

# 圧縮性流体中の任意断面没水構造物に作用する地震時動水圧の解析

清川 哲志\*・稲田 裕\*\*

## 1. はじめに

近年、景観保護の観点から、従来の防波堤に替わって人工リーフ、潜堤等の没水構造物が計画・施工される機会が増えているように思われる。これに伴って反射・透過特性のような水理性能についてはほぼ明らかにされてきている。しかし、没水構造物に作用する地震時動水圧に関しては、僅かな研究例があるのみであり、しかもそれらは孤立大型海洋構造物を対象にしており(清川ら, 1982; 喜岡, 1981; Black, 1971), 上記の没水構造物とは形状的に異なっている。また、設置される水深が深くなる傾向にあるが、水深が増すと流体の圧縮性の影響で地震時動水圧が増加し、設計的にも無視できない大きさになる可能性がある。没水構造物に関しては、この点現在のところ全く検討されていない。そこで本研究では、流体の圧縮性の影響を考慮して任意断面の没水構造物に作用する地震時動水圧を評価できる理論を導く。そして、実際に考えられる断面形状を対象に数値計算を行い、没水構造物に作用する地震時流体力特性とそれに及ぼす圧縮性の影響を明らかにする。

## 2. 解析理論

### (1) 基礎方程式と境界条件

図-1 に示すように、水深が一定  $h$  の海域に任意断面を有する2次元構造物があり、これが角振動数  $\omega$  で水平振動する場合を考える。そして、流体は、非粘性の圧縮性流体、流体運動は非回転であると仮定し、流体運動を速度ポテンシャルにより記述する。速度ポテンシャルを  $\phi(x, z)e^{-i\omega t}$  ( $i$ : 虚数単位) とすると、その空間部分  $\phi(x, z)$  は次の境界値問題の解として求められる。

$$\begin{aligned}
 L[\phi] &= 0 & (\text{in } \Omega) & \dots\dots\dots (1) \\
 \phi &= 0 & (\text{on } S_F) & \dots\dots\dots (2) \\
 \partial\phi/\partial z &= 0 & (\text{on } S_B) & \dots\dots\dots (3) \\
 \partial\phi/\partial n &= v_n & (\text{on } S_H) & \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

ただし、 $L[ ]$  は2次元ヘルムホルツ演算子 ( $\equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2 + \omega^2/c^2$ ),  $c$ : 水中音速,  $v_n$ : 構造物の振動によ

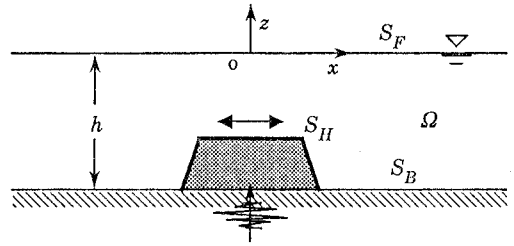


図-1 座標系と記号の定義

る構造物表面の運動速度振幅の法線方向成分。

式(1)は、流体領域  $\Omega$  で満足すべき圧縮性流体に関する基礎方程式である。式(2)は表面波の発生の影響が無視できるものと仮定した自由表面  $S_F$  における境界条件、式(3)は海底面  $S_B$  における不透過条件、式(4)は構造物表面  $S_H$  における流体と構造物表面の運動速度の連続条件で、 $\partial/\partial n$  は法線方向微分を表す。また、この他に発生する波には、無限遠方で Sommerfeld の放射条件が課せられる。

### (2) グリーン関数とその誘導

グリーン関数と拡張されたグリーンの定理を用いて  $\phi$  に関する積分方程式を導き、これを離散化して解く。

グリーン関数  $G(x, z; \xi, \zeta)$  は次の境界値問題を満足する関数として定義される。

$$\begin{aligned}
 L[G] &= -\delta(x-\xi)\delta(z-\zeta) & \dots\dots\dots (5) \\
 G &= 0 & (\text{on } S_F) & \dots\dots\dots (6) \\
 \partial G/\partial z &= 0 & (\text{on } S_B) & \dots\dots\dots (7)
 \end{aligned}$$

式(5)~(7)を満足するグリーン関数  $G$  を変数分離による固有関数展開の形で求める。変数分離したとき  $z$  に関係する部分を  $Z_n(z)$  とすると、境界条件(6)および(7)を満足する固有関数は次のようになる。

$$Z_n(z) = \sqrt{2/h} \sin k_n z \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $k_n$ : 固有値 ( $= (2n-1)\pi/2h, n=1, 2, \dots$ )。

式(8)は正規直交関数系であるから固有関数展開理論でよく知られているように次の関係が得られる。

$$\delta(z-\zeta) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n z \sin k_n \zeta \dots\dots\dots (9)$$

したがって、グリーン関数  $G(x, z; \xi, \zeta)$  を次のように

\* 正会員 工博 清水建設(株) 大崎研究室 応用工学グループ  
 \*\* 正会員 工修 清水建設(株) 大崎研究室 土木グループ

置くことができる。

$$G(x, z, \xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} g_x^{(n)}(x; \xi) Z_n(z) Z_n(\zeta) \quad \dots\dots (10)$$

これより、 $g_x^{(n)}(x; \xi)$  が満足すべき関係式

$$d^2 g_x^{(n)} / dx^2 + \{(\omega/c)^2 - k_n^2\} g_x^{(n)} = -\delta(x - \xi) \quad \dots\dots (11)$$

が得られる。ここで、 $\lambda_n^2 \equiv (\omega/c)^2 - k_n^2$  と置き、 $s$  を  $\lambda_n^2$  の右辺が正であるような  $n$  の最大値とすると、 $n \leq s$  に対して、式 (12) は次のように書くことができる。

$$d^2 g_x^{(n)} / dx^2 + \lambda_n^2 g_x^{(n)} = -\delta(x - \xi) \quad \dots\dots (12)$$

これを満足する解を求めることは、1次元ヘルムホルツ方程式の基本特異解を求めることに他ならない。この解は Sommerfeld の放射条件

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\partial G / \partial |x| - i \lambda_n G) = 0 \quad \dots\dots (13)$$

を満たす必要がある。式 (12)、式 (13) を満足する基本特異解は、よく知られているように次式で表される。

$$g_x^{(n)}(x; \xi) = (i/2\lambda_n) \exp\{i\lambda_n|x - \xi|\} \quad \dots\dots (14)$$

一方、 $n$  が  $s$  よりも大きい場合には  $\lambda_n = i\lambda'_n$  ( $\lambda_n^2 = k_n^2 - (\omega/c)^2$ ) と置くと、式 (11) は、

$$d^2 g_x^{(n)} / dx^2 - \lambda_n'^2 g_x^{(n)} = -\delta(x - \xi) \quad \dots\dots (15)$$

となり、この解は次式で表される。

$$g_x^{(n)}(x; \xi) = (1/2\lambda_n') \exp\{-\lambda_n'|x - \xi|\} \quad \dots\dots (16)$$

以上、求められた式 (8)、(14)、(16) を式 (10) に代入すると、次のようにグリーン関数が求められる。

$$G(x, z; \xi, \zeta) = \sum_{n=1}^s (i/\lambda_n h) \sin k_n z \sin k_n \zeta e^{i\lambda_n|x - \xi|} + \sum_{n=s+1}^{\infty} (1/\lambda_n' h) \sin k_n z \sin k_n \zeta e^{-\lambda_n'|x - \xi|} \quad \dots\dots (17)$$

式 (17) の第1項が圧縮性を考慮することにより付け加わる項で、有限個 ( $s$  個) の進行波成分から成っている。この進行波の発生は、 $k_n^2 - (\omega/c)^2 < 0$  となる整数が存在するかどうかにより決まる。 $k_n$  は水深と振動周期から決まる固有値なので、結局、進行波の発生は水深と振動周期の関係により決まり、水深が深く、周波数が高いほど多くの成分が発生する。

(3) 積分方程式の誘導と離散化

グリーンの定理を用いて簡単に確かめられるように、2階微分が可能な任意の関数  $u, v$  を用いて、次の拡張されたグリーンの定理が得られる。

$$\iint_D (vL[u] - uL[v]) d\sigma = - \int_S \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad \dots\dots (18)$$

ただし、 $n$  による微分は  $S$  上における外向き法線方向微分を表し、 $S$  上での線積分は反時計回りを正とする。

この拡張されたグリーンの定理で、 $u = \phi$  および  $v = G$  とし、図-1 の自由表面  $S_F$ 、海底面  $S_B$ 、構造物表面  $S_H$ 、および  $x = \pm\infty$  における仮想的な境界  $S^{\pm\infty}$  で

囲まれる閉領域  $\Omega$  を考え積分を実行すると、 $\phi$  に関する次のフレドホルム型積分方程式を得る。

$$\frac{1}{2} \phi(P) = \int_{S_H} \left\{ \phi(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} - G(P, Q) v_n(Q) \right\} ds \quad \dots\dots (19)$$

ここに、点  $P, Q$  はともに構造物表面上の点で、それぞれの座標は  $P = (\xi, \zeta)$ 、 $Q = (x, z)$  である。

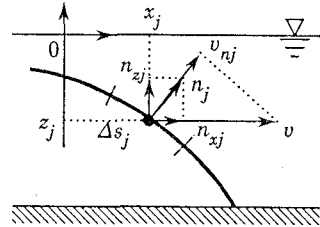


図-2 構造物表面上の法線ベクトルと速度成分

図-2 に示すように、構造物表面  $S_H$  を有限個  $N$  の線要素に分割し、その要素上のポテンシャル値およびグリーン関数値等をその中点の値で代表させる。そして、式 (19) における積分を和分で近似すると、任意の  $j$  番目の要素におけるポテンシャルの代表値  $\phi_j$  ( $j=1 \sim N$ ) に関する複素係数連立1次方程式 (20) が得られる。

$$[\bar{G}]\{\phi\} = -[G]\{v_n\} = -v[G]\{n_x\} \quad \dots\dots (20)$$

ここに、 $v$  は振動速度振幅、 $\{n_x\}$  は単位法線ベクトルの  $x$  成分からなるベクトルである。

行列の要素  $\bar{G}_{ij}$  および  $G_{ij}$  は次式で求められる。

$$\bar{G}_{ij} = \begin{cases} \partial G(P_i, P_j) / \partial n \cdot \Delta s_j & (i \neq j) \\ 1/2 - \partial G^*(P_i, P_i) / \partial n \cdot \Delta s_j & (i = j) \end{cases} \quad \dots\dots (21)$$

$$G_{ij} = \begin{cases} G(P_i, P_j) \Delta s_j & (i \neq j) \\ G^*(P_i, P_i) \Delta s_i & (i = j) \end{cases} \quad \dots\dots (22)$$

ここに、 $\Delta s_j$  は  $j$  番目要素の長さ、 $G^*$ 、 $\partial G^* / \partial n$  はそれぞれ特異点処理を行った後のグリーン関数およびその法線方向微分値である。ただし、特異点処理とは、 $i=j$  のとき要素積分内に現れる特異積分を厳密に行って関数の要素上での平均値を求めることである。

式 (20) を解けば、構造物表面上に分布させた未知ポテンシャル値  $\phi_j$  ( $j=1 \sim N$ ) が数値的に求められる。なお、式 (20) より、未知ポテンシャルの大きさは、振動速度振幅  $v$  に比例することがわかる。したがって、単位速度振幅の場合について解を求めておけば、任意の速度振幅に対する解が得られる。

(4) 級数の取束の処理について

級数型のグリーン関数の場合、2点間の水平距離が短くなると級数の取束が一般に遅くなる。特に、法線方向微分については、 $x \rightarrow \xi$  で指数関数の部分が  $e^0$  となると同時に、微分により級数の各項に  $k_n$  または  $\lambda_n$  等の  $n$  に関して1次の係数がかかるため取束が悪くなり、

計算に際して工夫が必要となる。

(a) 鉛直線上の要素

グリーン関数を求める2点  $P, Q$  が鉛直線上にあるとき ( $x=\xi$ )、指数関数の部分が1となり収束が悪い。このとき、法線方向の微分値は次のようになる。まず、グリーン関数  $G$  は、式 (17) に示されるように  $x=\xi$  に関して対称であるから  $\partial G/\partial x=0$ 、また、鉛直線上にある要素については、 $n_x=0$  となることから、

$$\partial G/\partial n = \partial G/\partial x \cdot n_x + \partial G/\partial z \cdot n_z = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

(b) 特異項における法線方向微分

圧縮性を考慮しない場合のグリーン関数  $G_0$  に対し、特異点処理を行った後の法線方向微分値を  $\partial G_0/\partial n$  とすると、 $n \rightarrow \infty$  では  $\partial G_0^*/\partial n$  と  $\partial G^*/\partial n$  の  $n$  次の項は等しくなる。したがって、 $\partial G^*/\partial n$  の収束も  $\partial G_0^*/\partial n$  と同程度と考えられる。一方、 $G_0^*$  については効率のよい計算方法が、Morse and Fechbach (1953) によって既に示されている。そこで、この結果を用いて  $\partial G^*/\partial n$  の収束を加速する計算法を考えることにする。

$\partial G_0^*/\partial n \cdot \Delta s_i$  において収束を遅くする原因となっている項を取り出し  $S = \sum g_0^{(n)}$  と置くとき、

$$g_0^{(n)} = (2/k_n h) \cos k_n z_i \sin k_n z_i \quad \dots\dots\dots (24)$$

と表される。この式に  $k_n = (2n-1)\pi/2h$  を代入して展開を行うと、

$$S = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi z_i}{h}$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi z_i}{h} - \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin \frac{2l\pi z_i}{h} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで、まず

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(np) = \text{Im} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(inp) \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

と、この級数部分を Morse らが用いた級数に関する一般的な展開

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(-np) = -\ln \{1 - \exp(-p)\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

を用い、その虚数部をとると次式が得られる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(np) = \tan^{-1} \left( \frac{\sin p}{1 - \cos p} \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

式 (28) を式 (25) に適用し、整理すると、

$$S = -1/2 \quad \dots\dots\dots (29)$$

と表される。そこで、 $g^{(n)}$  を  $\partial G^*/\partial n \cdot \Delta s_i$  の級数の  $n$  項目とすると次の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial G^*}{\partial n} \Delta s_j = \pm \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (g^{(n)} - g_0^{(n)}) \quad \dots\dots\dots (30)$$

ただし、複号は法線ベクトルの  $z$  成分が負のとき上、正のとき下をとる。式 (30) を用いれば特異項における法線微分項の計算を効率よく行うことができる。

(5) 動水圧と付加質量

ポテンシャルが求められると、線形化したベルヌイの

式から動水圧  $p$  が  $p = -\rho \partial(\phi e^{-i\omega t})/\partial t$  ( $\rho$ : 流体密度) によって計算できる。 $\phi_j$  を用いると  $j$  番目要素中点における動水圧は、次式で表される。

$$p_j(t) = i\rho\omega v \phi_j e^{-i\omega t} \quad (j=1 \sim N) \quad \dots\dots\dots (31)$$

構造物に受ける流体力は、動水圧による圧力の各方向成分を構造物まわりで積分することによって得られる。 $F$  を構造物に作用する流体力ベクトルとすると、

$$F(t) \simeq i\rho\omega v e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^N n_j \cdot \phi_j \cdot \Delta s_j \quad \dots\dots\dots (32)$$

ただし、 $n_j$  は  $j$  番目要素の中点における単位法線ベクトルで、 $n_j = t(n_{xj}, n_{yj})$  である。

式 (32) における  $-i\omega v e^{-i\omega t}$  は構造物の振動加速度であるから、流体力は振動加速度に比例することがわかる。この比例定数の絶対値によって次のように付加質量  $M$  が定義される。

$$M \simeq \rho \left| \sum_{j=1}^N n_j \cdot \phi_j \cdot \Delta s_j \right| \quad \dots\dots\dots (33)$$

また、付加質量係数  $C_x$  は、 $M$  と構造物が排除する流体の質量  $\rho V$  ( $V$ : 体積) の比として定義している。

3. 数値計算例とその考察

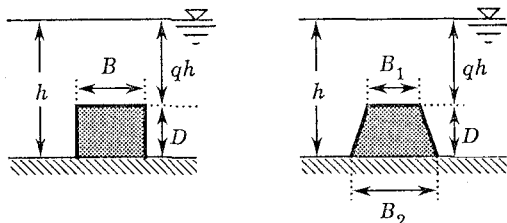
一般的な潜堤の形状として、図-3 に示すような矩形断面および台形断面構造物が考えられる。そこで、これらの構造物を対象として、数値計算を行う。

(1) 付加質量の基本特性

まず、構造物の基本的な付加質量特性、すなわち非圧縮性流体中における付加質量特性について述べる。これは、後に流体の圧縮性の影響を考慮する際の基準とするものであり、構造物の断面形状が付加質量特性に及ぼす影響を示している。

図-4 に矩形断面の付加質量特性について、水深に対する堤体幅の比  $B/h$  をパラメータとして与え、構造物の没水深比  $q$  に対する応答を示す。没水深比が大きくなるにつれて、基本付加質量係数  $C_x^*$  の値は減少している。その減少の割合は、 $B/h$  が小さいほど、つまり水深に対して構造物の幅が細い形状の場合の方が大きくなっている。

図-5 に台形断面の場合の基本特性を示す。これは



(a) 矩形断面 (b) 台形断面

図-3 断面形状とその記号の定義

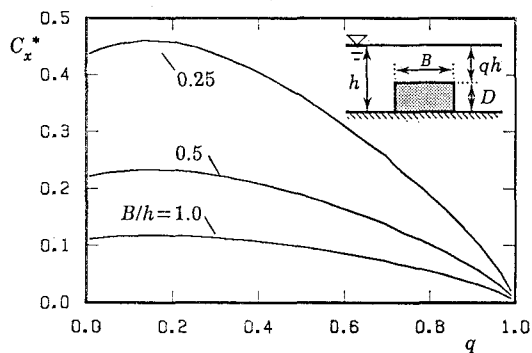


図-4 矩形断面の付加質量の基本特性

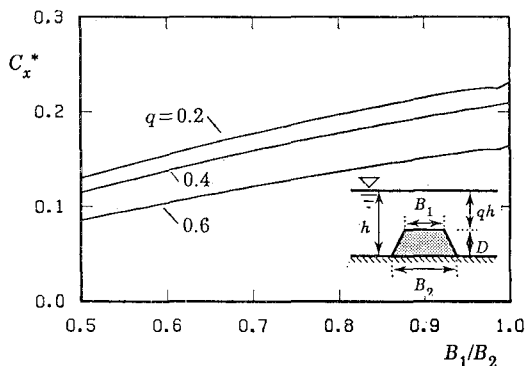


図-5 台形断面の付加質量の基本特性

$B_1/h=0.5$  とし、没水深比  $q$  をパラメータとして与えたときの  $B_1/B_2$  に対する付加質量特性を示している。 $B_1/B_2$  が大きくなるほど側壁は鉛直に近づき、 $B_1/B_2=1$  で構造物断面は矩形となる。側壁の傾きが鉛直に近づくほど付加質量係数の値は大きくなっているが、その増加の割合は没水深比が小さい場合の方がやや大きい。

(2) 流体の圧縮性の影響

図-6, 7 は流体の圧縮性の影響を無次元周期  $\sqrt{\kappa/\rho} \cdot T/h$  ( $\kappa$ : 体積弾性率) の関数として示したもので、縦軸は流体の圧縮性による付加質量係数の増加の割合を表している。ただし、 $C_x$  は流体の圧縮性を考慮した付加質量係数、 $C_x^*$  は基本付加質量係数である。

図-6 は矩形断面の場合について、 $B/h=0.5$  とし、没水深比  $q$  をパラメータとして与えたときの周波数応答を示す。各曲線は断面形状にかかわらず、無次元周期が約 4 の位置においてピークをとっている。このピーク的位置は、1 次のモードの進行波を発生させる水深と振動数の関数を満たす位置に当たっている。また、ピーク位置において付加質量の値が、非圧縮の場合と比較して約 2~5 倍程度の値となっている。この無次元周期は水深を 50 m とすると振動数 7.5 Hz に対応する。

図-7 は台形断面の結果であり、 $B_1/h=0.5$ 、 $q=0.5$  として、 $B_1/B_2$  をパラメータとして与えている。没水深

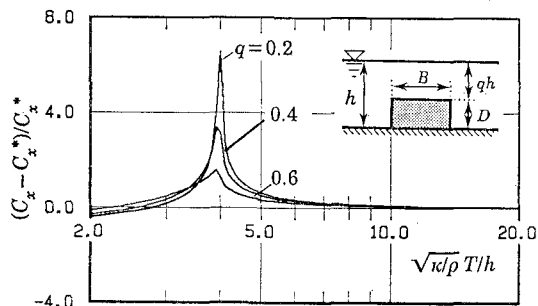


図-6 矩形断面の付加質量に及ぼす圧縮性の影響

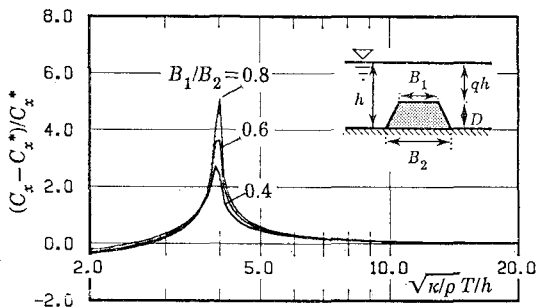


図-7 台形断面の付加質量に及ぼす圧縮性の影響

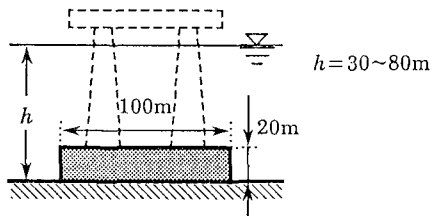


図-8 地震応答解析に用いたモデル

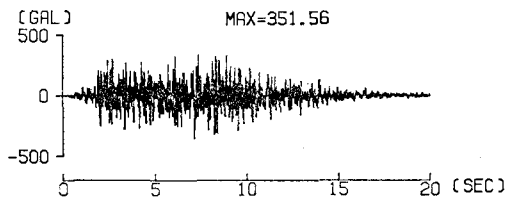


図-9 入力地震波の加速度波形

比および水深と上部の幅の比を一定とした場合、側壁の傾斜が急なほど、圧縮性の影響が大きいことがわかる。

(3) 地震波に対する応答

次に、図-8 に示すような実際の大型海洋構造物の基部として考えられる矩形断面の没水構造物について、時刻歴の地震応答解析を行い、実際の地震動により構造物がどの程度の力を受けるかを求める。入力地震波はマグニチュード 6.5、震源距離 7.2 km を想定した人工地震波である。この地盤の振動加速度波形を図-9 に、フー

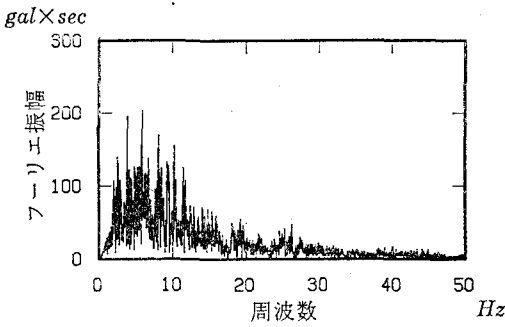


図-10 地震波のフーリエスペクトル

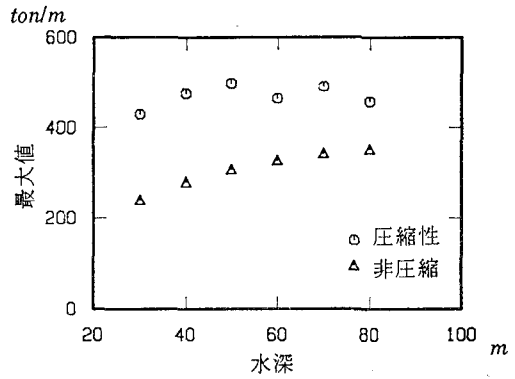
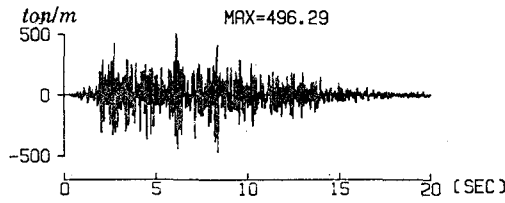
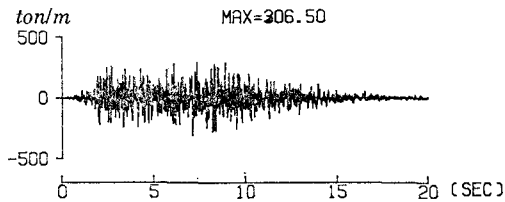


図-12 水深に対する流体力の最大値の比較



(a) 圧縮性を考慮した場合



(b) 非圧縮性の場合

図-11 構造物に働く流体力の波形

リエスペクトルを 図-10 に示す。

図-11 は水深を 50 m とした場合の、断面が受ける水平方向の流体力  $F_x$  の波形について、圧縮性を考慮した結果を (a)、非圧縮の場合の結果を (b) として示している。入力地震波の波形(図-9)と比較すると、非圧縮の場合の応答波形は入力波形とほとんど同じであるが、圧縮性を考慮した場合は、入力波形とはかなり異なった波形となるとともに、流体力の値も非圧縮の場合と比べて、最大値が約 1.5 倍となっている。これは、非圧縮の場合、流体力が周波数依存性を持たず、地震波のすべての周波数成分に対して同じ量の応答をするのに対し、圧縮性を考慮した場合、圧縮性進行波の発生により高振動数成分が増幅されるためである。

次に、地震による地盤の振動によって構造物を受ける流体力の最大値について、水深  $h$  の影響を調べたものを 図-12 に示す。非圧縮の場合、構造物を受ける流体

力の最大値は、水深が深くなるにともなうなめらかに大きくなっている。一方、圧縮性を考慮した場合は、水深による変化が大きい。これは圧縮性進行波を発生させる振動数に地震波の大きな成分があるとき、大きな流体力が生じることによるものである。また、全体に流体力の最大値は、非圧縮の場合よりもかなり大きな値となっており、地震波に対する応答を考えるときには圧縮性の影響は非常に重要であると言える。

なお、ここで行った時刻歴解析は、周波数領域での応答解析結果をフーリエ逆変数を用いて、時刻歴の応答に表したものである。

#### 4. 結 語

圧縮性流体中の任意断面の没水構造物に作用する地震時動水圧について、圧縮性を考慮したグリーン関数により直接境界積分法を用いて求める手法を示した。そして、数値計算により付加質量特性および地震波に対する応答に関して評価を行い、水深が深く振動数が高い場合には、流体の圧縮性を考慮することが重要であることを明らかにした。

#### 参 考 文 献

喜岡 渉 (1981): 大型海洋構造物に作用する地震時付加質量, 第 28 回海岸工学講演会論文集, pp. 609~613.  
 清川哲志・田中正博・小林 浩 (1982): 全没水大型円筒構造物の地震時付加質量, 第 29 回海岸工学講演会論文集, pp. 457~461.  
 Morse, P. M. and H. Feshbach (1953): Method of theoretical physics part 1, McGraw-Hill, p. 997.  
 Black, J. L., et al. (1971): Radiation and scattering of water waves by rigid bodies, J.E.M., Div. ASCE, Vol. 46, pp. 151~164.