.308	0.320	0.336	0.355								
	0.1	0	0	0	0	0.030	0.036	0.042	0.050	0.075	0.081	0.088	0.096	0.133	0.139	0.146	0.156	0.203	0.210	0.218	0.228								
					0.5	0.052	0.054	0.057	0.061	0.082	0.085	0.088	0.093	0.122	0.125	0.129	0.133	0.170	0.174	0.178	0.183								
					1	0.062	0.063	0.065	0.064	0.085	0.086	0.088	0.091	0.116	0.117	0.119	0.121	0.152	0.154	0.156	0.159								
	0.05	0	0	0	0	0.045	0.048	0.051	0.055	0.091	0.094	0.097	0.103	0.150	0.153	0.156	0.161	0.221	0.225	0.229	0.234								
					0.5	0.046	0.047	0.048	0.050	0.077	0.078	0.080	0.082	0.116	0.118	0.120	0.122	0.165	0.167	0.169	0.171								
					1	0.045	0.046	0.047	0.048	0.069	0.070	0.071	0.072	0.099	0.100	0.101	0.102	0.136	0.136	0.138	0.139								
1	0	0	0	0	0	-0.239	-0.173	-0.095	-0.008	-0.231	-0.160	-0.077	0.015	-0.221	-0.144	-0.053	0.046	-0.208	-0.123	-0.024	0.084								
					0.5	0.171	0.212	0.262	0.320	0.176	0.220	0.274	0.370	0.182	0.230	0.290	0.358	0.190	0.244	0.309	0.385	0.466							
					1	0.463	0.489	0.522	0.562	0.433	0.495	0.530	0.573	0.470	0.502	0.541	0.588	0.475	0.510	0.518	0.518	0.606							
	0.5	0	0	0	0	-0.113	-0.084	-0.048	-0.005	-0.098	-0.067	-0.029	0.016	-0.080	-0.046	-0.004	0.044	-0.058	-0.020	0.026	0.079								
					0.5	0.083	0.098	0.117	0.140	0.094	0.110	0.130	0.155	0.108	0.125	0.147	0.174	0.125	0.144	0.169	0.198								
					1	0.197	0.206	0.218	0.232	0.206	0.215	0.228	0.243	0.216	0.227	0.241	0.257	0.230	0.242	0.257	0.275								
	0.1	0	0	0	0	0.000	0.006	0.012	0.020	0.022	0.027	0.035	0.043	0.049	0.055	0.063	0.072	0.083	0.090	0.098	0.081								
					0.5	0.031	0.033	0.037	0.040	0.046	0.048	0.052	0.059	0.065	0.067	0.071	0.075	0.088	0.091	0.095	0.099								
					1	0.046	0.047	0.049	0.051	0.057	0.059	0.060	0.063	0.071	0.073	0.075	0.078	0.089	0.091	0.093	0.096								

σ	ε ₀	ε _x	0.3				0.4				0.5				0.6			
			0.3	0.4	0.5	0.6	0.3	0.4	0.5	0.6	0.3	0.4	0.5	0.6	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0	0	0.015	0.018	0.021	0.025	0.038	0.040	0.044	0.048	0.066	0.069	0.073	0.078	0.101	0.105	0.109	0.114
0.05	0.5	0	0.025	0.027	0.028	0.030	0.041	0.042	0.043	0.045	0.060	0.061	0.063	0.065	0.084	0.085	0.088	0.090
1	1	1	0.023	0.031	0.032	0.033	0.042	0.042	0.043	0.044	0.056	0.057	0.058	0.059	0.074	0.075	0.076	0.077
1/2	0	0	-0.253	-0.187	-0.109	-0.022	-0.257	-0.185	-0.102	-0.009	-0.260	-0.182	-0.092	0.008	-0.264	-0.178	-0.079	0.080
0.5	0.5	0	0.157	0.198	0.247	0.305	0.151	0.194	0.281	0.310	0.142	0.190	0.249	0.317	0.132	0.186	0.251	0.316
1	1	1	0.450	0.476	0.509	0.548	0.443	0.471	0.506	0.549	0.434	0.465	0.504	0.550	0.423	0.457	0.500	0.551
0.5	0	0	-0.128	-0.099	-0.063	-0.020	-0.125	-0.094	-0.055	-0.010	-0.121	-0.087	-0.045	0.003	-0.116	-0.079	-0.033	0.020
0.5	0.5	0	0.071	0.086	0.105	0.127	0.076	0.089	0.109	0.133	0.074	0.092	0.114	0.140	0.077	0.096	0.120	0.149
1	1	1	0.188	0.197	0.208	0.222	0.189	0.198	0.210	0.225	0.235	0.200	0.213	0.230	0.189	0.203	0.217	0.235
0.5	0	0	-0.015	-0.009	-0.003	0.005	-0.005	0.001	0.008	0.016	0.008	0.014	0.021	0.031	0.023	0.030	0.038	0.048
0.5	0.5	0	0.021	0.023	0.025	0.030	0.027	0.030	0.033	0.037	0.036	0.039	0.042	0.047	0.046	0.049	0.053	0.058
1	1	1	0.038	0.039	0.041	0.043	0.043	0.044	0.046	0.049	0.049	0.051	0.053	0.056	0.057	0.059	0.061	0.064
0.5	0	0	0.000	0.003	0.006	0.010	0.011	0.014	0.017	0.021	0.025	0.028	0.031	0.021	0.042	0.045	0.049	0.054
0.5	0.5	0	0.015	0.018	0.020	0.020	0.022	0.024	0.025	0.027	0.032	0.033	0.035	0.037	0.043	0.045	0.046	0.049
1	1	1	0.022	0.023	0.024	0.025	0.028	0.029	0.031	0.031	0.035	0.036	0.037	0.038	0.043	0.044	0.045	0.047

ているが、 $\epsilon_x=0.6, q=0.5, s=1$ おいてさえ $\epsilon_x=0.3$ の場合の 90% にとどまっている。このことは、強制振動数が余り高くなければ ϵ_0, ϵ_x の回転中心の変動に与える影響はそれ程大きいものではない。ただ、(49) からもうすぐわかることであるが、 ϵ_0 の増加は回転中心を降下させるが ϵ_x の増加は上昇させる。従つて、 ϵ_0, ϵ_x ともに多少大きくなつても回転中心はそれ程変動しない訳である。

さて、速度に比例する減衰項を有する振動系の固有円振動数は次式で表わされる。

$$\omega_{N\lambda} = \sqrt{\omega_{N0}^2 - \lambda N^2}$$

$$(47) \text{ の振動に対しては次のようになる。}$$

$$\omega_{N\lambda} = \sqrt{\frac{k_0 - Mgh_{N\lambda} + k_x(H_{N\lambda} - h)^2}{I_G + MH_{N\lambda}^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda N}{\omega_{N0}}\right)^2}$$

..... (50)

矩形断面に適用すれば

$$\frac{\omega_{N\lambda}}{\sqrt{\frac{gG_y}{r h} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda N}{\omega_{N0}}\right)^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{n}{3} + \frac{j^2}{\sigma}}{\frac{2(1+n)}{3} + 2(1+j)^2}}$$

(51)

となり、数値計算結果は表-6 のようになる。表中 $j=0$ は(48)において $H_{N\lambda}=h$ とおいた場合の(20)に相当する。

表-6 $\omega_{N\lambda}$ 関係値

σ	j	b/h			
		0.3	0.4	0.5	0.6
4	0	0.1049	0.1387	0.1715	0.2032
	0.1	0.1016	0.1323	0.1624	0.1919
	0.2	0.1053	0.1327	0.1594	0.1853
	0.3	0.1131	0.1351	0.1585	0.1822
2	0	0.1049	0.1387	0.1715	0.2032
	0.1	0.1055	0.1352	0.1648	0.1938
	0.2	0.1177	0.1417	0.1668	0.1923
	0.3	0.1351	0.1539	0.1745	0.1962
1	0	0.1049	0.1387	0.1715	0.2032
	0.1	0.1128	0.1408	0.1694	0.1977
	0.2	0.1393	0.1598	0.1822	0.2056
	0.3	0.1709	0.1858	0.2028	0.2213
1/2	0	0.1049	0.1387	0.1715	0.2032
	0.1	0.1261	0.1515	0.1782	0.2051
	0.2	0.1746	0.1910	0.2097	0.2298
	0.3	0.2261	0.2370	0.2500	0.2645

さらに $\lambda_N=0$ をも併せ考えれば (14) の $\sqrt{\eta}$ になる。表-6 によれば、 σ が 2 以下で余り小さくなければ、普通の b/h に対しては回転中心の位置がそれほど固有周期に大きい影響を及ぼすものではないことがわかる。従つて、この種の構造物の固有周期の概略値は次式からでも計算できることがわかつた。すなわち、(46) において $H_{N\lambda}=h$ とおけば

$$(I_G + Mh^2)\ddot{\theta} + (b_0 + b_x h^2)\dot{\theta} + k_0 \theta = P(h' + h)\cos pt \dots\dots\dots (52)$$

となるが、 θ の項に k_x を考慮するかどうかは極めて大きい問題であるように思われる。そこで、(48) と (52) よりの解について比較検討してみよう。矩形断面を考えると

$$\frac{\omega_{N_0}^2}{\omega' \lambda_0^2} = \frac{\left(1 + \frac{3}{1+n}\right) \left(1 + \frac{3}{\sigma n} j^2\right)}{1 + \frac{3}{1+n} (1+j)^2}, \quad \frac{H_R}{I_N} \frac{h'+h}{I_G + Mh^2} = \frac{(s+1+j) \left(1 + \frac{3}{1+n}\right)}{(s+1) \left\{1 + \frac{3}{1+n} (1+j)^2\right\}} \dots\dots\dots (53)$$

P を一定にして強制振動数を変化させる振動試験または P も強制振動数に応じて変化させる振動試験のいずれかによつて Nb_0 が決定できる。(46)₂ の b_x は水平振動試験によつてなるべく回転を伴わないように注意しさえすれば決定できるが、 b_0 は単独に決定することはほとんど不可能である。従つて、(48)₁ から λ_N を決定しようとすれば H_R と、 ω_{N_0} 、 I_N の変化が当然問題になつてくるはずである。(53) によれば、 j の変化に対応する近似解の精度がある程度わかるが、 b/h が 0.5~0.6 位ならば低強制振動数に対しては問題はないが、一般的には水平振動に関する項を考慮しなければならぬ。2. [II] における数値計算例において、減衰項が比較的小さい場合に近似計算法が適用できると述べたのは上述のような欠陥に基因するものである。いずれにしても、実際の基礎地盤において地盤係数、減衰係数等がどの程度の値を示すかにかかつては、これらについては別の機会に説明を譲りたい。

4. 結 び

以上、きわめて簡単な仮定のもとに弾性基礎地盤上の剛体の水平振動を矩形断面に対し、問題を固有振動数、回転中心に限定して比較検討したが、実際地盤の接触圧力の分布状態及び地盤係数の性質等は施行方法、土質等によつて全く一様ではなく、理論式が果してどの程度の信頼性があるものか、また、以上の簡単な考察が耐震学的見地からどのような意義があるかについてはほとんど触れていない。この点については著者のもとで小型起振機による強制振動の予備試験が行われ結果を取りまとめており、振幅計、加速度の作製によつて精密な試験が計画されている。また、実際構造物は非対称であり、更に背面土圧の作用を受けているから上述の理論をそのまま適用することはできないが、これらの点についても別の機会に発表するつもりである。最後に本研究に対して終始激励して下さいた九大教授松尾春雄博士に心から感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 物部長徳：地震上下動に関する考察並に振動雑論，土木学会誌 10 卷 5 号
 Saburo Okabe: General theory on earth pressure and seismic stability of retaining wall and dam
 土木学会誌 10 卷 6 号
 松尾春雄：地震時土圧の実験的研究，土木試験所報告 22 号（昭 7 年）
 同 上：擁壁に作用する地震時土圧に関する実験的研究，土木試験所報告 69 号（昭 18 年）
 松尾春雄・大原資生：水に飽和された土の振動圧力，土木学会誌 40 卷 6 号
 大原資生：岸壁に作用する地震時土圧，九大工学集報 29 卷 2 号
- 2) 丹羽 新：壁体自身の振動による裏込土圧の実測，土木学会論文集 39 号
 大原資生：岸壁の振動測定，九大工学集報 29 卷 1 号
- 3) 松尾春雄，大原資生両氏の最近の研究結果による。
- 4) 例えば松平 精：基礎振動学 p. 133
- 5) 松尾春雄・梶原光久：弾性基礎上における構造物の振動，第 7 回年次学術講演会講演概要（昭 26 年）p. 14
- 6) 坪井忠二：振動論 p. 331
- 7) 5) に同じ

(昭.32.5.18)