

橋脚井筒構造の動的耐震計算法について¹⁾

正員 後藤 尚 男*

ON THE METHOD OF DYNAMIC EARTHQUAKE-PROOF COMPUTATION
ON THE BRIDGE PIERS AND WELL CONSTRUCTION

(Trans. of JSCE, No. 24, April 1955)

Hisao Gotō, C.E. Member

Synopsis The vibration characteristics of the bridge piers are, as the author proposed hitherto, explained by the elastic and rocking vibration phenomena. In this respect, the forced vibrations due to the design earthquake motion are solved theoretically and simplifying these results, theoretical approximate calculation methods are derived. Comparing with the calculated values by the theoretical approximate method and ordinary statical method, the author proposed a practical calculation method on the dynamic earthquake-proof computation of the bridge piers and well construction.

要旨 橋脚井筒構造の振動性状は著者が従来から強調してきたとおり弾性動揺振動であることを再確認した後、設計地震動に対する強制振動の厳密解を導いた。ついでこの厳密解を簡易化してこれより採用すべき動的計算値を決定し、特に静的計算値と比較することによって動的な実用計算法を提案しようとして試みたものである。

1. 弾性動揺振動の意義

図-1 (1) の井筒 AB, 橋脚 BC でまず簡単のため BC を無視して AB のみを取り出して自由-自由棒として図-1 (2) にかき, これを図-1 (3) のように一様な基礎係数 K をもつ弾性床におく²⁾。しかれば自由-自由棒に対する振動数方程式は周知のとおり,

$$\cos m_r d \cdot \cosh m_r d = 1$$

で示され, これを満足する $m_r d$ の値は通常表-1 (b) のように与えられている。しかるに表-1 (a) に示すとおり $m_r d = 0$ も明らかに上式の根である³⁾。

(1) 弾性振動 (表-1 (b); $m_r > 0$) 図-1 (2) 及び (3) に対する固有周期 T_E 及び T_K は容易に次式でかける⁴⁾。

$$T_E = 2\pi \frac{d^2}{m_r^2} \sqrt{\frac{wa}{gEI}}, \quad T_K = 2\pi d^2 \sqrt{\frac{wa}{g(EIm_r^4 + bKd^4)}} \dots\dots (1)$$

$K > 0$ であるから明らかに $T_E > T_K$ である。

(2) 動揺振動 (表-1 (a); $m_r = 0$) 図-1 (2) の $K=0$, 図-1 (3) の $K=\text{const.}$ に対して固有周期 T_R は上式で $m_r = m_0 = 0$ とおいて,

$$\left. \begin{aligned} K=0 : T_R &= \infty, \\ K=\text{const.} : T_R &= 2\pi \sqrt{\frac{wa}{gbK}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

で示される。いずれの T_R に対しても正規関数は $u_0 = B_3 x + B_4$ の形となる⁵⁾。すなわち図-1 (2) に対しては静的な傾斜 $B_3 x$ ないし一様な変位 B_4 が生ずるのみで振動は起らず, 図-1 (3) に対しては傾斜 $B_3 x$ ないし一様な変位 B_4 の振動曲線で周期 T_R の振動, したがって回転振動ないし移動振動が起ることになる。これが動揺振動にはかならない。結局動揺振動は自由-自由棒が弾性支床の上に置かれて初めて物理的な意義をもつものと考えられる。なお図-1 (1) AB のように $K(x) = K_A(d-x)/d$ のときは著者がすでに導いた式から容易に次式となる⁶⁾。

図-1

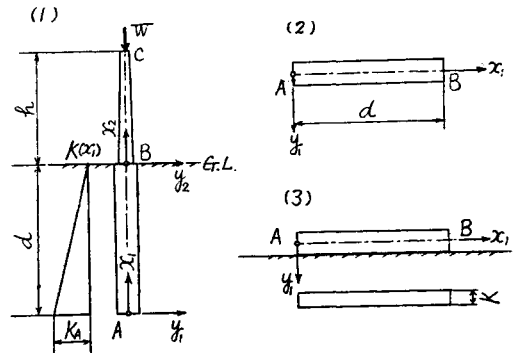


表-1

	(a)				(b)		
	0	1	2	3			
次数	(0次)	1次	2次	3次			
$m_r d$	0	4.73004	7.58320	10.9956			
区別	(動揺振動)	弾性振動					

* 京都大学助教授, 工学部土木工学教室

$$T_R = 2\pi\sqrt{\frac{14}{3} \frac{wa}{gbK_A}} = 2.16 \times 2\pi\sqrt{\frac{wa}{gbK_A}} \dots\dots\dots(3)$$

T_R と T_K とを比較すると容易に $T_R > T_K$ である。

(3) 弾性動揺振動の再確認 著者はすでに橋脚井筒は上記(1), (2)の中間状態すなわち弾性動揺振動を行うものとして計算してきたが、ここに実例についてその妥当性を再確認しよう。表-2 に示す一例で九頭龍橋脚 No. 3 の実験周期 $T' = 0.20$ sec (起振器で加振) を説明するような基礎地盤無視の $K_A = \infty$, $K_A = 0$ に対する T_E , T_R 及び $T_K < T_E$ は存在しない。次に K_A を考慮する場合は当然 図-1 (1) で明らかとなり AB+BC を対象としなければならない。こうして表-2 最下欄の $T_{E \cdot R}$ は弾性動揺振動と考えた著者の式⁷⁾で計算した値であるが、 T' と合致する $T_{E \cdot R} = 0.20$ sec に対する $K_A = 12$ kg/cm³ は本橋脚のみならず、他の数個の実例からみても合理的な値である*。すなわち表-2 の結果から $T_{E \cdot R}$ のみが実験周期 T' を説明しうることが再確認できたわけである。なお固有周期のみならず振動曲線形状も弾性動揺振動形を示すことは本文 5.(4) [図-3 (1)] で述べる。結局弾性動揺振動とは図-1 (1) の AB が曲げ剛性 EI を有し、これが $K(x_i)$ 作用をうけて $m_r d$ が表-1 の 0 次と 1 次との中間値をとり、これに BC の片持バリ作用ないしは AB に対する載荷重作用が関連して生ずる現象であるといえると思う。

表-2 実験周期 T' と計算周期 T
(丸頭龍橋脚 No. 3)

	記号	周期(sec)	備考
実験周期(共振)	T'	0.20	共振曲線より
BC, 固定-自由 ($K_A = \infty$)	T_{E1}	0.049	弾性・1次
ABC, 自由-自由 ($K_A = 0$)	T_{E1}	0.031	弾性・1次
	T_R	∞	(動揺振動)
AB, 自由-自由 ($K_A = 12$ kg/cm ³)	$T_{R(3)}$	0.102	動揺振動
ABC, 自由-自由 (")	$T_{E \cdot R}$	0.20	弾性動揺振動

2. 基礎方程式, 振動数方程式及び正規函数

図-1 (1) に対する振動の基礎方程式は学会誌 39-7, 式 (1)⁸⁾** で $K(x_i)$ の分布指数を $n=1$ とおいて、

$$\left. \begin{aligned} E_1 I_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} + b_1 K_A \left(1 - \frac{x_1}{d}\right) y_1 + \frac{w_1 a_1}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0, \\ E_2 I_2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^4} + \frac{w_2 a_2}{g} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

で与えられる。式(4)を変数分離して境界条件によつて積分常数を消去すると、振動数方程式として学会誌 39-7 式(12)をうる。この式(12)を満足する n_r が振動数である(式(12)では n の添字 r を省略している)。次に井筒 AB, 橋脚 BC に対する正規函数 $u_{1,r}, u_{2,r}$ は式(10), (11)の積分常数 $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4$ 相互間の比を境界条件によつて決めて次式(5)でえられる。

$$\left. \begin{aligned} u_{1,r} &= A_r [\{ (a_2 + \beta a_3) \cosh m_2 h - (a_2' + \beta a_3') \cos m_2 h - (b_2 + \beta b_3) \sinh m_2 h \\ &\quad + (b_2' + \beta b_3') \sin m_2 h \} f_1(\xi, n_r) - (a_1 \cosh m_2 h - a_1' \cos m_2 h - b_1 \sinh m_2 h \\ &\quad + b_1' \sin m_2 h) \{ f_2(\xi, n_r) + \beta f_3(\xi, n_r) \}], \\ u_{2,r} &= B_r [- \{ (a_2 + \beta a_3) \cosh m_2 h - (a_2' + \beta a_3') \cos m_2 h - (b_2 + \beta b_3) \sinh m_2 h \\ &\quad + (b_2' + \beta b_3') \sin m_2 h \} (a_1 \cosh m_2 x_2 + a_1' \cos m_2 x_2 - b_1 \sinh m_2 x_2 - b_1' \sin m_2 x_2) \\ &\quad + (a_1 \cosh m_2 h - a_1' \cos m_2 h - b_1 \sinh m_2 h + b_1' \sin m_2 h) \\ &\quad \times \{ (a_2 + \beta a_3) \cosh m_2 x_2 + (a_2' + \beta a_3') \cos m_2 x_2 - (b_2 + \beta b_3) \sinh m_2 x_2 \\ &\quad - (b_2' + \beta b_3') \sin m_2 x_2 \}]. \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

ここに $A_r = A_{2,r} / \Sigma_{1,r}$, $B_r = A_{2,r} / 2 \Sigma_{1,r}$, $A_{2,r}$: 任意常数, $\Sigma_{1,r} = a_1 \cosh m_2 h - a_1' \cos m_2 h - b_1 \sinh m_2 h + b_1' \sin m_2 h$, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, a_1', a_2', a_3', b_1', b_2', b_3', \beta, m_2$: 式(12), $f_1(\xi, n_r), f_2(\xi, n_r), f_3(\xi, n_r)$: 式(10), $n_r = f(r)$, ξ : 式(3)下参照, なお学会誌 39-7: $f(\xi, r)$ = 本文; $f(\xi, n_r)$ 。

上式(5)で、

$$\begin{aligned} (a_2 + \beta a_3) \cosh m_2 h - (a_2' + \beta a_3') \cos m_2 h - (b_2 + \beta b_3) \sinh m_2 h + (b_2' + \beta b_3') \sin m_2 h &= \Sigma_{3,r}, \\ a_1 \cosh m_2 x_2 + a_1' \cos m_2 x_2 - b_1 \sinh m_2 x_2 - b_1' \sin m_2 x_2 &= g_{1,r}(x_2, n_r), \\ (a_2 + \beta a_3) \cosh m_2 x_2 + (a_2' + \beta a_3') \cos m_2 x_2 - (b_2 + \beta b_3) \sinh m_2 x_2 - (b_2' + \beta b_3') \sin m_2 x_2 &= g_{2,r}(x_2, n_r) \end{aligned}$$

とおく(ただし式(5)では a, b, m_2, f 等に対する振動次数を表わす添字 r は簡単のため省略してある, なお振動数 n_r は式(12)より m_2 の中に含まれている)。しかれば $u_{1,r}, u_{2,r}$ は

* 本文表-3の説明: 5.(2)及び5.(8)2)参照。
** 本文の式番号と区別するため著者の別文にはすべて —— をつけて区別する。

$$\begin{aligned}
 u_{1,r} &= \frac{A_{2,r}}{\Sigma_{1,r}} [\Sigma_{1,r} \{f_{2,r}(\xi, n_r) + \beta f_{3,r}(\xi, n_r)\} - \Sigma_{3,r} f_{1,r}(\xi, n_r)], \\
 u_{2,r} &= \frac{A_{2,r}}{2 \Sigma_{1,r}} [\Sigma_{1,r} g_{2,r}(x_2, n_r) - \Sigma_{3,r} g_{1,r}(x_2, n_r)]
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

とかける。これから曲げモーメント分布 $-EId^2u/dx^2$ 、剪断力分布 $-EId^3u/dx^3$ は次式で計算される。

$$\begin{aligned}
 -E_1 I_1 \frac{d^2 u_{1,r}}{dx_1^2} &= -E_1 I_1 m_1^2 \frac{d^2 u_{1,r}}{d\xi^2} = -E_1 I_1 m_1^2 \frac{A_{2,r}}{\Sigma_{1,r}} [\Sigma_{1,r} \{f_{2,r}''(\xi, n_r) \\
 &\quad + \beta f_{3,r}''(\xi, n_r)\} - \Sigma_{3,r} f_{1,r}''(\xi, n_r)],
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 -E_2 I_2 \frac{d^2 u_{2,r}}{dx_2^2} &= -E_2 I_2 m_2^2 \frac{A_{2,r}}{2 \Sigma_{1,r}} \{\Sigma_{1,r} g_{2,r}''(x_2, n_r) - \Sigma_{3,r} g_{1,r}''(x_2, n_r)\} \\
 -E_1 I_1 \frac{d^3 u_{1,r}}{dx_1^3} &= E_1 I_1 m_1^3 \frac{d^3 u_{1,r}}{d\xi^3} = E_1 I_1 m_1^3 \frac{A_{2,r}}{\Sigma_{1,r}} [\Sigma_{1,r} \{f_{2,r}'''(\xi, n_r) \\
 &\quad + \beta f_{3,r}'''(\xi, n_r)\} - \Sigma_{3,r} f_{1,r}'''(\xi, n_r)], \\
 -E_2 I_2 \frac{d^3 u_{2,r}}{dx_2^3} &= -E_2 I_2 m_2^3 \frac{A_{2,r}}{2 \Sigma_{1,r}} \{\Sigma_{1,r} g_{2,r}'''(x_2, n_r) - \Sigma_{3,r} g_{1,r}'''(x_2, n_r)\}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

式(7)、(8)において、

$$m_1 = \sqrt[5]{\frac{b_1 K_A}{E_1 I_1 d}} : \text{式(3)下}, \quad f'' = \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad f''' = \frac{d^3 f}{d\xi^3}, \quad g'' = \frac{d^2 g}{dx_2^2}, \quad g''' = \frac{d^3 g}{dx_2^3}.$$

であり、 f'' 、 f''' は式(10)の f を ξ で、 g'' 、 g''' は式(5)下の g を x_2 で、それぞれ2、3回微分した値である。こうして式(6)で正規函数、式(7)、式(8)で曲げモーメント及び剪断力の分布が計算できる(計算結果: 図-3)。

3. 地震動による強制振動

耐震計算に採用すべき地震動についてはなお検討の余地があるようであるがここでは主要動部分を対象として工学的に正弦波とみなす⁹⁾。しからば著者がすでに取扱った論文集-6¹⁰⁾ 式(20)のように地震動は $e(t) = \Sigma_i e_i \sin(p_i t + \phi_i)$ と表わされる。さて図-1(1)を参照して論文集-6 式(1)と同様に位置のエネルギー V 及び運動のエネルギー T は次のようにかける。ただし減衰係数 ϵ は実験的に決めることにして散逸函数 F の表示は一応省略しておく。

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{E_1 I_1}{2} \int_0^d \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 + \frac{b_1 K_A}{2} \int_0^d \left(1 - \frac{x_1}{d} \right) y_1^2 dx_1 \\
 &\quad + \frac{K_A'}{2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=0}^2 \int_{-c_1/2}^{c_1/2} b_1(\eta_1') \eta_1'^2 d\eta_1' + \frac{E_2 I_2}{2} \int_0^h \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2, \\
 T &= \frac{w_1 a_1}{2g} \int_0^d \left(\frac{\partial y_1}{\partial t} \right)^2 dx_1 + \frac{w_2 a_2}{2g} \int_0^h \left(\frac{\partial y_2}{\partial t} \right)^2 dx_2 + \frac{W}{2g} \left(\frac{\partial y_2}{\partial t} \right)_{x_2=h}^2
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

V の第2項は水平反力 p による項、第3項は底面反力による項で学会誌 39-7 図-2(b)より K_A' は井筒底面上下方向の地盤係数値である。次に y_1 、 y_2 を正規函数 u 、時間函数 q によつて次式で表わす。

$$y_1 = \sum_{r=1}^{\infty} u_{1,r} q_r, \quad y_2 = \sum_{r=1}^{\infty} u_{2,r} q_r \tag{10}$$

式(10)を式(9)に代入すると、この場合直交関係が次の形で成立する。

$$\begin{aligned}
 q_r q_s \left\{ E_1 I_1 \int_0^d \left(\frac{d^2 u_{1,r}}{dx_1^2} \right) \left(\frac{d^2 u_{1,s}}{dx_1^2} \right) dx_1 + b_1 K_A \int_0^d \left(1 - \frac{x_1}{d} \right) u_{1,r} u_{1,s} dx_1 \right. \\
 + \frac{K_A'}{2} \left(\frac{du_{1,r}}{dx_1} \right)_{x_1=0} \left(\frac{du_{1,s}}{dx_1} \right)_{x_1=0} \int_{-c_1/2}^{c_1/2} b_1(\eta_1') \eta_1'^2 d\eta_1' \\
 + E_2 I_2 \int_0^h \left(\frac{d^2 u_{2,r}}{dx_2^2} \right) \left(\frac{d^2 u_{2,s}}{dx_2^2} \right) dx_2 \Big\} = 0, \\
 q_r q_s \left(\frac{n_r^2 - n_s^2}{g} \right) \left\{ w_1 a_1 \int_0^d u_{1,r} u_{1,s} dx_1 + w_2 a_2 \int_0^h u_{2,r} u_{2,s} dx_2 + W(u_{2,r} u_{2,s})_{x_2=h} \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

式(11)より式(9)及び式(10)の $q_r q_s$ の項はすべて消失する。次に原式(4)を変数分離した形に積分記号をつけると、

$$E_1 I_1 \int_0^d \frac{d^4 u_{1,r}}{dx_1^4} u_{1,r} dx_1 = \frac{w_1 a_1}{g} n_r^2 \int_0^d u_{1,r}^2 dx_1 - b_1 K_A \int_0^d \left(1 - \frac{x_1}{d} \right) u_{1,r}^2 dx_1,$$

$$E_2 I_2 \int_0^h \frac{d^4 u_{2,r}}{dx_2^4} u_{2,r} dx_2 = \frac{w_2 a_2}{g} n_r^2 \int_0^h u_{2,r}^2 dx_2$$

をうる。上式左辺に部分積分を施して辺々相加えた結果と式 (11) 及び式 (10) を式 (9) に入れた結果とを整理すると結局次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} q_r^2 n_r^2 \phi_r, & T &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \dot{q}_r^2 \phi_r \\ \text{ここに} & \phi_r &= \frac{w_1 a_1}{g} \int_0^a u_{1,r}^2 dx_1 + \frac{w_2 a_2}{g} \int_0^h u_{2,r}^2 dx_2 + \frac{W}{g} (u_{2,r}^2)_{x_2=h} \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

なお減衰項を簡単に速度比例摩擦のみと考えると、散逸函数 F は次式で表わされる。

$$F = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \dot{q}_r^2 \varepsilon \phi_r, \quad \varepsilon : \text{減衰係数}^{(11)} \dots (12)$$

地震動 $e(t)$ に対する一般力は論文集-6 式 (21) と同様に、

$$\begin{aligned} Q_r &= \{w_1 a_1 \int_0^a u_{1,r} dx_1 + w_2 a_2 \int_0^h u_{2,r} dx_2 + W(u_{2,r})_{x_2=h}\} \sum_i k_i \sin(p_i t + \phi_i) \\ &\equiv \delta_r \sum_i k_i \sin(p_i t + \phi_i), \quad \text{ただし } \delta_r = \{ \} \text{ 内} \dots (13) \end{aligned}$$

これから論文集-6 式 (22)~式 (25) と同様の計算を行うと次の強制振動の一般解をうる (ただし $j=1$ は井筒 AB, $j=2$ は橋脚 BC を表わすものとする)。

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_i u_{jr} e^{-\varepsilon t} (c_r \cos \sigma_r t + c_r' \sin \sigma_r t) \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_i u_{jr} \frac{\delta_r}{\phi_r} \frac{k_i}{\sqrt{(n_r^2 - p_i^2)^2 + 4 p_i^2 \varepsilon^2}} \sin(p_i t + \phi_i - \tan^{-1} \frac{2 p_i \varepsilon}{n_r^2 - p_i^2}) \\ &- \sum_{r=1}^{\infty} \sum_i u_{jr} e^{-\varepsilon t} \frac{\delta_r}{\phi_r} \frac{k_i}{(n_r^2 - p_i^2)^2 + 4 p_i^2 \varepsilon^2} (B_{ri} \cos \sigma_r t + B_{ri}' \sin \sigma_r t) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

ここに、

$$\begin{aligned} B_{ri} &= (n_r^2 - p_i^2) \sin \phi_i - 2 p_i \varepsilon \cos \phi_i, & \sigma_r &= \sqrt{n_r^2 - \varepsilon^2}, \\ B_{ri}' &= \frac{1}{\sigma_r} \{ (n_r^2 + p_i^2) \varepsilon \sin \phi_i + (n_r^2 - p_i^2 - 2 \varepsilon^2) p_i \cos \phi_i \}, & k_i &: \text{震度} \end{aligned}$$

式 (14) の第 1 項は初期条件による自由振動, 第 2 項は地震動による強制振動, 第 3 項は地震動による自由振動を表わしている。しかし地震動は完全な定常波でないから式 (14) の過渡状態が問題となる。式 (14) は振動変位であるが、振動曲げモーメント及び剪断力は容易に

$$M = [\text{式 (14) で } u_{jr} \text{ の代りに式 (7) を代入}] \dots (15)$$

$$S = [\text{式 (14) で } u_{jr} \text{ の代りに式 (8) を代入}] \dots (16)$$

から計算できる。

4. 厳密な静力学的計算法

図-1 (1) の橋脚井筒に水平震度 k_i の地震が作用する場合の静力学的な問題は図-2 で表わされる。この場合は強制振動の強制項式 (14) 第 2 項で $p_i \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, \sin(\) = 1$ とおいて y_s が求まりこれより容易に M_s, S_s が次式で求まる。

$$\left. \begin{aligned} y_{sj} &= \eta_j = \sum_{r=1}^{\infty} u_{jr} \frac{\delta_r}{\phi_r} \frac{k_i}{n_r^2}, & M_{sj} &= -E_j I_j \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d^2 u_{jr}}{dx_j^2} \frac{\delta_r}{\phi_r} \frac{k_i}{n_r^2}, \\ S_{sj} &= -E_j I_j \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d^3 u_{jr}}{dx_j^3} \frac{\delta_r}{\phi_r} \frac{k_i}{n_r^2}, & j &= 1: \text{AB}, j = 2: \text{BC} \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

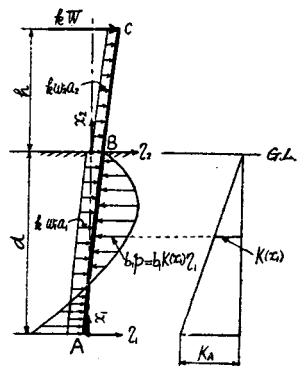
式 (17) は一見簡単にみえるが数値計算に当つては、 u_{jr} : 式 (5), δ_r : 式 (13), ϕ_r : 式 (12), n_r : 学会誌 39-7 式 (12) に示す各式を計算しなければならずかなり煩雑である。

次に図-2 から直接 η_j を計算してみる。まず基礎式は動的な原式 (4) の慣性力の代りに震度×自重を外力にとればよいのでただちに次式で表わされる。

$$E_1 I_1 \frac{d^4 \eta_1}{dx_1^4} + b_1 K_A \left(1 - \frac{x_1}{d}\right) \eta_1 = k_i w_1 a_1, \quad E_2 I_2 \frac{d^4 \eta_2}{dx_2^4} = k_i w_2 a_2 \dots (18)$$

式 (18) の第一式に学会誌 38-4⁽¹²⁾ 式 (3) の変換を行つて次式をうる。

図-2



$$\frac{d^4 \eta_1}{d\xi^4} + \xi \eta_1 = k_i r_s, \quad \text{ここに } r_s = \frac{w_1 a_1}{E_1 I_1 m^4} \dots \dots \dots (19)$$

式(18)₂, 式(19)の同次式の一般解はすでに学会誌 38-4 式(6), 式(7)に示している。非同次式の特解 $\eta_{1,p}, \eta_{2,p}$ は次のように算出される。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{1,p} &= k_i r_s f_p(\xi), \\ f_p(\xi) &= \left(\frac{1}{4!} \xi^4 - \frac{5}{9!} \xi^9 + \frac{10 \cdot 5}{14!} \xi^{14} - \frac{15 \cdot 10 \cdot 5}{19!} \xi^{19} + \dots \dots \dots \right) \\ \eta_{2,p} &= k_i \frac{w_2 a_2}{24 E_2 I_2} x_2^4 \end{aligned} \right\} \dots \dots (20)$$

したがって求める式(18), 式(19)の非同次式の一般解は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= k_i \{ A_1 f_1(\xi) + A_2 f_2(\xi) + A_3 f_3(\xi) + A_4 f_4(\xi) + r_s f_p(\xi) \}, \\ \eta_2 &= k_i \left\{ B_1 x_2^3 + B_2 x_2^2 + B_3 x_2 + B_4 + \frac{w_2 a_2}{24 E_2 I_2} x_2^4 \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (21)$$

ここに $f_1(\xi), \dots, f_4(\xi)$: 学会誌 38-4 式(6), $f_p(\xi)$: 式(20)

式(21)中に含まれる積分常数 A, B は学会誌 39-7 式(7), (9) 及び式(11)の下に示している境界, 接続の8条件式から次のとおり決定される(ただしここでは学会誌 38-4 式(3)の変換を行つているので $A_4 \neq 0, \beta = 0; A_3 \neq 0$),

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{J} [A_3 \{ (ef_2'' + k'f_2')f_3''' - (ef_3'' + k'f_3')f_2''' \} + A_4 \{ (ef_2'' + k'f_2')f_4''' \\ &\quad - (ef_4'' + k'f_4')f_2''' \} + r_s \{ (ef_2'' + k'f_2')f_p''' - (ef_p'' + k'f_p')f_2''' \}], \\ A_2 &= \frac{1}{J} [A_3 \{ (ef_3'' + k'f_3')f_1''' - (ef_1'' + k'f_1')f_3''' \} + A_4 \{ (ef_4'' + k'f_4')f_1''' \\ &\quad - (ef_1'' + k'f_1')f_4''' \} + r_s \{ (ef_p'' + k'f_p')f_1''' - (ef_1'' + k'f_1')f_p''' \}], \\ A_3 &= \frac{2W + w_2 a_2 h}{4 E_1 I_1 m^2} h, \quad A_4 = \frac{W + w_2 a_2 h}{6 E_1 I_1 m^3}, \quad B_1 = -\frac{W + w_2 a_2 h}{6 E_2 I_2}, \\ B_2 &= \frac{2W + w_2 a_2 h}{4 E_2 I_2} h, \quad B_3 = -m A_2, \quad B_4 = A_1, \end{aligned} \right\} \dots \dots (21)_1$$

ここに $A = (ef_1'' + k'f_1')f_2''' - (ef_2'' + k'f_2')f_1'''$, $e = E_1 I_1 m$, $m = \sqrt[5]{\frac{b_1 K_A}{E_1 I_1 d}}$,
 $k' = K_A' I(c_1)$: 学会誌 39-7 式(7), $f_1' = \left(\frac{df_1(\xi)}{d\xi} \right)_{\xi=0} = f_1'(md)$, $f_1(\xi)$: 学会誌 38-4 式(6),
 $f_1'' = f_1''(md)$, $f_2', f_2'', f_2''', f_3', f_3'', f_3''', f_4', f_4'', f_4'''$ 及び f_p', f_p'', f_p''' (f_p : 式(20))
 等も全く同様。

曲げモーメント M , 剪断力 S は式(21)から $-EI\eta'', -EI\eta'''$ として算出できることはいうまでもない。

5. 数値計算法及び計算例

以下計算例をあげて本文理論の計算法を述べる。

(1) 適用橋脚 従来から計算例とした九頭龍橋 No. 3 を採用する。トラス架設前を対象とし¹³⁾, かつ井筒底面反力を無視する¹⁴⁾。しからば $W=0, \beta=0$ とおける。

(2) 基礎係数値 K_A と減衰係数 ϵ の決定 本橋脚を含む数個の橋脚について起振器加振による共振周期実験値 T_r' から推定した K_A と地質, 根入長 d との関係はすでに著者が明示したが¹⁵⁾, さらに実験共振線から解析した対数減衰率 δ , 減衰係数 ϵ を加えて一括表示したのが表-3 である。同表から近似的に $K_A = 10 \text{ kg/cm}^3$ ¹⁶⁾, $\epsilon = 3.0 \text{ sec}^{-1}$ ¹⁶⁾ をとることにする。

表-3 橋脚の地質, 根入長 d と共振周期 T_r から推定した基礎係数値 K_A 及び共振線から決定した対数減衰率 δ , 減衰係数 ϵ

橋脚名	地質	根入長(dm)	$K_A(\text{kg/cm}^3)$	δ	$T_r(\text{sec})$	$\epsilon(\text{sec}^{-1})$
九頭龍 No.3	砂粘土	13.2	12	0.55	0.20	2.8
瀬田川 No.9	砂粘土	19.0	18	0.50	0.10	5.0
淀川パルル	砂粘土	4.8	10	0.52	0.14	3.7
虫町立岸側	砂砂利	7.0	14	1.10	0.10	11.0

参考 コンクリート $\delta = 0.05 \sim 0.10$

(3) 固有周期 T の算出 学会誌 39-7 式(12)で $W(n) = 0, \beta = 0$ とおき $F(n_r) = 0$ を試算法で厳密に計算した結果振動数 n_1, n_2, n_3 に対して 1, 2, 3 次固有周期 $T_1 = 0.2280, T_2 = 0.06390, T_3 = 0.03435 \text{ sec}$ をえた¹⁷⁾。

(4) 正規函数 u_r 及び $-E_1 I_1 u_r'', -E_1 I_1 u_r'''$ の計算 上記 5 (3) で算出した n_1, n_2, n_3 を用いて式(6),

(7), (8) から 1, 2, 3 次に対する $u_r, -E_j I_j u_r'', -E_j I_j u_r'''$ を算出した結果を図-3 に示す。同図横軸は分布形状を示す相対量であるので 1, 2, 3 次の大きさをこれから直接比較できないことはいうまでもない。

(5) 強制振動定常項最大値の計算 式(4)の第2項で $\sin(\dots) = 1$ とおき、各地震動周期 T_i に対し 3 次までとると、

$$\left. \begin{aligned} y_{f.\max} &= \sum_{r=1,2,3} u_{jr} \left[\frac{\delta_r}{\Phi_r} \frac{k_i}{\sqrt{(n_r^2 - p_i^2)^2 + 4 p_i^2 \varepsilon^2}} \right], \\ j &= 1, 2, \\ M_{f.\max} &= -E_j I_j \sum_{r=1,2,3} u_{jr}'' \left[\dots \right], \\ S_{f.\max} &= -E_j I_j \sum_{r=1,2,3} u_{jr}''' \left[\dots \right] \end{aligned} \right\} (22)^*$$

δ_r は式(13), Φ_r は式(12)に示した。 δ_r は式(6)すなわち学会誌 38-4 式(6)のベキ級数を項別積分すればよい。しかし Φ_r はこのベキ級数の自乗の積分で簡単には求まらない¹⁸⁾。そこでまず ABC を適当に分割して各分割点の u を計算しこれを折線で結ぶ。この折線を用いると学会誌 39-7 式(15)と同形となる。本計算では 8 分割したが¹⁹⁾, この近似計算法による誤差は 1 次に対して最大 3% 程度である²⁰⁾。こうした δ_r, Φ_r を用いて $T_i = 0.6, 0.2308 \text{ sec}$ (1 次共振) とに対する式(22)及び静計算式 ($T_i = \infty$) 式(17)を計算して一括図示したのが図-4 である。 $T_i = 0.6 \sim \infty \text{ sec}$ に対する式(22)はいずれも図-4 の ①② 両曲線間に存在する。次に式(22)と式(17)との比を定常振動倍率係数 $\bar{\alpha}$ (%) と呼ぶこととして T_i に対して示すと表-4 をうる。同表から定常振動最大値は 1 次共振点で静値の約 5 倍であることがわかる (ただし $\varepsilon = 3 \text{ sec}^{-1}$)。

図-3 正規函数 u_r 及び $E_j I_j u_r'', -E_j I_j u_r'''$ の計算結果 (九頭龍橋脚 No. 3)

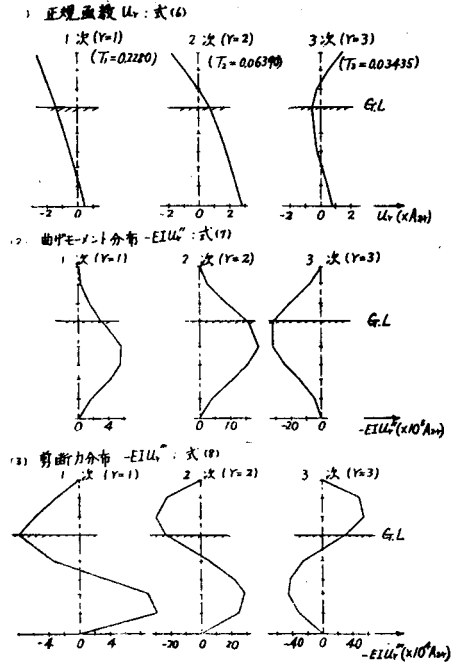


図-4 強制振動定常項最大値の計算結果

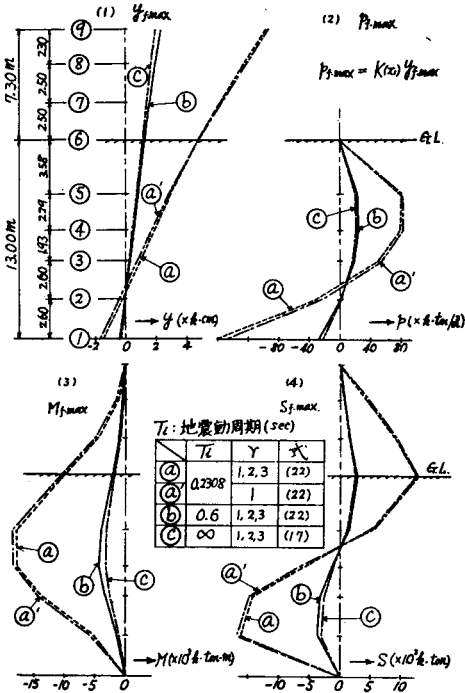


表-4 定常振動倍率係数 $\bar{\alpha}$ (%)

(震度 $k_F = \frac{e}{L} \frac{47}{2} \approx 20.4 \frac{e}{L}$, T_i : sec, e : cm)

地震周期 T_i (sec)	∞	3.0	1.0	0.6	0.2308	0.0640	0.0344
地震振幅 e (cm)	—	223.4	248.2	8.94	1.32	0.102	0.029
y -① $y_{f.\max}/y_s$	100	100.5	105.5	116.8	475.0	-48.8	10.0
M -⑤ $M_{f.\max}/M_s$	100	100.7	106.2	119.3	531.1	-363.5	112.3
S -② $S_{f.\max}/S_s$	100	100.7	106.1	118.4	511.9	-243.0	58.2

注: ①, ②, ③: 1次, 2次, 3次共振周期

表-5 高次振動の影響

($\bar{\alpha}$ に対する各次数百分率: %)

T _i (sec)	y-①			M-⑤			S-②		
	1次	2次	3次	1次	2次	3次	1次	2次	3次
∞	104.4	-4.0	0.4	119.7	-23.7	4.0	114.0	-16.1	2.1
3.0	103.7	-4.0	0.3	119.8	-23.5	3.7	114.2	-16.0	1.8
1.0	103.5	-3.8	0.3	118.7	-22.4	3.7	113.2	-15.3	2.1
0.6	103.1	-3.5	0.4	116.7	-20.1	3.4	111.9	-13.7	1.8
0.2308	100.8	-0.9	0.1	104.1	-4.8	0.7	102.9	-3.4	0.5

* 以後簡単のため添字 j を省略する ($j=1$: AB, $j=2$: BC)。

(6) 高次振動の影響 4次以上無視による式(17)の誤差は最大約1%であるので、これより式(22)は $r=1, 2, \dots, \infty$ に対して99%程度の高精度を有するものと思われる²¹⁾。そこで実質的に式(22)の $r=1, 2, 3$ に対する計算値の総和を100%として、これに対する1, 2, 3次の占める百分率を表-5に示した。次に式(22)で1, 2, 3次共振時のそれぞれ1, 2, 3次定常項最大値の長さ x 方向の最大値すなわち絶対最大値を各次数別に示したのが表-6である(9), (5), ……は図-4(1)参照)。これから1)表-6の2, 3次共振の0.064, 0.034 sec という短周期の波は地震動の主要動部にはほとんど存在せず、2)万一共振したと仮定しても2, 3次は表-6の値より減少して1次より相当小さくなる(本文参考文献欄11)記入の ϵ_2, ϵ_3 が影響)、3)しかも最も大きい1次共振では表-5のとおり、3次が省略でき、かつ2次の無視は安全側の値となる、以上1)2)3)を考慮すると結局高次振動は本問題の場合実質的に省略しても大過ないことになる。

表-6 強制振動定常項の各次数に対する絶対最大値

	1次	2次	3次
y (×k·cm) ④	9.245	① 1.927	④ 1.774
M (×10 ⁸ kg·cm) ⑤	18.371	⑤ 12.891	⑥ -3.972
S (×10 ⁸ kg·cm) ②	-33.268	⑦ 19.279	⑦ 6.968

(7) 過渡振動の計算 式(14)下記入の過渡振動を計算する。まず参考文献欄9)のとおり主要動部分を正弦波とみなし、一応単一な正弦波 $e_i \sin p_i t$ を対象とし²²⁾、かつ前項(6)から2次以上を無視して $r=1$ 、初期位相角を無視して $\phi=0$ とおく²³⁾。次に初期条件を便宜上 $t=0$ で $y=0, \dot{y}=0$ と考えると式(14)の第1項は消失する²⁴⁾。これらの各条件を式(14)に入れかつ式(22)を考慮すると過渡振動の解として次式(23)をうる。

$$y = y_{f1.\max} \left[\sin \left(p_i t - \tan^{-1} \frac{2 p_i \epsilon}{n_1^2 - p_i^2} \right) - \frac{p_i e^{-\epsilon t}}{\sqrt{(n_1^2 - p_i^2)^2 + 4 p_i^2 \epsilon^2}} \left\{ \frac{1}{\sigma_1} (n_1^2 - p_i^2 - 2 \epsilon^2) \sin \sigma_1 t - 2 \epsilon \cos \sigma_1 t \right\} \right] \equiv y_{f1.\max} B[t], \text{ここに } [] \text{内} = B[t] \dots\dots\dots (23)$$

同様にして、

$$M = M_{f1.\max} B[t], \quad S = S_{f1.\max} B[t] \dots\dots\dots (24)$$

ここに $y_{f1.\max}, M_{f1.\max}, S_{f1.\max}$ は式(22)で $r=1$ のみをとつた値である。いま一例として $T_i=0.2308, 0.6 \text{ sec}$ に対して式(23), (24)の $B[t]$ と時間 t との計算結果を示すと図-5となる。図-5で $B[t]$ の \max を順次 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ としかつ次式で表わされる α_n を動倍率係数と呼ぶことにする。

$$\alpha_{y.n} y_s = y_{\max} \cong B[t]_{\max} y_{f1.\max} = \beta_n y_{f1.\max} \dots\dots\dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{同様に } \alpha_{M.n} M_s &= \beta_n M_{f1.\max} \\ \alpha_{S.n} S_s &= \beta_n S_{f1.\max} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ただし y_s, M_s, S_s : 式(17)で j を省略。図-5から β_n を求め、式(25), (26)から α を計算して表示したのが表-7で

表-7 動倍率係数 α_n の計算値 : 式(25), (26)

(1) $T_i = 0.2308 \text{ sec}$: 図-5(1)

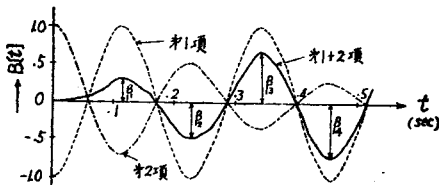
n	β_n	α_{yn}	α_{Mn}	α_{Sn}
		[y-④]	[M-⑤]	[S-②]
1	0.29	1.38	1.54	1.48
2	0.49	2.33	2.60	2.50
3	0.64	3.04	3.40	3.27
4	0.75	3.56	3.98	3.84

(2) $T_i = 0.60 \text{ sec}$: 図-5(2)

n	β_n	α_{yn}	α_{Mn}	α_{Sn}
		[y-④]	[M-⑤]	[S-②]
1	1.24	1.45	1.48	1.47
2	1.06	1.24	1.28	1.27

図-5 過渡振動の計算結果 $B[t]$: 式(23)

(1) $T_i = 0.2308 \text{ sec}$ (1次共振)



(2) $T_i = 0.60 \text{ sec}$

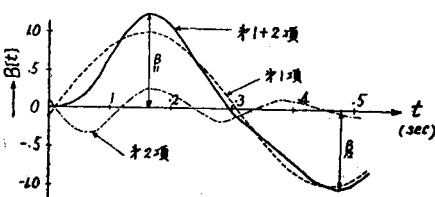


表-8 減衰係数 ϵ に対する α_{yn} の計算値

$T_i = 0.2308 \text{ sec}$ y-④

n	ϵ (sec ²)	1	3	5
		1	1.48	1.38
2	2.69	2.33	1.95	
3	3.86	3.05	2.35	
4	4.98	3.56	2.58	

あり、一方 ε と $\alpha_{y,n}$ との関係を表示したのが表-8 である。さらに設計地震動としては孤立正弦波が妥当であることが一般に認められているので²⁵⁾、 $n=1$ に対する β_1 、 α_1 が特に重要な意義をもつ。かくして表-7 の α_1 から同一震度 k に対しては動値は一応静値の 1.4~1.5 倍であり、表-8 から ε は α_1 に対して特に大きい影響は与えないようであることがわかる。

(8) 計算結果の考察 九頭龍橋脚を例にとつた (1)~(7) の数値計算結果からほぼ次のことがいえる。

- 1) 表-3 から砂、粘土地盤では $|K_A| \cong |d|$ 、 $\delta \cong 0.5$ 、砂、砂利地盤では $|K_A| \cong 2|d|$ 、 $\delta \cong 1.0$ である。
 - 2) 上記 1) の K_A を用い学会誌 39-7 特に式 (22)²⁶⁾ から T が計算でき、さらに $\varepsilon = \delta/T$ が算出される。
 - 3) 上記 1) の K_A を用いた表-2 の $T_{E,R}$ は $T_r' = 0.20 \text{ sec}$ と合致したが、さらに図-3 (1) の 3 次の u_3 ($T_3 = 0.0344 \text{ sec}$: 5 (3)) は表-1 の $r=1$ に対する u_1 ($T_{E1} = 0.0308 \text{ sec}$: 表-2) と近似し、しかも T も接近している。これから図-3 (1) の 1, 2 次は表-1* の (a) と (b) との間すなわち弾性動揺振動であることが確認できる。
 - 4) (6) による表-5 から完全に弾性振動とみなされる 3 次以上は無視してよく、動揺振動の傾向が非常に強い 1 次が支配的であつて、2 次が若干影響していることは上記 3) とあわせ考慮すると興味深い。しかし設計を対象とした実用計算としては 1 次のみを採用しても大過ないものと思ふ。
 - 5) (5) による図-4 から $T_i > T_1 = 0.2280 \text{ sec}$ となると y, p, M, S は静計算値に接近し、かつ 1 次も静計算値にほぼ相似である。表-4 より $T_1 = 0.2280 \text{ sec}$ に対して $T_i = 3.0 \text{ sec}$ となると静計算値とほとんど一致する。
 - 6) (7) より図-5 をえたが設計地震動に対しては本橋脚の場合表-7 より $\alpha \cong 1.5$ で動計算値は静計算値の約 1.5 倍となつたが、同一震度 k に対して共振点が必ずしも最大値を与えることは限らないことは注目される²⁷⁾。
- 以上は九頭龍橋脚を例にとつて収めた成果であるが、上記 1), 2) はそのまま他の橋脚に適用され、また 3), 4), 5), 6) は定量的な関係において他の一般橋脚と全く同様の傾向にあることはいうまでもない。

6. 実用的な動的計算法

(1) 計算方針 5. の数値計算を行うには非常に多くの労力を要するので、理論的には正しくはないが実用のため次の近似式を考える。

$$y_{f, \max} \cong y_{f1, \max} = k_i u_1 \frac{\delta_1(u_1)}{\Phi_1(u_1)} \frac{1}{\sqrt{(n^2 - p_i^2)^2 + 4 p_i^2 \varepsilon^2}}$$

$$\cong \eta \frac{\delta(\eta)}{\Phi(\eta)} \frac{1}{\sqrt{(n^2 - p_i^2)^2 + 4 p_i^2 \varepsilon^2}} \equiv r_i \eta \dots \dots \dots (27)$$

すなわち 5.(8) 4) から 1 次のみをとつて式 (27) 第 3 式をかき、さらに正規函数 u_1 の代りに図-2 の静変位曲線 $\eta = y_s$ 、 $\delta_1(u_1)$ 、 $\Phi_1(u_1)$ の代りに $\delta(\eta)$ 、 $\Phi(\eta)$ を用い²⁸⁾、かつ n_i の代りに η 曲線利用の近似値 n を用いる²⁹⁾。しからは動計算値 y_{\max} は式 (25) で $\beta_n = \beta_1$ をとり、かつ式 (27) の関係から次式をうる。

$$y_{\max} = \beta_1 y_{f1, \max} = \beta_1 r_i y_s = \alpha_1 y_s, \quad \text{ただし } y_s = \eta. \dots \dots \dots (28)$$

α_1 は表-7 に示した動倍率係数である。表-7 は 1 次振動による値であるが、式 (27) のように静変位曲線を用いるときは $\alpha_{yn} = \alpha_{Mn} = \alpha_{Sn} = \beta_n r_i$ となる³⁰⁾。これから M, S も全く同様にして次式となる。

$$M_{\max} = \beta_1 r_i M_s = \alpha_1 M_s, \quad S_{\max} = \beta_1 r_i S_s = \alpha_1 S_s \dots \dots \dots (29)$$

(2) $\alpha_1 = \beta_1 r_i$ の算定法 表-7 は一例として $T_i = 0.2308, 0.6 \text{ sec}$ に対して 1 次振動式から算出した結果であるが、さらに 0.3~3.0 sec の地震波³¹⁾ に対して実用式 (27) から $\beta_1 r_i = \alpha_1$ を算出して採用すべき動値を決定したいと思ふ。この場合単に α_1 の最大値をとらず T_i に対する α_1 の頻度分布を求め、これから $T_i - \alpha_1$ 分布を解析して統計的に合理的な α_1 を決定する方法をとる。こうすることによつて表-7 の $\alpha \cong 1.5$ よりさらに小さい値すなわち一層静値に近い動値が決定できる見込みである。

7. 結 言

本文では橋脚井筒の振動性状から出発して耐震設計に必要な動計算値を静計算値に対する加算値として算出しようとして動倍率係数 α_1 で説明しようとした。この結果仮定にもとづく当然の帰結として動計算値はすべて震度に 1 次比例となつた。ところで設計震度はいうまでもなく地質とその地区の地震来歴、構造物の重要度とその許容震害の限界等から慎重に決定すべきことが要求される³²⁾。本文では耐震動計算法に関する基礎的な問題を取扱つたわけであるが、6 の実用計算法による α_1 の合理的な決定、本文計算法による基礎地盤の安定計算と橋脚井筒の強度と応力計算の実施、さらに現行の物部式に基づく慣用計算法による計算結果との比較、橋脚井筒長さ方向の震度分布の決定、等については計算を続行して改めて補足したいと思つている。終りに臨み終始御指導を頂いた京大教授小西博士に深謝する次第である。

参考文献その他

- 1) 後藤：橋脚井筒の耐震動的計算法，土木学会関西支部講演会で講演，昭.29.10.16。
- 2) 図-1 (1) では従来どおり $K(x_1) = K_A(d-x_1)/d$ ，図-1 (2) では簡単のため $K = \text{const}$ とした。
- 3) $m_r d = 0$ についてはティモシェンコ原著，工業振動学，p. 288，妹沢著，振動学，p. 82-83 にわづかに言及しているに過ぎない。
- 4) wa ：単位長さの重量， EI ：曲げ剛性， b ：奥行巾， T_K はたとえば 著者：土木学会論文集-6，昭.26.8.，p. 122，式 (5)₁ から容易に算出される。
- 5) 振動の基礎式 $EI \cdot \partial^4 y / \partial x^4 + wa/g \cdot \partial^2 y / \partial t^2 = 0$ ， $EI \cdot \partial^4 y / \partial x^4 + bKy + wa/g \cdot \partial^2 y / \partial t^2 = 0$ を変数分離して $m_r = 0$ とおくといずれも $d^4 u_0 / d^4 x = 0$ となる。この解 $u_0 = B_1 x^3 + B_2 x^2 + B_3 x + B_4$ に両端，自由-自由の条件を入れると $u_0 = B_3 x + B_4$ となる。 $K=0$ に対してはティモシェンコが言及している。上掲 3)，p. 288，L. 20 と一致，なお支持-自由棒では $u_0 = B_3 x$ のみ，支持-支持，固定-固定棒等では $u_0 = 0$ となつて振動は全く起らない。
- 6) 後藤：橋梁下部構造橋軸平行方向の固有周期算定について，土木学会誌 39-7，昭.29.7.，p. 17，式 (22) で $h=0$ ， $\delta=0$ ， $\beta=0$ ， $W=0$ ， $w_1 a_1 = wa$ ， $b_1 = b$ とおき，式 (22) の誤植訂正は本欄 26) 参照。
- 7) 上掲文献 6)，各解法による。ただし $T_{E.R} = 0.20 \text{ sec}$ ($K_A = 12 \text{ kg/cm}^2$ は概算値)。
- 8) 上掲文献 6) を簡単のため今後学会誌 39-7 とかきその式番号，図番号に — を付ける。
- 9) 専門書にあるとおり震源からの地震弾性波伝播の機構は地殻構造，地質等が関連して複雑である。しかも震害が初動の衝撃波によるか主要動によるか，さらに振動速度によるか加速度によるか，等は問題であるが，本文では静力学的計算と関連させるため主要動正弦波による加速度をとることにした。
- 10) 小西・後藤：橋梁橋脚の震害に関する動力学的考察，土木学会論文集，第6号，昭.26.8. p. 58-70，を簡単のため今後論文集-6 とかき式，図番号に — を付けて本文と区別する。
- 11) 減衰係数 ϵ に関しては 1) 振動数 n_r に無関係，2) $\epsilon_r \propto n_r$ ，3) $\epsilon_r \propto n_r^2$ ，等が考えられているが，本文の場合は表-3 (5) (2) からわかるように地中への減衰が非常に大きくその係数を ϵ_e とすると， $\epsilon_e \gg \epsilon_r$ と考えられる (表-3 欄外のとおりコンクリートの 10 倍程度である)。したがつて上記 2)，3) を考えても $\epsilon_e > \epsilon_r$ ， $\epsilon_2 > \epsilon_1$ から $\epsilon_e + \epsilon_1 \cong \epsilon_e + \epsilon_2 \cong \epsilon_e + \epsilon_3 = \dots = \epsilon$ (一定) と考えて大差ないと思われる。なおこのようにすることは 2 次，3 次，……，振動の振巾を大きく算出する結果となる。
- 12) 後藤：橋梁下部構造の振動性状について，土木学会誌，38-4，p. 14-19 を上掲 8)，10) と同様に学会誌 38-4 とかき式，図番号に — を付ける。
- 13) 本文 1. (3) 表-2 の実験周期 0.20 sec は学会誌 38-4 図-3 の共振点からえたが，これはトラス架設前であるのでトラス重量 $W=0$ とおける。なお橋脚井筒の寸法は学会誌 38-4 5 (2) に示してある。
- 14) 井筒長 $d = 13 \text{ m}$ であるので学会誌 39-7 表-3 のとおり，たとえば $K_A = 10 \text{ kg/cm}^2$ に対して 周期比 = $0.228/0.217 = 105\%$ (学会誌 39-7 表-3 (b) の 0.221 は計算誤り)，すなわち本計算例では底面反力は固有周期を 5% 減少させる程度で， y ， M ， S に及ぼす影響も少ないと考えられるので簡単のため無視する。しからば学会誌 39-7 p. 14 式 (7)，(8) より $M_A = 0$ ， $K_A' = 0$ ， $\beta = 0$ となる。
- 15) 後藤：橋脚地盤の基礎係数値とその橋脚の振動性状に及ぼす影響について，土木学会誌 40-1，p. 12-22。
- 16) 厳密には $K_A = 12 \text{ kg/cm}^2$ であるが，学会誌 39-7 表-3 及び図表欄外記入の $K_A = 10 \text{ kg/cm}^2$ に対する計算過程を利用するためである。また表-3 より δ は砂，粘土地盤で 0.5，砂，砂利地盤で 1.0 程度である。本橋脚に対しては表-3 最上行記入のとおり $\epsilon = \delta/T_r' = 0.55/0.20 = 2.8 \cong 3(\text{sec}^{-1})$ をうる。 δ は松平著，基礎振動学，p. 60-61 による。
- 17) 学会誌 39-7 表-3 欄外に示した値をさらに厳密に算出したものである。
- 18) ϕ_r の計算には単区間 AB または BC に対する Rayleigh, Timoshenko 等の計算法を 2 区間 ABC に拡張すればよいが，著者はこれを忠実に試みたいところ複雑難解となつた。
- 19) 8 分割は図-4 (1) のとおりで著者従来の計算過程を利用する便宜上等分割としなかつた。
- 20) ϕ_r の厳密計算が困難であるので近似計算の精度が直に分らない。そこで同一資料にもとづく Rayleigh 法計算から推定する (学会誌 38-4 図-1 の η_1, η_2 を使用)。学会誌 38-4 式 (11)' の厳密値 $\phi = \mu_1 + \mu_2$ に対する 図-1 ABC 10 分割による近似計算値 ϕ' は 97.1% となつた。これよりおおむね本文 1 次の近似計算の誤差は約 3% 程度と推定される。しかも式 (17)，式 (22) からわかるように 1 次主要項のみに対して ϕ_1 は 1 次的比例関係にあるので計算誤差は比較的容易に推定できる。
- 21) $r = 1, 2, 3$ に対する式 (17) の y ， M ， S はベキ級数の項数を十分にとつた式 (21) の η 及び式 (21)₁ 下記入の M ， S のそれぞれ 99.8，98.5，99.3% である (ただし図-4 (1) ①~⑨の平均値)。
- 22) 主要動部分では振巾は一定でないが周期はほぼ一定とみなして大差ないようである。たとえば中央気象台，驗震時報，15-1，昭.25.9. (栃木県地震調査報告) 巻頭掲載の強震計による地震記録参照。
- 23) ϕ は論文集-6 式 (20) 記入のとおり地震の波長及び震源からの距離で表わされるが，設計に当つてこれら

を仮定することは困難であるので省略しておく。

- 24) 本問題をたとえば初動衝撃のように静止している橋脚井筒に突然に $e_i \sin p_i t$ が作用すると考える場合は $t=0$ で $y=0$, $\dot{y}=-ep$ のように初速度を与えねばならないが、この場合の取扱いは改めて補遺する予定である。
- 25) 厳密には同一周期(同一振巾, 同一波形)の地震波は引続いて2個以上来ないとして取扱つてよいようである, たとえば上掲 22) の地震記録を参照。
- 26) 学会誌 39-7 式(22)には誤植がある。すなわち $\sqrt{\quad}$ 内第1行中央 β_j の次に $]$ を付け, 第2行中央 $2\beta^2$ の次に $]$ を付ける。
- 27) 表-7 (1), (2) は同一の k に対する結果でたとえば $k=1$ とすると表-4 の上欄から $T=0.2308 \text{ sec}$: $e=1.3 \text{ cm}$, $T=0.6 \text{ sec}$: $e=8.94 \text{ cm}$ である。次に同一の e に対しては $k(T=0.2308) : k(T=0.6) = 6.8 : 1$ となり, 共振時の方が 6.8 倍の力をうけてこの方が危険であることはいうまでもない。 $k=\text{const}$ に対する他の計算例は論文集-6 p. 67 図-8 参照。
- 28) η は本文 図-2, または学会誌 38-4 図-1, 学会誌 39-7 図-3 の η を用いる。これらの η は u_1 とほとんど相似でありかえつて Σu_r に近づく。次に $\delta(\eta)$, $\phi(\eta)$ は式 (13), (12) の δ_r , ϕ_r の u_r の代りに η を用いればよく, 特に学会誌 39-7 図-4 を用いると実用的である。
- 29) 学会誌 39-7 解法-2, 3, 4 で $T=2\pi/n$ が求まつている。
- 30) 式 (25), (26) による表-7 の計算では1次のみをとつているので $y_{f1.\max}$, $M_{f1.\max}$, $S_{f.\max}$ のそれぞれ $y_{f.\max}$, $M_{f.\max}$, $S_{f.\max}$ に対する比率が全く同一でないから, $\alpha y_n \neq \alpha_{Mn} \neq \alpha_{Sn}$ となる。ところが y_s , M_s , S_s はたとえ式 (17), (21) のように級数表示であつても充分の項数が容易にとれるので式 (27) の r_i , 図-5 の β が y , M , S に共通の同値となる。
- 31) 地震主要動部ではこれよりさらに長周期の波も多いが, これらの中で構造物に震害を与えるのは 0.3~3.0 sec の波であるといわれている (物部: 土木耐震学, p. 53 では大地震の周期は 0.6~2.0 sec 程度とかれている)。
- 32) 設計震度に関しては建築物を対象とした米国, サンフランシスコ委員会の規定, 日本建築学会の規定等が注目される (東大工学部建築学科, 武藤研究室, 研究報告, 昭.28, 耐震構造の前進, に紹介されている)。建築物と若干事情の異なる土木構造物に対しても地域別, 構造別の設計震度を決定すべきことが痛感される。
- 33) 付記: 図-5 の β_1 は主要動を単一正弦波とみなした結果であるので, 本文の計算結果はまは正弦波とみなした初動衝撃に適用できる。なお本文強制振動の解は Rayleigh 法による仮定の η を用いた論文集-6 をさらに正統的に厳密計算したことに相当する。

(昭.29.11.18)