III―36　橋脚の耐震構造に関する研究

北海道開発局札幌開発建設部　正員　猪瀬寧雄

1　緒言

煙突，橋脚のような塔状構造物の地震時における震動について物部博士[1]は地震時に地盤から負荷せられる強制力は地震動と同じ円振動数をもつ定常的週期力と見做し得ると仮定せられ，又末広博士[2]はこの強制力は定常的でないとして，前者に更に自由振動の項を附加せられ，共に曲げ振動の微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

但し　EI：塔の曲げ剛性，ρ：塔の密度，A：塔の断面積

を一端固定，他端自由の境界條件の下に解き，見事な成果を得て居られる事は御承知の通りである。しかし構造物の基礎が浅く，構造の簡単な場合にはかゝるものを固定端と見做す事は困難で，事実地震の痕跡を調べて見るとかゝる場合には弾性振動の他に剛体的動揺を伴っている事が明かに認められる。本文はかゝる主旨に基いて塔状構造物の振動特性を調べようとするもので地盤を一種の弾性床と見做して計算を行ったものである。

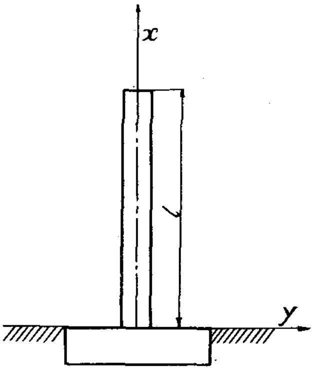
2. 動揺を伴う塔状構造物の振動に対する基礎方程式

圖―1(a)の如き塔状構造物に対し地盤が $e\,Sin\,pt$ だけ移動し塔が θ なる基礎の傾斜を伴って変位するものとすると，座標軸を圖の如くとり次の運動方程式を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

定断面の場合は当然

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \qquad (2)$$



圖―1 (a)

又圖―1(b)より

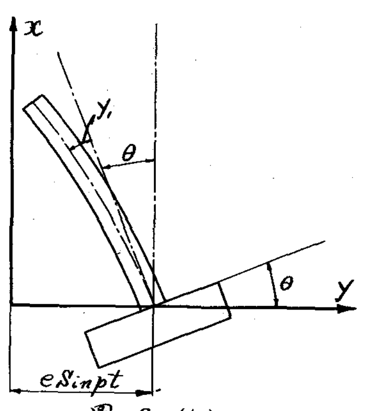
$$y=e\,Sin\,pt-\theta\cdot x-y_1 \qquad (3)$$

(3)を(1)及び(2)に代入して

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\right)+\rho A\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}=-\rho A\left(ep^2 Sin\,pt+x\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \qquad (4)$$

および定断面の場合には

$$EI\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}=-\rho A\left(ep^2 Sin\,pt+x\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \qquad (5)$$

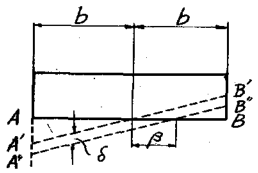


圖―2 (b)

次に圖―2(a),(b)より明らかなる如く，地盤係数(Bettungsziffer)を k とすると，地盤反力 R は

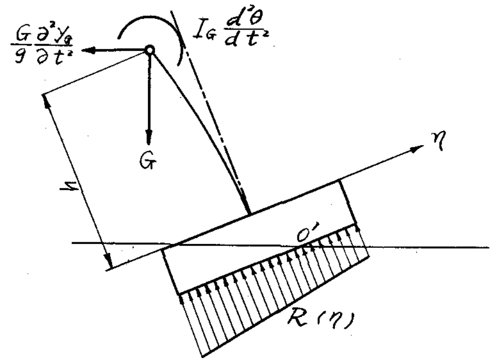
$$R(\eta)=G/2b+k\theta(\beta-\eta)a \qquad (6)$$

但し　G：塔の重量　，　$2b\times a$：塔の基礎の面積



δ：めりこみ量

圖－2 (a)



圖－2 (b)

今塔全体の重心の廻りの慣性能率をI_G，基礎基面より重心までの高さをhとして底面の中心O'の廻りの廻転に対する方程式を作ると

$$\left[\frac{Gh^2}{g}+I_G\right]\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{G}{g}\frac{\partial^2 y_G}{\partial t^2}h\cos\theta+Gh\sin\theta+\int_{-b}^{+b}R(\eta)\,\eta\,d\eta \qquad (7)$$

(7)に(3)及び(6)を入れ，θが小さく($\sin\theta\fallingdotseq\theta$となし得る範囲)且つ重心の位置が低い場合を考え，微小項を無視すると

$$\left[2\frac{Gh^2}{g}+I_G\right]\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(\frac{2}{3}ab^3k-Gh\right)\theta=-\frac{Gh}{g}ep^2\sin pt \qquad (8)$$

本式を解いて週期運動の生ずる場合を求めて見ると，その條件として

$$Gh<(2/3)kab^3 \qquad (9)$$

となり，そのときの解は

$$\theta=a_0\sin pt+a_1\sin\lambda t+a_2\cos\lambda t \qquad (10)$$

但し

$$a_0=\frac{\frac{Gh}{g}ep^2}{p^2\left(I_G+2\frac{Gh^2}{g}\right)+\left(Gh-\frac{2}{3}kab^3\right)},\qquad \lambda=\sqrt{\frac{\frac{2}{3}kab^3-Gh}{I_G+2\frac{Gh^2}{g}}}$$

a_1，a_2は初期條件 $t=0$；$\theta=0$ 及び $\frac{d\theta}{dt}=0$ より求められ，$a_2=0$，及 $a_1=-\frac{p}{\lambda}a_0$ を得る

(10)を(4)及び(5)に代入して整理すると，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\right)+\rho A\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}=-\rho A\left[p^2(e-a_0x)\sin pt+a_0p\lambda x\sin\lambda t\right] \qquad (11)$$

又定断面の場合には

$$EI\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}=-\rho A\left[p^2(e-a_0x)\sin pt+a_0p\lambda x\sin\lambda t\right] \qquad (12)$$

を得る。(11)及(12)が求める基礎方程式となる。

3. 定断面の場合の解

(12)式を基礎として先づ余函数を求めるため

$$y_1^h=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\,U_i(x)\sin\omega_i t \qquad (13)$$

と置くと $U_i(x)$ は

$$\frac{d^4 U_i}{dx^4} - \left(\frac{m_i}{l}\right)^4 U_i = 0$$ の解であるから次のようになる。

$$U_i(x) = (\sin m_i + \sinh m_i)\left(\cos\frac{m_i}{l}x - \cosh\frac{m_i}{l}x\right) - (\cos m_i + \cosh m_i)\left(\sin\frac{m_i}{l}x - \sinh\frac{m_i}{l}x\right) \tag{14}$$

但し m_i は $1 + \cos m_i \cosh m_i = 0$ の根で[3]

$$m_1 = 1.875 \ , \quad m_2 = 4.694 \ , \quad m_3 = 7.855 \ \ \cdots\cdots$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\left(\frac{m_i}{l}\right)^2$$

b_i ： 未定常数.

次に (12) の特解を求めるため

$$y_1^p = f_1(x)\sin pt + f_2(x)\sin\lambda t$$

とおき (12) に代入すると

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{d^4 f_1}{dx^4} - \rho A p^2 f_1 &= -\rho A p^2(e - a_0 x) \\ EI\frac{d^4 f_2}{dx^4} - \rho A \lambda^2 f_2 &= -\rho A a_0 p \lambda x \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

今 $\frac{\rho A p^2}{EI} = \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^4$, $\frac{\rho A \lambda^2}{EI} = \left(\frac{\mu_2}{l}\right)^4$ とおいて (15) を解き $f_1(x), f_2(x)$ を求めると.

$$f_1(x) = C_1\sinh\frac{\mu_1}{l}x + C_2\cosh\frac{\mu_1}{l}x + C_3\sin\frac{\mu_1}{l}x + C_4\cos\frac{\mu_1}{l}x + e - a_0 x$$

$$f_2(x) = C_1'\sinh\frac{\mu_2}{l}x + C_2'\cosh\frac{\mu_2}{l}x + C_3'\sin\frac{\mu_2}{l}x + C_4'\cos\frac{\mu_2}{l}x + a_0\frac{p}{\lambda}x$$

故に (12) の完全解は

$$y_1 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i U_i(x)\sin\omega_i t + f_1(x)\sin pt + f_2(x)\sin\lambda t \tag{16}$$

積分常数 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_1', C_2', C_3', C_4'$ を決めるため境界條件

$$\left.\begin{aligned} y_1^p = 0 \ , \quad \frac{\partial y_1^p}{\partial x} = 0 \quad & \cdots\cdots \quad x = 0 \\ \frac{\partial^2 y_1^p}{\partial x^2} = 0 \ , \quad \frac{\partial^3 y_1^p}{\partial x^3} = 0 \quad & \cdots\cdots \quad x = l \end{aligned}\right\}$$

を用いると次の8式を得る。

$$\left.\begin{aligned} & C_2 + C_4 = -e \\ & C_1 + C_3 = \frac{l}{\mu_1}a_0 \\ & C_1\sinh\mu_1 + C_2\cosh\mu_1 - C_3\sin\mu_1 - C_4\cos\mu_1 = 0 \\ & C_1\cosh\mu_1 + C_2\sinh\mu_1 - C_3\cos\mu_1 + C_4\sin\mu_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} & C_2' + C_4' = 0 \\ & C_1' + C_3' = -\frac{l}{\mu_2}\frac{p}{\lambda}a_0 \\ & C_1'\sinh\mu_2 + C_2'\cosh\mu_2 - C_3'\sin\mu_2 - C_4'\cos\mu_2 = 0 \\ & C_1'\cosh\mu_2 + C_2'\sinh\mu_2 - C_3'\cos\mu_2 + C_4'\sin\mu_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

次に b_i を決定するため初期條件

$t_1 = 0$ にて $y_1 = 0$, $\frac{\partial y_1}{\partial t} = 0$

を用いるに第一の條件は恒等的に満足し，第二の條件より

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i U_i(x)\, \omega_i = -p f_1(x) - \lambda f_2(x)$$

今 normal function の直交性を利用すると[4]

$$b_i = \frac{\int_0^l \left[p f_1(x) + \lambda f_2(x) \right] U_i(x)\, dx}{\omega_i \int_0^l U_i^2(x)\, dx} \tag{17}$$

本式を計算すると

$$b_i = -\frac{2pm_i^3}{m_i^4 - \mu_1^4} \cdot \frac{\left[\frac{a_0 l (\mu_1^4 - \mu_2^4)}{m_i^4 - \mu_2^4} \left(1 + \cos m_i \cosh m_i - \frac{\sin m_i + \sinh m_i}{m_i} \right) + e \left(\frac{\mu_1}{m_i} \right)^4 \left(\cos m_i + \cosh m_i - \cos m_i \cosh m_i - 1 \right) \right]}{\omega_i (\sin m_i \ \sinh m_i)^2}$$

を得，これで全部の未定常数を求め得た事になる。よって基礎が $e \sin pt$ なる週期的移動をする時の塔各部の変位 y は

$$y = \left[e - a_0 x - f_1(x) \right] \sin pt + \left[a_0 \frac{p}{\lambda} x - f_2(x) \right] \sin \lambda t - \sum_{i=1}^{\infty} b_i U_i(x) \sin \omega_i t \tag{18}$$

又各部の曲げモーメントは

$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = EI \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = EI \left[\frac{d^2 f_1}{dx^2} \sin pt + \frac{d^2 f_2}{dx^2} \sin \lambda t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{d^2 U_i}{dx^2} \sin \omega_i t \right] \tag{19}$$

4. 結語

紙数の関係で数値計算の結果を省略するが本計算によれば，当然ではあるが K，及び p の値で曲げ応力は種々変化し，

$$K = \frac{3}{2ab^3} \left\{ p^2 \left(I_G + 2\frac{Gh^2}{g} \right) + Gh \right\}$$

なる関係のある時は共振を生じ振巾は無限大となり，K と塔の諸元とがこの関係を遠ざかるに従って振巾は小となり従って塔は安定性を増す事になる。但し(7)から(8)に移行する際省略した項が事実上無視できない場合には本計算は当然再検討せられなければならない。

尚本文の数値計算その他細部の計算については次文を参照せられたい。

建設省土木研究所報告　第81号

猪瀬寧雄
高田孝信 } 橋脚の耐震性に関する研究(1)

参考文献

(1) 土木学会誌　1919　5月号

(2) 末広恭二論文集　p.236 ~ p.271

(3) 例えば Timoschenko; Vibration Problems in Engineering p.344.

(4) Lord Rayleigh ; Theory of Sound Vol. 1. p.262 ~ p.263