

任意形状柱体群に働く地震時動水圧の解析

清川 哲志*・稲田 裕**

1. はじめに

地震の発生が予想される海域では、構造物に作用する支配外力は地震時慣性力となる場合が多い。したがって、各種の海洋・海岸構造物を設計する上で、地震時動水圧の問題は極めて重要である。このような認識の下に、著者らはここ数年来、各種の海洋・海岸構造物に作用する地震時動水圧の問題を研究してきた(清川ら, 1982, 1985, 1986, 1989)。そして、地震時動水圧に対して、構造物形状および流体の圧縮性が大きく影響することを明らかにした。

これらの研究は、単体構造物を対象にしたものであるが、実際には、構造物が互いに隣接して設置される場合や、構造物自身が杭あるいはカラム等、複数の柱状体で支持されているような場合も少なくないと思われる。したがって、流体の圧縮性の影響を考慮でき、しかも種々の断面形状および構造物数に対しても汎用的に適用できる解析法が必要になる。ところが、複数の構造物によって発生する波動の相互干渉まで考慮した地震時動水圧の理論は極めて少なく、また、流体は非圧縮性、あるいは構造物断面は円に限られている等、適用上の制約が多い。例えば、Yamamoto(1976)およびChen(1976)は非圧縮性流体中の円柱群に対する2次元動水圧理論を、また、小坪・高西は圧縮性流体中の2次元(1976)および3次元円柱群(1977, 1978)に対する動水圧理論を導いているが、いずれも対象は円柱である。また、富田・佐々木(1970)、笠井・加賀(1973)は正方形断面柱体群、藤田(1981)は正六角形断面柱体群の地震時動水圧解析を行っているが、いずれも流路網理論を用いているので、柱体間の流れが一樣と見なせる程度に柱体間隔が狭くなければ適用できない。このように、現在のところ流体の圧縮性を考慮した上で任意断面の柱体群に適用できる解析法はないと思われる。

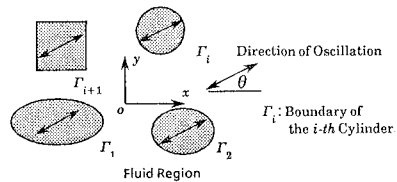
そこで、本論文では、水中に任意に配置された任意断面柱体群に作用する地震時動水圧を流体の圧縮性の影響

を考慮して求める2次元汎用解析法として、グリーン関数を用いた直接境界積分法による解析法を示す。2次元理論による解析でも、水深が柱体の径に対して十分に大きい場合、また、柱体群周辺の水面が海底と平行な水盤で覆われているような場合、あるいは原子炉の冷却水中の燃料棒の場合等には、十分な精度で解が得られる。したがって2次元理論でも、任意断面の柱体群に作用する動水圧が圧縮性の影響を考慮して求められるようになることは工学的な意義も大きいと考えられる。

2. 解析理論

(1) 基礎方程式と境界条件

図一に示すように、任意の断面を有する2次元柱体がN本あり、これらが流体中で角振動数 ω の調和振動をしているものとする。ただし、それぞれの柱体は図に示したように、同位相、同振幅で、すべて同方向に振動



図一 座標系と記号の定義

するものとする。流体は非粘性の圧縮性流体、流体運動は非回転であると仮定し、流体運動を速度ポテンシャルによって記述する。速度ポテンシャルを $\phi(x, y)e^{-i\omega t}$ (i : 虚数単位, t : 時間)とすると、その空間部分 $\phi(x, y)$ は次の境界値問題の解として求められる。

$$\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 + (\omega^2/c^2)\phi = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\partial\phi/\partial n = v_n \quad (\text{on } \Gamma_i, i=1 \sim N) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1/2} \{\partial\phi/\partial R - i(\omega/c)\phi\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、式(1)は2次元圧縮性流体中での速度ポテンシャルの挙動を支配する基礎方程式で、2次元 Helmholtz 方程式、式中の c は水中音速である。式(2)は柱体表面における柱体の運動速度と水粒子速度の連続条件で、 v_n は各柱体表面 Γ_i における柱体表面運動速度の法線方向

* 正会員 工博 清水建設(株) 大崎研究室応用工学グループ
 ** 工修 清水建設(株) 大崎研究室土木グループ

成分, n による微分は柱体表面での法線方向微分を表す。また, 式 (3) における R は, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり, 式 (3) は無限遠方では外向き進行波のみが存在するという Sommerfeld の放射条件である。

(2) グリーン関数

グリーン関数と拡張されたグリーンの定理を用いて式 (1)~(3) を積分方程式に変換し, それをさらに離散化して数値的に解く。

本問題に適したグリーン関数 G として, 次の境界値問題の解を採用する。

$$\partial^2 G / \partial x^2 + \partial^2 G / \partial y^2 + (\omega^2 / c^2) G = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \dots\dots\dots (4)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1/2} \{ \partial G / \partial R - i(\omega/c)G \} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここに, δ はディラックのデルタ関数, (ξ, η) は領域内の点を表すパラメーターである。

式 (4), (5) を満足する解は, よく知られているように, 次式で表される。

$$G(x, y; \xi, \eta) = (i/4)H_0^{(1)}(\omega r/c) \dots\dots\dots (6)$$

ここに, $H_0^{(1)}$ は第1種0次のハンケル関数で, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ である。

(3) 積分方程式

グリーンの定理を用いて簡単に確かめられるように, 2階微分が可能な任意の関数 u, v と2次元 Helmholtz 演算子 $L[] \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \omega^2 / c^2$ を用いて, 次の拡張されたグリーンの定理が得られる。

$$\iint_S (uL[v] - vL[u]) d\sigma = \pm \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \dots\dots\dots (7)$$

ここに, S は任意の閉じた平面, C はそれを囲む境界線, $d\sigma$ は S 上の微小面積, ds はそれに沿った微小長さである。また, 複号は n を領域から見て外側にとるとき正, 逆の場合負をとるものとする。

式 (7) で, $u = \phi, v = G$ とし, 式 (1)~(5) を考慮すると次式を得る。

$$\alpha \phi(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} - G v_n \right) ds \dots\dots\dots (8)$$

ここに, α は係数で, 点 (ξ, η) が流体内にあるときは1, 境界線上にあるときはその内角と 2π との比 (内角が π のとき $1/2, \pi/2$ のとき $1/4$ 等), また, n による微分は以後流体領域に対して内向きにとるものとする。

(4) 積分方程式の離散化

各柱体表面を図-2 に示すように細かい線要素に分割し, ϕ はそれぞれの要素上で一定値をとるものとする。また, 図中に示すように各分割要素に1から順番に通し番号を付け, l 番目要素 Δ_l における ϕ を ϕ_l のように下付き添字を付けて表すことにすると, 式 (8) は,

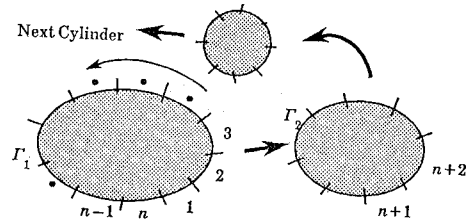


図-2 離散化と要素番号の付け方

$$\frac{1}{2} \phi_l = \sum_{m=1}^M \left(\phi_m \int_{\Delta_m} \frac{\partial G}{\partial n} ds - v_{nm} \int_{\Delta_m} G ds \right) \dots\dots\dots (9)$$

と表すことができる。ただし, (ξ, η) は常に要素の中点にとるものとし, ϕ_m, v_{nm} は, それぞれ m 番目要素中点における ϕ および v_n の値を表すものとする。また, M は全要素数である。式 (9) において $\phi_l (l=1 \sim M)$ 以外はすべて既知量であるから, 式 (9) は全要素中点上での未知ポテンシャル値 $\phi_l (l=1 \sim M)$ に関する M 元複素係数連立1次方程式を構成する。

ここで v_{nm} を考えると, 一般に図-3 のように書くことができるから,

$$v_{nm} = |v| \cos \Psi_m = |n| |v| \cos \Psi_m = (n_{xm} \cos \theta + n_{ym} \sin \theta) |v| \dots\dots\dots (10)$$

と表せる。ただし, $|v|$ は柱体の振動速度振幅, θ は振動方向と x 軸のなす角 ($0 \leq \theta \leq \pi$), n_{xm}, n_{ym} は m 番目要素の中点上の単位法線ベクトルの x, y 成分である。

次に式 (9) の右辺第1項目の積分を考える。一般に n_x, n_y を単位法線ベクトルの成分とすると, $\partial G / \partial n = n_x \cdot \partial G / \partial x + n_y \cdot \partial G / \partial y$ であるから,

$$\int_{\Delta_m} \frac{\partial G}{\partial n} ds = \int_{\Delta_m} n_x \frac{\partial G}{\partial x} ds + \int_{\Delta_m} n_y \frac{\partial G}{\partial y} ds \dots\dots\dots (11)$$

と表せることがわかる。

グリーン関数 G は式 (6) で表されるから, これに基づいて $\partial G / \partial x, \partial G / \partial y$ を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{i\omega}{4c} H_0^{(1)'} \left(\frac{\omega}{c} r \right) \frac{(x-\xi)}{r} \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{i\omega}{4c} H_0^{(1)'} \left(\frac{\omega}{c} r \right) \frac{(y-\eta)}{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに, $H_0^{(1)'}$ は $H_0^{(1)}$ の導関数である。

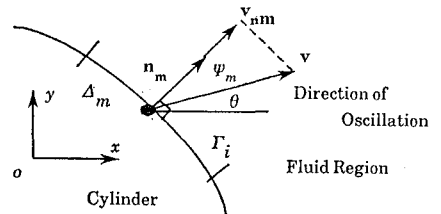


図-3 構造物表面上の法線ベクトルと速度成分

式 (12) を式 (11) に代入し、さらに 0 次ハンケル関数の微分公式を用いると、

$$\int_{J_m} \frac{\partial G}{\partial n} ds = -\frac{i\omega}{4c} \int_{J_m} \frac{n_x(x-x_i) + n_y(y-y_i)}{r} \cdot H_1^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}r\right) ds \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 (x_i, y_i) は l 番目要素の midpoint 座標である。

式 (9) の右辺第 2 項目の積分は、 G に式 (6) をそのまま代入して、

$$\int_{J_m} G ds = \frac{i}{4} \int_{J_m} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}r\right) ds \quad \dots\dots\dots (14)$$

式 (13), (14) の右辺の積分は、要素分割を十分細かくすれば、要素長さ $\bar{\Delta}_m$ と要素の midpoint における被積分関数の値との積で置き換えることができ、次のようになる。

$$\int_{J_m} \frac{\partial G}{\partial n} ds \simeq -\frac{i\omega \{n_{xm}(x_m-x_i) + n_{ym}(y_m-y_i)\}}{4c r_{lm}} \times H_1^{(1)}(\omega r_{lm}/c) \bar{\Delta}_m \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\int_{J_m} G ds \simeq \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}r_{lm}\right) \bar{\Delta}_m \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 r_{lm} は l 番目要素と m 番目要素の midpoint 間距離を表し、式 (15), (16) の右辺における $\bar{\Delta}_m$ は m 番目要素の要素長を表す。

式 (15), (16) を用いれば、式 (9) におけるグリーン関数とその法線方向微分の要素上での線積分が容易に計算できる。しかし、 $l=m$ の場合には $r_{lm}=0$ となり、式に含まれるハンケル関数の虚数部が発散するので、この計算式を用いることができない。これはグリーン関数の特異性によるため、このような場合には積分を厳密に実行するなど別途求める必要がある。

(5) 特異点を含む要素の積分

$l=m$ の場合、式 (13), (14) 中の r は要素の midpoint と要素上の点との距離を表す。したがって、要素を微小な直線と見なし、midpoint に原点が一致し、 x' 軸が要素上にあり、 y' 軸が要素と直交して流体側に向かうような局所座標系で考えれば、 $r=|x'|$ と置くことができる。したがって、

$$\int_{J_m} G ds = \frac{i}{4} \int_{-\bar{\Delta}_m/2}^{+\bar{\Delta}_m/2} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}|x'|\right) dx' \\ = \frac{i}{2} \int_0^{\bar{\Delta}_m/2} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}x'\right) dx' \quad \dots\dots\dots (17)$$

一方 $\bar{\Delta}_m$ が小さい場合、 $(\omega/c)x'$ の変域も十分小さいから、次の近似式が成り立つ。

$$H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}x'\right) \simeq 1 + \frac{2i}{\pi} \left\{ \gamma + \ln\left(\frac{\omega}{2c}x'\right) \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 γ : オイラー数 (=0.577215...)。

式 (18) を式 (17) に代入し、積分を実行すると、最終的に式 (17) は次式のようになる。

$$\int_{J_m} G ds = \left(\frac{i}{4} - \frac{\gamma}{2\pi}\right) \bar{\Delta}_m - \frac{\bar{\Delta}_m}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{\omega \bar{\Delta}_m}{4c}\right) - 1 \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

一方、グリーン関数の法線方向微分の要素上での積分は次式のようになる。

$$\int_{J_m} \frac{\partial G}{\partial n} ds = \frac{i}{4} \int_{-\bar{\Delta}_m/2}^{+\bar{\Delta}_m/2} \frac{\partial}{\partial y'} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}|x'|\right) dx' = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

(6) 未知ポテンシャルに関する連立 1 次方程式

以上の計算結果より、式 (9) は次のような連立 1 次方程式に書き表されることがわかる。

$$[a_{lm}]\{\phi_m\} = -[b_{lm}]\{v_{nm}\} \quad (l, m=1 \sim M) \quad \dots (21)$$

$$a_{lm} = \begin{cases} 1/2 & (l=m) \\ -i\omega \{n_{xm}(x_m-x_i) + n_{ym}(y_m-y_i)\} \\ \quad \times H_1^{(1)}(\omega r_{lm}/c) \bar{\Delta}_m / (4c r_{lm}) & (l \neq m) \end{cases} \\ b_{lm} = \begin{cases} \frac{i}{4} \bar{\Delta}_m - \frac{\bar{\Delta}_m}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{\omega \bar{\Delta}_m}{4c}\right) - 1 \right\} & (l=m) \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c}r_{lm}\right) \bar{\Delta}_m & (l \neq m) \end{cases} \\ v_{nm} = (n_{xm} \cos \theta + n_{ym} \sin \theta) |v| \quad \dots\dots\dots (22)$$

式 (21) を未知ポテンシャル値ベクトル $\{\phi_m\}$ について解けば、柱体表面上に分布させた未知ポテンシャル値 $\phi_m (m=1 \sim M)$ が数値的に求められる。なお、式 (21) および式 (22) の第 3 式より、未知ポテンシャルの大きさは、振動速度振幅 $|v|$ に比例することがわかる。したがって、単位速度振幅の場合について解を求めておけば、任意の速度振幅に対する解が得られることになる。すなわち、 ϕ_m^* を単位速度振幅に対応した m 番目要素の midpoint におけるポテンシャル値とすると、 $\phi_m = |v| \phi_m^*$ の関係がある。そして、 ϕ_m^* は $|v|=1$ として式 (21) を解けばその解として得られる。

(7) 動水圧と付加質量

ポテンシャルが求められると、線形化したベルヌイの式から動水圧 p が $p = -\rho \partial(\phi e^{-i\omega t}) / \partial t$ (ρ : 流体密度) によって計算できる。 ϕ_m^* を用いると m 番目要素 midpoint における動水圧は、次式で表される。

$$p_m(t) = i\rho\omega |v| \phi_m^* e^{-i\omega t} \quad (m=1 \sim M) \quad \dots\dots\dots (23)$$

各柱体を受ける流体力は、動水圧による圧力の各方向成分を柱体まわりで積分することによって得られる。 F_i を i 番目柱体に作用する流体力ベクトルとすると、

$$F_i(t) \simeq -i\rho\omega |v| e^{-i\omega t} \sum_{m=i_1}^{i_2} n_m \cdot \phi_m^* \cdot \bar{\Delta}_m \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 i_1 および i_2 は i 番目柱体の要素の始番号と終番号で、 i 番目柱体は $m=i_1 \sim i_2$ 番の要素で構成されているものとする。また、 n_m は m 番目要素の midpoint における単位法線ベクトルで、 $n_m = (n_{xm}, n_{ym})$ である。

式 (24) における $-i\omega|v|e^{-i\omega t}$ は柱体の振動加速度であるから、流体力は振動加速度に比例することがわかる。この比例定数の絶対値によって次のように付加質量 M_i が定義される。

$$M_i(t) \approx \rho \sum_{m=1}^{i_2} n_{m_i} |\phi_{m_i}^*| \cdot \bar{A}_m \dots\dots\dots (25)$$

また、付加質量係数を付加質量と構造物のそれぞれ x, y 方向投影面の幅を直径とする円柱が排除する流体の質量の比として定義する。

3. 数値計算結果と考察

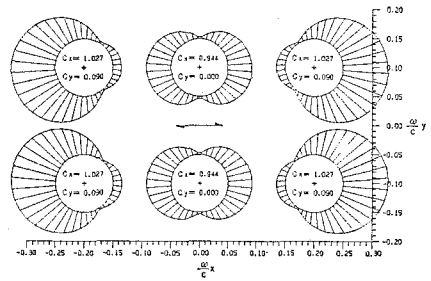
(1) 要素分割と解の収束について

図-4 に要素分割と解の収束の関係を示す。横軸は音波の波長 $\lambda (=cT, T: 振動周期)$ に対する要素長 Δ の比として定義される相対要素長 Δ/cT 、縦軸は付加質量係数 C_x の収束値 C_0 に対する誤差の比 $(C_x - C_0)/C_0$ である。相対要素長が短くなるとともに誤差はほぼ一様に 0 に近づいていることから、解が収束していることがわかる。このように、要素分割の目安として、相対要素長を 0.05 程度にとれば十分な精度で解が求められることがわかる。なお、 C_0 として事前の検討で十分収束していると考えられた $\Delta/cT=0.005$ のときの値を用いている。

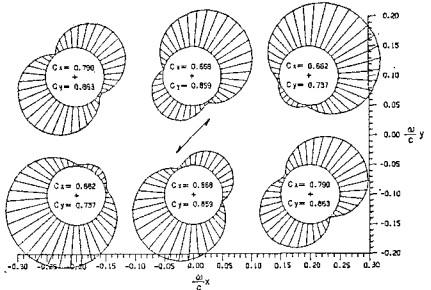
(2) 動水圧分布

図-5 に 6 本の円柱が振動角度 $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ で振動する場合の動水圧分布の一例を示す。ただし、圧力値 p は、 $p/\rho\omega|v|D$ のように無次元化して示してある。ただし、それぞれの単位は、圧力 $p: \text{tonf/m}^2$ 、密度 $\rho: \text{ton/m}^3$ 、加速度振幅 $\omega|v|: \text{gal} (= \text{cm/sec}^2)$ 、柱体の径 $D: m$ である。この結果は、円柱の径 D を音波の波長に相当する ω/c で無次元化した値 $\omega D/c$ を 0.1、また、柱体の中心間距離 l と D の比 l/D を 2.0 とした場合のものである。また、図中にはそれぞれの柱体の水平および鉛直方向の付加質量係数 C_x, C_y も示してある。

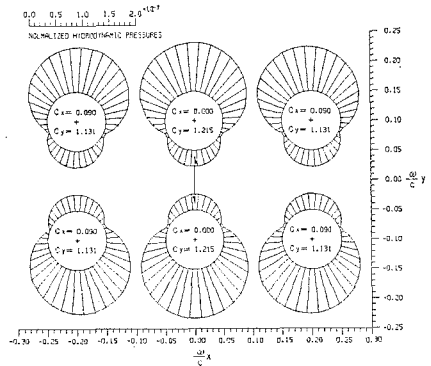
これらの図において、振動方向に対して向かい合う柱体間の圧力が外側表面上の値に比べて小さくなっている。これは、柱体間の流体が柱体列と一体となって運動する結果生じる一種の閉塞効果である。また、振動方向の付加質量係数の値は 0° 方向よりも 90° 方向に振動す



(a) $\theta=0^\circ$



(b) $\theta=45^\circ$



(c) $\theta=90^\circ$

図-5 円柱が 6 本の場合の動水圧分布の一例

る方が大きくなっていることがわかる。これは柱体列としての振動方向に対する幅の影響で、やはり柱体列と柱体間の流体が一体となって運動することの影響である。

(3) 柱体間距離の影響

図-6 は 2 本の円柱および角柱が振動するときの付加質量の変動特性を径で無次元化した柱体間距離 l/D の関数として表したものである。 C_x は求められた 1 本当たりの付加質量係数、 C_1 は単体の場合の付加質量係数である。したがって、縦軸は単体の場合との差の相対的な大きさを表している。なお、 $\omega D/c$ は 0.5 としてある。この図からわかるように、角柱の方が変動は大きいものの、その特性はほぼ同じである。柱体間距離が大きくなるに従って、変動幅は徐々に小さくなっているが、

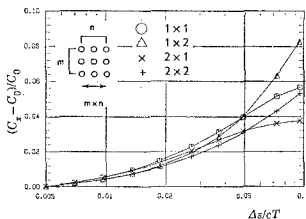


図-4 要素分割に対する解の収束の関係

柱体間距離が径の100倍になっても約2%の影響がなお残っていることがわかる。これは流体の圧縮性によって発生する進行波の相互干渉の影響であり、ピーク間距離はちょうど音波の波長に一致している。すなわち、柱体を2本としたときの影響が最も強く現れるのは柱体間距離が音波の波長の整数倍となったときで、一種の共振状態になっていると考えられる。

ところで、複数円柱の付加質量特性については、小坪・高西による一連の研究が知られている。小坪・高西は、はじめに圧縮性流体中での単円柱の振動に関する厳密解をもとに緩和法的に多柱列に対する近似解を求める方法を提案した。そして、それがかなり複雑な計算を必要とすることから、さらに近似を進めた理論を提案している。これらの研究の中で、柱体間距離が増すに従って相互干渉の影響は単調に減少し、径の倍程度になると1.5%以下となるという結果を得た。また、柱体間距離と径の比 l/D が1.5以上になると近似的取扱による誤差は無視できる程度に小さくなると結論づけている。しかし、小坪・高西の理論では振動数の影響が考慮されてなく、流体の圧縮性の影響を示すパラメーターが存在しない。すなわち、小坪・高西は理論の導入時は流体の圧縮性の影響を取り入れているが、近似していく過程でその影響項が欠落したため、結果的には非圧縮の場合を近似的に取り扱ったのと同じになっている。流体の圧縮性の影響を考慮すると、ここで示したように柱体間距離が径の10倍になっても円柱、角柱、それぞれ約6%および10%の相互干渉による影響が残る。また、柱体間距離の増加に対して単調に減少するのではなく、柱体間距離が音波の波長の整数倍となるところでピークを持つ曲線となる。

(4) 振動数および柱体径の影響

図-7に柱体間距離を $l/D=2.0$ とし、配置を変えた円柱群の付加質量の周波数特性を無次元角振動数 $\omega D/c$ の関数として示す。非圧縮流体中における単体の円筒の付加質量係数は周波数にかかわらず1.0であるが、この圧縮性を考慮した結果では $\omega D/c$ が大きくなるにつれて、付加質量の値は大きく変化し、また柱体の配置によって結果は異なる傾向を示す。 $\omega D/c=1.0$ とすると、

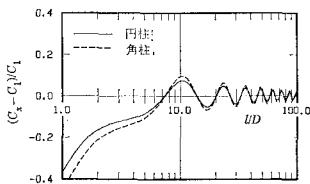


図-6 柱体間距離の影響

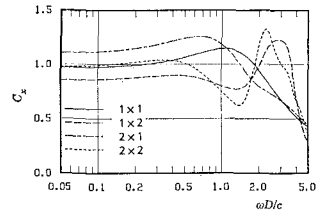


図-7 配置の異なる円柱の付加質量の周波数応答

周波数が $f=25$ Hz のとき $D=10$ m, また $f=5$ Hz のとき $D=50$ m の柱体に相当する。つまり、高周波数振動または大型の構造物の場合、圧縮性の影響により柱体間距離が大きくなっても柱体間の相互作用が大きく影響することがわかる。

4. 結 語

以上、本論文では任意断面柱体群に作用する地震時動水圧を求める汎用解法として、圧縮性を考慮したグリーン関数を用いた直接境界積分法を示し、いくつかの柱体群を例に取り数値計算を行ってその特徴を考察した。その結果、高周波数振動または大口径の柱体の場合、流体の圧縮性が大きく影響し、良く知られている小坪・高西の理論とは異なる現象となる場合があることが明らかになった。

特異項の評価に関して、東京大学磯部助教から貴重な御意見を頂いたことを記して感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 笠井洋昭・加賀不亀男 (1973): 流体中における棒群の連成振動解析, 日本機械学会講演論文集, No. 730-14.
- 清川哲志・小林 浩 (1982): 大型軸対称海洋構造物の地震時付加質量, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 452~456.
- 清川哲志 (1985): 流体の圧縮性を考慮した面対称柱体の地震時動水圧, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 560~564.
- 清川哲志 (1986): 流体の圧縮性を考慮した任意断面防波堤の地震時動水圧理論, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 495~500.
- 小坪清真・高西照彦 (1976): 多柱基礎への水の付加質量について, 土木学会論文報告集, No. 248, pp. 1~10.
- 小坪清真・高西照彦 (1977): 多柱基礎橋脚に対する水の付加質量の3次元解析, 土木学会論文報告集, No. 259, pp. 25~39.
- 小坪清真・高西照彦 (1978): 任意に配置された異なる柱径を持つ多柱基礎に働く地震時動水圧の解析法, 土木学会論文報告集, No. 276, pp. 1~12.
- 富田久雄・佐々木陽一 (1970): 水中における管群の振動 (第1, 2報), 日本機械学会講演論文集, No. 700-17.
- Kiyokawa, T. and H. Inada (1989): Hydrodynamic forces acting on axi-symmetric structure immersed in ice covered sea, Proc. 8th O.M.A.E., Vol. II, pp. 153~160.
- Yamamoto, T. (1976): Hydrodynamic forces on multiple circular cylinders, Trans. A.S.C.E., Vol. 102, No. HY 9.