

# 流体の圧縮性を考慮した任意断面防波堤の地震時動水圧理論

清 川 哲 志\*

## 1. はじめに

近年、大水深防波堤が計画・施工される機会が増えているように思われる。大水深防波堤の場合、従来のような直立ケーソンを用いた混成堤とすると、外力に対する安定性確保に大断面を必要とし、著しく不経済であるため、傾斜堤、曲面堤などの新しい断面形状の防波堤が検討されている<sup>1),2)</sup>。しかし、設計外力という観点から見ると、波力に関しては、模型実験によりある程度のことわかっているものの、もう一つの主要な外力である地震時動水圧に関しては不明なことが多い。特に、水深が増すと地震時動水圧が増加し、この増加分は水深が50m程度になると設計的にも無視できない大きさになる可能性があるが、この点現在までに十分に明らかにされているとは言い難い。

一方、著者は、地震時動水圧を解析する方法として、固有関数展開法を拡張した“境界展開法”を開発し、非圧縮性および圧縮性流体中の大型海洋構造物の動水圧特性を明らかにしてきた<sup>3)-6)</sup>。これは海中に孤立した大型海洋構造物を対象としたものであったが、用いた解析法“境界展開法”は、構造物表面上の境界条件が表面上の任意の点で成り立つことと、条件式の両辺を直交関数展開したときに、同じ次数で係数が等しいことが同値であることを利用したもので、孤立構造物に限らず、この種の境界値問題の解析法としては汎用性を持つものである。

そこで、本論文ではこの“境界展開法”を用いて、流体の圧縮性を考慮した任意断面の防波堤に作用する動水圧の理論を導き、防波堤の断面形状および流体の圧縮性が地震時動水圧にどのような影響を与えるかを明らかにする。これは、設計外力としての地震時動水圧の精度を上げるとともに、大水深防波堤の地震時動水圧特性を明らかにすることを目的としたものである。

ところで対象はダムであるが同様な問題を Hanna & Humar (1982)<sup>7)</sup> および Liu & Cheng (1984)<sup>8)</sup> がグリーン公式を用いた境界要素法で解いている。しかし、計算結果は数例が示されているのみで、特に海岸工学で問題

とするような曲面壁あるいは傾斜壁等については系統的な検討が行われていない。また、離散近似を用いた数値解析法なので、壁面が滑らかに変化するような形状の防波堤の解析には適さないように思われる。これに対し、本報で用いる解析法は厳密解が得られ、しかも壁面の微妙な曲率を完全に解析に反映することができるので、曲面ケーソンなどを対象とした解析に適している。そこで、以下ではまずこの理論について説明し、次に、曲面および台形ケーソンを対象に系統的な計算を行い、地震時流体力に及ぼす断面形状の影響、流体の圧縮性の影響等を明らかにする。

## 2. 流体の圧縮性を考慮した任意断面防波堤の動水圧理論

### (1) 基礎方程式と境界条件

図-1に示すように、水深が一定  $h$  の海域に任意の断面形状を有する防波堤があり、これが水中で角振動数  $\omega$  の微小な調和振動を行う場合を考える。そして、流体は非粘性の圧縮性流体、防波堤の振動によって生じる流体の運動は非回転運動と仮定する。この場合、速度ポテンシャルが存在し、流体運動は線形ポテンシャル理論によって記述することができる。すなわち、速度ポテンシャルを  $\Phi(x, z)e^{-i\omega t}$  とすると、 $\Phi(x, z)$  は次の基礎方程式と境界条件を満足する関数として求められる。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\rho \omega^2}{\kappa} \Phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad \dots\dots (1)$$

$$\partial \Phi / \partial z - \nu \Phi = 0 \quad (\nu = \omega^2 / g) \quad (\text{on } S_F) \quad \dots\dots (2)$$

$$\partial \Phi / \partial z = 0 \quad (\text{on } S_B) \quad \dots\dots (3)$$

$$\partial \Phi / \partial n = -i\omega \zeta_0 n_x \quad (\text{on } S_W) \quad \dots\dots (4)$$

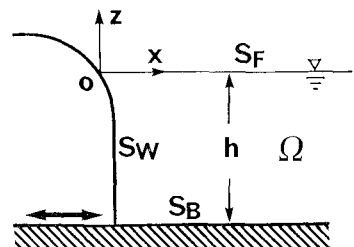


図-1 座標系と記号

\* 正会員 工博 清水建設(株) 大崎研究室応用工学グループ

ここに、 $\rho$ : 流体密度、 $\kappa$ : 流体の体積弾性率、 $g$ : 重力加速度、 $\xi_0$ : 構造物の変位振幅、 $n_x$ : 構造物表面における単位法線ベクトルの  $x$  成分である。

式 (1) は圧縮性流体に関する基礎方程式で、2次元ヘルムホルツ方程式である。式中の  $\sqrt{\kappa/\rho}$  は局所音速を表すが、密度  $\rho$  の場所的、時間的变化はわずかと考えられるので、通常行われるように平均音速で置き換えて解析を進める。式 (2) は自由表面  $S_F$  における運動学的・力学的条件、式 (3) は海底面  $S_B$  における不透過条件、式 (4) は防波堤没水表面  $S_W$  における防波堤表面の運動速度と流体の運動速度の連続条件である。ただし、 $n$  による微分は防波堤表面での法線方向微分である。また、 $\Phi$  はこれらの他に無限遠方における放射条件を満足する必要がある。

(2) 一般解

速度ポテンシャルの一般解、すなわち基礎方程式 (1) と、防波堤没水表面における境界条件 (4) を除いた他の境界条件 (2), (3), および放射条件を満足する解は、通常の変数分離法に従って機械的に求められ、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi(x, z) = & A_0 \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} e^{i\lambda_0 x} \\ & + \sum_{n=1}^s A_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} e^{i\lambda_n x} \\ & + \sum_{n=s+1}^{\infty} A_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} e^{-\lambda_n x} \dots (5) \end{aligned}$$

ここに、 $A_n (n=0, 1, \dots)$ : 防波堤没水表面の境界条件から決まる複素未定係数、 $k_0$ : 波数 ( $k_0 \tanh k_0 h = \nu$  の実正根)、 $k_n$ : 固有値 ( $k_n \tan k_n h = -\nu$  の実正根、 $k_1 < k_2 < \dots$ )、 $\lambda_0^2 = k_0^2 + \rho\omega^2/\kappa$ 、 $\lambda_n^2 = k_n^2 - \rho\omega^2/\kappa$ 、 $\lambda_n' = i\lambda_n$  で、 $s$  は  $k_n^2 - \rho\omega^2/\kappa < 0$  となる整数  $n$  のうち最大のものである。

式 (5) の右辺第 2 項が圧縮性を考えることによって付け加わる項である。ただし、この項は  $k_n^2 - \rho\omega^2/\kappa < 0$  となる整数  $n$  が存在する場合のみ存在し、ある臨界周波数を越えると発生する進行波成分から成っている。この進行波成分の  $n$  次のモードの発生限界は、 $T$  を振動周期として、次式によって示される。

$$h < (2n-1) \sqrt{\kappa/\rho} T/4 \dots (6)$$

これからわかるように、進行波成分の発生は水深と振動周期のみによって支配される。

(3) 境界展開法による複素未定係数の決定

境界条件式 (4) における法線方向微分  $\partial/\partial n$  は、一般に単位法線ベクトルの成分  $n_x$  および  $n_z$  を用いて表すことができ、 $\partial/\partial n = n_x \cdot \partial/\partial x + n_z \cdot \partial/\partial z$  となる。したがって、構造物表面  $S_W$  における境界条件式 (4) は次のようになる。

$$n_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + n_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -i\omega \xi_0 n_x \quad (\text{on } S_W) \dots (7)$$

これに速度ポテンシャルの一般解 (5) を代入し整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & (in_x \lambda_0 \cosh k_0(h+z) \\ & + n_z k_0 \sinh k_0(h+z)) \frac{e^{i\lambda_0 x}}{\cosh k_0 h} A_0 \\ & + \sum_{n=1}^s \{ in_x \lambda_n' \cos k_n(h+z) \\ & - n_z k_n \sin k_n(h+z) \} \frac{e^{i\lambda_n' x}}{\cos k_n h} A_n \\ & - \sum_{n=s+1}^{\infty} \{ n_x \lambda_n A_n \cos k_n(h+z) \\ & + n_z k_n \sin k_n(h+z) \} \frac{e^{-\lambda_n x}}{\cos k_n h} A_n \\ & = -i\omega \xi_0 n_x \quad (\text{on } S_W) \dots (8) \end{aligned}$$

式 (8) は構造物表面  $S_W$  上の任意の点で成り立つ必要がある。したがって、これを常に成り立たせる複素係数  $A_n (n=0, 1, \dots)$  を決定することができれば、これらを一般解に代入することによって、すべての境界条件と基礎方程式を満足する厳密解が得られるわけである。

ここで任意断面防波堤について考えてみると、 $S_W$  上で  $n_x, n_z$  および  $x$  はそれぞれ  $z$  座標に関する一意関数となることがわかる (図-2 参照)。これを明白に示すために次のように書くことにする。

$$\begin{cases} n_x = n_x(z) \\ n_z = n_z(z) \\ x = x_0(z) \end{cases} \dots (9)$$

ただし、 $x_0$  は鉛直座標軸  $z$  から防波堤表面  $S_W$  上の点までの距離である。

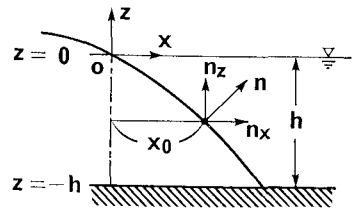


図-2 防波堤表面における  $n_x, n_z$  および  $x$

$n_x, n_z$  および  $x$  が構造物表面上で  $z$  の関数であることから、式 (8) の両辺はともに  $z$  のみの関数であり、これが防波堤没水表面  $S_W$  上の任意の点で成り立つということ、 $-h \leq z \leq 0$  なる任意の  $z$  について成り立つということは同値である。

ここで以後の式の展開を簡明にするために 式 (8) を次のように表す。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m(z) A_m = -i\omega \xi_0 n_x(z) \quad (n=0, 1, \dots) \dots (10)$$

ただし、 $\Gamma_n$  は次式で定義される。

$$\Gamma_n(z) = \begin{cases} \{in_x(z)\lambda_0 \cosh k_0(h+z) \\ + n_x(z)k_0 \sinh k_0(h+z)\} \\ \times \frac{\exp\{i\lambda_0 x_0(z)\}}{\cosh k_0 h} \quad (\text{for } n=0) \\ \{in_x(z)\lambda_n' \cos k_n(h+z) \\ - n_x(z)k_n \sin k_n(h+z)\} \frac{\exp\{i\lambda_n' x_0(z)\}}{\cos k_n h} \\ (\text{for } n=1, 2, \dots, s) \\ - \{in_x(z)\lambda_n \cos k_n(h+z) \\ + n_x(z)k_n \sin k_n(h+z)\} \frac{\exp\{-\lambda_n x_0(z)\}}{\cos k_n h} \\ (\text{for } n=s+1, s+2, \dots) \end{cases} \dots\dots\dots(11)$$

式(10)の両辺はともに  $z$  の関数である。したがって、固有関数展開ができて、それぞれ次のように書くことができる。

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(z) A_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \Psi_m(z) \\ -i\omega \xi_0 n_x(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \Psi_m(z) \end{cases} \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $\Psi_m(z)$  は正規化された固有関数列で、次式のようである。

$$\Psi_m(z) = \begin{cases} \left( \frac{2k_0^2}{h(k_0^2 - \nu^2) + \nu} \right)^{1/2} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} \quad (\text{for } m=0) \\ \left( \frac{2k_m^2}{h(k_m^2 + \nu^2) - \nu} \right)^{1/2} \frac{\cos k_m(h+z)}{\cos k_m h} \quad (\text{for } m=1, 2, \dots) \end{cases} \dots\dots\dots(13)$$

また、 $a_m$  および  $b_m$  はともにフーリエ係数で、次式によって求められる。

$$\begin{cases} a_m = \int_{-h}^0 \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(z) A_n \Psi_m(z) dz \\ b_m = -i\omega \xi_0 \int_{-h}^0 n_x(z) \Psi_m(z) dz \end{cases} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots(14)$$

式(8)あるいは式(10)が任意の  $z$  について成り立つためには、その両辺を固有関数展開したときの各次数におけるフーリエ係数が等しくなければならない。すなわち、 $a_m = b_m$  ( $m=0, 1, \dots$ ) が成り立つ必要がある。したがって、式(14)より次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-h}^0 \Gamma_n(z) \Psi_m(z) dz \\ = -i\omega \xi_0 \int_{-h}^0 n_x(z) \Psi_m(z) dz \\ (\text{for } m=0, 1, \dots) \end{aligned} \dots\dots\dots(15)$$

これは、複素未定係数  $A_n$  ( $n=0, 1, \dots$ ) に関する複素係数連立1次方程式で、行列表示すると次のように書くことができる。

$$[D][A] = -i\omega \xi_0 [c] \dots\dots\dots(16)$$

ただし、 $[A] = {}^t\{A_0, A_1, \dots\}$ 、 $[c] = {}^t\{c_1, c_2, \dots\}$  である。

また、行列の要素  $D_{ij}$  および定数ベクトル項の要素  $c_i$  は次式で定義される。

$$\begin{cases} D_{ij} = \int_{-h}^0 \Gamma_{j-1}(z) \Psi_{i-1}(z) dz \quad (\text{for } i \text{ and } j=1, 2, \dots) \\ c_i = \int_{-h}^0 n_x(z) \Psi_{i-1}(z) dz \quad (\text{for } i=1, 2, \dots) \end{cases} \dots\dots\dots(17)$$

複素係数連立1次方程式(16)を解いて得られた複素未定係数  $A_n$  ( $n=0, 1, \dots$ ) を一般解(5)に代入することによって求める解が得られる。なお付言すれば、式(16)から  $[A]$  は運動速度振幅  $-i\omega \xi_0$  に比例し、したがって防波堤の水平振動による流体運動を支配する速度ポテンシャルも運動速度振幅  $-i\omega \xi_0$  に比例することがわかる。

(4) 防波堤に作用する動水圧

任意点の圧力  $p$  は一般化されたベルヌーイの定理から式(5)を用いて  $p = \rho\omega\Phi$  のように求められる。圧力の各方向成分を防波堤の全没水表面にわたって積分することによって防波堤に作用する動水圧  $F$  が次式のように求められる。

$$F = \int_{-h}^0 p(x_0, z) \mathbf{n}(z) \sqrt{1 + (dx_0/dz)^2} dz \dots(18)$$

ここに、 $\mathbf{n}$  は防波堤の没水表面に立てた単位法線ベクトルである。

3. 数値計算例と考察

次に、図-3に示すような、傾斜壁、および曲面壁に作用する流体力特性、および流体力特性に及ぼす流体の圧縮性の影響について述べる。流体力係数を次のように、非圧縮性流体中で水平振動をする鉛直壁が受ける流体力  $F_0$  を基準に定義する。

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_z \end{pmatrix} \cdot F_0, \quad F_0 = \frac{16\rho\omega^2 \xi_0 h^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \dots\dots\dots(19)$$

ここに、 $F_x, F_z$ : 流体力の水平、鉛直成分、 $C_x, C_z$ : 水平力、鉛直力の流体力係数である。また、 $F_0$  は速度ポテンシャルに関する厳密解に基づく表示である。この級数の和は  $(1-1/2^3)\pi^3/25.79436\dots$  となる<sup>9)</sup>。これと  $\omega^2 \xi_0$  が振動加速度であることを考慮し、水平震度  $K_h$  を用いて  $K_h g$  で置き換え、さらに海水の単位体積重量  $w_0 (= \rho g)$

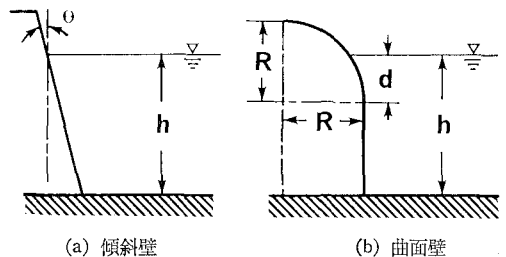


図-3 断面形状と記号の定義

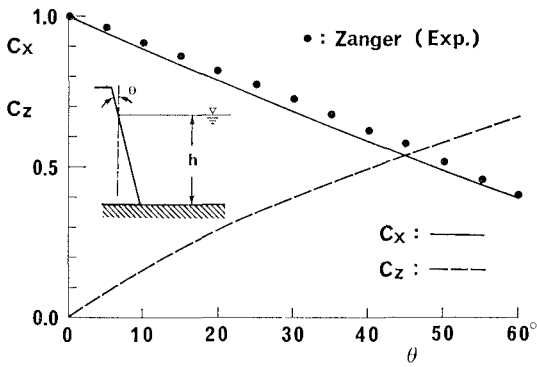


図-4 傾斜壁の地震時流体力係数の基本特性

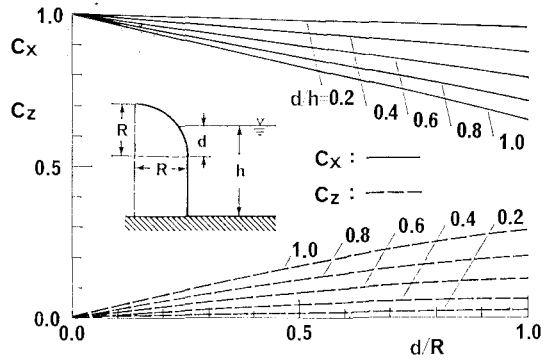


図-5 曲面壁の地震時流体力係数の基本特性

などを用いると、 $F_0$  は次のように簡単に求められる。

$$F_0 = 0.54275 w_0 h^2 K_h \dots\dots\dots (20)$$

図-4 は、傾斜壁に関する流体力係数を傾斜角の関数として示したものである。ただし、基本的な特性とその妥当性を見るために、流体を非圧縮性とし、表面波の発生の影響も無視している。そして、図中には同じ条件に相当する電気相似法によって行われた Zanger<sup>10)</sup> の実験結果を黒丸印で示してある。実験結果は傾斜角の関数として表されている係数  $c_m$  をグラフ<sup>11)</sup> から読み取り、 $\theta = 0^\circ$  のとき 1 となるように規準化してある。これからわかるように、理論は実験結果をよく説明しており、その妥当性が確認されたと考えられる。なお、Zanger の実験結果は  $\theta = 90^\circ$  まで示されているが、本理論では  $\theta = 60^\circ$  までが限界で、これ以上になると速度ポテンシャルの取束が悪くなり、精度も落ちる。本論文における級数は単精度で 6 項取っているだけなので、高精度計算にし、項数も増すことにより、計算可能な範囲をさらに広げること期待できるが、壁面の傾きが増すと式(17)における係数マトリクスの要素間の絶対値の差が大きくなり、必ずしも精度の向上につながらない可能性に注意する必要がある。

図-5 は曲面壁の流体力係数の特性を  $d/R$  の関数として示したもので、 $d/h$  をパラメータとしている。この場合も基本特性を示すために、流体の圧縮性および表面波発生の影響を無視している。ここで、 $d/R$  は没水曲面部分の曲率の大きさを表しており、 $d/R = 0$  は鉛直壁、 $d/R = 1$  は円断面の部分の頂部が静水面に一致する場合を表す。図から、 $d/R$  が大きいほど  $C_x$  は小さく、 $C_z$  は大きいことがわかる。また、 $d/h$  は堤体没水部分に占める曲面部の割合を示しており、 $d/h = 0$  は鉛直壁、 $d/h = 1$  は完全な円断面の場合を表す。やはり曲面部が多いほど  $C_x$  は小さく、 $C_z$  は大きいことがわかる。

以上、流体の圧縮性および表面波発生の影響を取り除いた流体力の基本特性、すなわち堤体の断面形状のみによって決まる特性について述べた。次に、流体の圧縮性

が流体力に及ぼす影響について述べる。

図-6 は傾斜壁に関する流体力係数を無次元周期  $\sqrt{\kappa/\rho} T/h$  の関数として示したもので、傾斜角をパラメータとしている。いずれの場合も、流体の圧縮性により、無次元周期が短くなるにつれて、流体力係数が増加することがわかる。この増加の割合は、無次元周期が短いほど大きく、水平、鉛直ともに  $\sqrt{\kappa/\rho} T/h = 10$  のところで約 4 ~ 6%、 $\sqrt{\kappa/\rho} T/h = 5$  で約 20 ~ 30% である。水中音速  $c (= \sqrt{\kappa/\rho})$  を 1475 m/s とし振動数を 5 Hz とすると、 $\sqrt{\kappa/\rho} T/h = 10$ 、5 のとき水深はそれぞれ 29.5 m、59 m である。したがって、大水深防波堤の地震時流体力の算定には、流体の圧縮性を考慮する必要があることがわかる。なお、この流体の圧縮性による流体力の増加の割合は、傾斜角が大きいほど小さくなるが、これは流体が傾斜壁面に沿って逃げ易くなるためと思われる。

ところで、無次元周期が長くなると流体の圧縮性の影響がなくなり、流体力係数が一定値となっているが、さらに長くなると表面波の発生の影響で逆に減少を始める。また、逆に無次元周期がここで示したよりも短くなると、このまま単調に増加するのではなく、式(6)で示した進行波の発生限界に対応した所でピークを持ち、これを越えると進行波が放出され、それに伴って流体力が

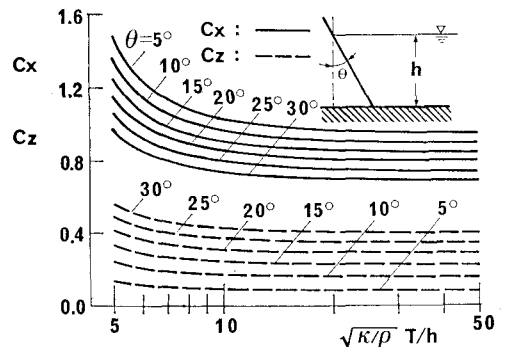


図-6 傾斜壁の流体力係数に及ぼす流体の圧縮性の影響

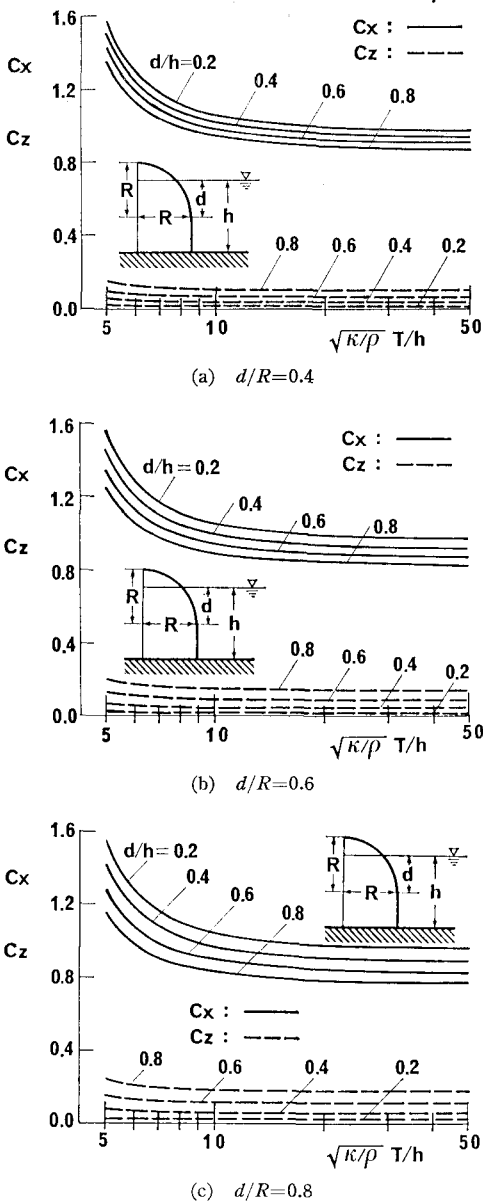


図-7 曲面壁の流体力係数に及ぼす流体の圧縮性の影響

減る。ただし、通常の地震の卓越振動数、および防波堤の設置水深の範囲では、表面波の発生の影響は無視できること、また一般に進行波の発生限界以下であることから、ここではこれらについての議論は省略する。

図-7 は同様な計算を曲面壁に対して行ったもので、 $d/h$ をパラメータとし、 $d/R$ が 0.4, 0.6, 0.8 の場合について結果を示してある。これより曲面壁の場合も無次元周期が短くなるにつれて流体力係数が大きくなるのがわかる。ただし、曲面壁の場合、その増加の割合は水平力と鉛直力で異なり、水平力係数は  $\sqrt{k/\rho} T/h=10$  のと

ころで約 7~9%,  $\sqrt{k/\rho} T/h=5$  で約 50~63% の増加であるのに対し、鉛直力係数はそれぞれ約 5~6%, および約 33~45% の増加である。また、図からは少し読み取りにくいだが、圧縮性による流体力の増加には  $d/h$  の方が  $d/R$  よりも大きく影響し、 $d/h$  の値が小さいほど増加の割合が大きい。そして、流体力係数は  $d/h$  および  $d/R$  が大きいほど小さい。これも流体が壁面に沿って逃げ易くなるためと思われる。

4. 結 語

圧縮性流体中の任意断面防波堤の水平振動による流体運動を速度ポテンシャルに関する境界値問題として定式化し、境界展開法によりその厳密解が求められることを示した。そして本理論を傾斜壁に作用する動水圧の算定に適用した結果、傾斜角度の影響については従来より用いられていた Zanger の実験式とほぼ同じ値が得られることが確かめられた。さらに本論文では、この実験式で考慮されていない流体の圧縮性の影響を明らかにした。また、大水深防波堤の断面形状の一つ、曲面壁の流体力係数の基本特性、およびそれに及ぼす流体の圧縮性の影響を系統的に調べた。この結果、没水部分に占める曲面部分の割合が大きくしかも曲率が大きいほど、流体力係数の値および流体の圧縮性の影響は小さいことが明らかとなった。

参 考 文 献

- 1) 谷本勝利・吉本 俊・岡 幸夫：大水深波浪制御構造物の水理特性と試設計，第32回海岸工学講演会論文集，pp. 515~519, 1985.
- 2) 谷本勝利・木村克俊・錦織誠司・田中典明：台形ケーソンの設計における波力の算定法，第32回海岸工学講演会論文集，pp. 550~554, 1985.
- 3) 清川哲志・小林 浩：面対称柱体の水中振動による付加質量特性の研究，土木学会論文報告集，No. 321, pp. 79~89, 1982.
- 4) 清川哲志・小林 浩：大型軸対称構造物の地震時付加質量，第29回海岸工学講演会論文集，pp. 452~456, 1982.
- 5) 清川哲志：流体の圧縮性を考慮した軸対称構造物の付加質量解析，第31回海岸工学講演会論文集，pp. 471~475, 1984.
- 6) 清川哲志：流体の圧縮性を考慮した面対称柱体の地震時動水圧，第32回海岸工学講演会論文集，pp. 560~564, 1985.
- 7) Hanna, Y. G. and Humar, J. L.: Boundary element analysis of fluid domain, Jour. of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 108, No. EM2, pp. 436~449, Apr., 1982.
- 8) Liu, P. L.-F. and Cheng, H.-D.: Boundary solution for fluid-structure interaction, Jour. of Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 110, No. 1, pp. 51~63, Jan., 1984.
- 9) 森口繁一・宇田川鈺久・一松 信：数学公式 II—級数・フーリエ解析一，岩波全書，pp. 39~41, 1968.
- 10) Zanger, C. H.: Hydrodynamic pressure on dams due to horizontal earthquake effects, U.S. Bureau of Reclamation, Engineering Monograph, No. 11, 1952.
- 11) 土木学会編：水理公式集，p. 343, 1985.