

大型軸対称海洋構造物の地震時付加質量

清川 哲志*・小林 浩**

1. はじめに

水中構造物の耐震設計上、地震時の付加質量を正確に算定することが不可欠である。

著者らは、大型海洋構造物の設計・開発に従事する立場より、この付加質量を算定する方法について検討してきた。しかし、海洋貯油タンク、石油生産プラットフォームなどの大型海洋構造物に適用できる解析法は比較的少なく、有限要素法¹⁾、グリーン関数法^{2),3)}等があるのみであった。しかもこれらはいずれも流体領域、あるいは構造物表面を有限要素分割して、大次元の行列演算を行うので、データ作成、計算時間の点で、必しも満足のものではなかった。

そこで著者らは、これらの問題を解決するために、構造物形状をある程度限定することにより、できるかぎり解析的なアプローチで、大型海洋構造物の付加質量の問題に適用できる理論解析法を導く努力をしてきた。この結果、く形断面、小判断面柱体などに適用できる理論を導き、これらの付加質量特性を明らかにした⁴⁾。本論文は、同じ立場から、構造物形状を軸対称に限定することにより、これが水中で振動するとき引き起こされる流体運動を、速度ポテンシャルに関する境界値問題として厳密に取り扱ったものである。論文中では、この理論展開を中心に述べ、最後にこの応用として、円すい台構造物の付加質量特性について検討を加える。

2. 基礎方程式・境界条件および一般解

水深が一定の水域に、鉛直軸対称構造物があり、これが水中で調和振動を行う場合を考える。構造物の振動によって生じる流体の運動は非回転であるとして、これを速度ポテンシャルによって記述する。また、構造物の振動と、これに伴う流体運動はともに微小であるとし、線形理論による解析を行う。そして、問題の性質からこれらを図-1に示す円筒座標で記述する。このとき、速度ポテンシャルを $\phi(r, \theta, z) \cdot e^{i\omega t}$ とすると、 $\phi(r, \theta, z)$ は次の基礎方程式と境界条件を満たす関数として求められ

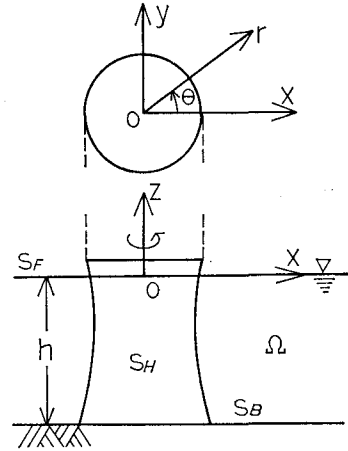


図-1 座標系の定義

る。ただし、 ω は角振動数、 i は虚数単位 ($\equiv \sqrt{-1}$) である。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \dots\dots (1)$$

$$\partial \phi / \partial z - (\omega^2 / g) \phi = 0 \quad (\text{on } S_F) \dots\dots (2)$$

$$\partial \phi / \partial z = 0 \quad (\text{on } S_B) \dots\dots (3)$$

$$\partial \phi / \partial n = -n_r a_0 \omega \cdot \cos \theta \quad (\text{on } S_H) \dots\dots (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} (\partial \phi / \partial r - ik \phi) = 0 \dots\dots (5)$$

ここに、 a_0 : 構造物の変位振幅、 g : 重力加速度、 n_r : 構造物表面の単位法線ベクトルの r 成分、 k : 波数 ($k \cdot \tanh kh = \omega^2 / g$ の実正根) である。また、 n に関する微分は、構造物表面における法線方向微分を表わす。

基礎方程式 (1) は流体内部 Ω での流体の連続性を表わし、式 (2) は自由表面 S_F 上での運動学的・力学的条件、式 (3) は海底面 S_B における不透過条件、式 (4) は構造物表面 S_H における構造物表面と流体の運動速度の連続性を表わしている。また、式 (5) は無限遠方で課せられる放射条件である。

基礎方程式 (1) と境界条件 (2)~(5) を満たす解は、 θ に関して対称であることと、周期 2π の周期関数となることは明らかである。 θ に関するこれらの性質を持つ関数は、次のようにフーリエ余弦級数で表わすことがで

* 正会員 清水建設(株)研究所 海洋研究部研究員
 ** 正会員 Eng.Sc.D. 清水建設(株)研究所 海洋研究部主席研究員

きる。

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(r, z) \cdot \cos m\theta \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\varphi^{(m)}(r, z)$ はフーリエ級数の第 m 項に対応したフーリエ係数で、 r と z の関数である。

式 (6) を式 (1) に代入して整理すると、 $\varphi^{(m)}(r, z)$ に関して、次の偏微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \varphi^{(m)} + \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial z^2} = 0$$

(in Ω).....(7)

また、同様に式 (6) を境界条件 (2), (3) および放射条件 (5) に代入して整理すると以下のようになる。

$$\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial z} - (\omega^2/g) \varphi^{(m)} = 0 \quad (\text{on } S_F) \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial z} = 0 \quad (\text{on } S_B) \dots\dots\dots (9)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} (\partial \varphi^{(m)} / \partial r - ik \varphi^{(m)}) = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$\varphi^{(m)}(r, z)$ に関する方程式 (7) を満足し、式 (8)~(10) を満足する解を、変数分離法によって求めた固有関数の重ね合せで表わし、これを速度ポテンシャルのフーリエ展開式 (6) に代入すると次式が得られる。

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_m(k_n r) - i A_0^{(m)} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} H_m^{(2)}(kr) \right\} \cdot \cos m\theta \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 K_m : 第 2 種変形ベッセル関数、 $H_m^{(2)}$: 第 2 種ハンケル関数、 k_n : 固有値 ($k_n \tan k_n h = -\omega^2/g$ の実正根、 $k_1 < k_2 < \dots$)、 $A_n^{(m)}$: 複素係数である。

上式は、基礎方程式 (1) を満足し、かつ境界条件 (2), (3) および放射条件 (5) を満足しており、軸対称構造物による放射問題の一般解である。

3. 構造物表面条件の固有関数による展開と未定係数の決定

一般解 (11) 中の未定係数 $A_n^{(m)}$ ($n, m=0, 1, \dots$) は、個々の構造物形状に対応して、式 (11) が構造物表面で境界条件 (4) を満足するように決めればよい。

境界条件 (4) における法線方向微分 $\partial/\partial n$ は、一般に単位法線ベクトルの成分 n_r, n_θ, n_z を用いて表わすことができるが、軸対称構造物の表面では常に $n_\theta=0$ であるので、次のように表わすことができる。

$$\frac{\partial}{\partial n} = n_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + n_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{on } S_H) \dots\dots\dots (12)$$

一般解 (11) を境界条件 (4) に代入し、式 (12) の関係を用いると次のようになる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[n_r \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_m'(k_n r) - i A_0^{(m)} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} H_m^{(2)'}(kr) \right\} - n_z \cdot \left\{ k_n A_n^{(m)} \frac{\sin k_n(h+z)}{\sin k_n h} K_m(k_n r) \right. \right.$$

$$\left. \left. + ik A_0^{(m)} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} H_m^{(2)}(kr) \right\} \right] \cdot \cos m\theta = -n_r a_0 \omega \cdot \cos \theta \quad (\text{on } S_H) \dots\dots\dots (13)$$

この式より、フーリエ展開に関しては $m=1$ 以外の項はすべて 0 であるべきことがわかる。すなわち $m \neq 1$ のとき $A_n^{(m)}=0$ である。ただし、上式で $K_m'(k_n r)$ 、 $H_m^{(2)'}(kr)$ などは、それぞれ r に関する偏微分を表わす。

したがって、ここで

$$\left. \begin{aligned} K_1'(k_n r) &= -(k_n/2) \cdot \{K_0(k_n r) + K_2(k_n r)\} \\ H_1^{(2)'}(kr) &= (k/2) \cdot \{H_0^{(2)}(kr) - H_2^{(2)}(kr)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

の関係を用いると、式 (13) から次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} n_r \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{k_n}{2} \cdot \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \{K_0(k_n r) + K_2(k_n r)\} + i A_0^{(1)} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot \{H_0^{(2)}(kr) - H_2^{(2)}(kr)\} \right] \\ + n_z \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} k_n A_n^{(1)} \frac{\sin k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_1(k_n r) + ik A_0^{(1)} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} H_1^{(2)}(kr) \right] = n_r a_0 \omega \end{aligned} \quad (\text{on } S_H) \dots\dots\dots (15)$$

これは構造物表面での境界条件が変形されたもので、構造物表面上の任意の点で成り立たねばならない。

ところで、軸対称構造物の場合、構造物表面上で r, n_r, n_z 等は θ に無関係であり、 z のみによって決まる (図-2 参照)。すなわち、これらは次式のように $-h \leq z \leq 0$ において定義される z の関数として表わすことができる。

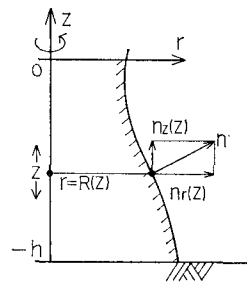


図-2 構造物表面上の n_r, n_z, r

$$\left. \begin{aligned} r &= R(z) \\ n_r &= n_r(z) \\ n_z &= n_z(z) \end{aligned} \right\} \quad (-h \leq z \leq 0) \dots\dots\dots (16)$$

したがって、式 (15) は見掛け上 r と z の関数であるが、実際は両辺とも z のみの関数であって、境界条件 (4) 式構造物表面上の任意の点で成り立つということと、(15) が $-h \leq z \leq 0$ なる任意の z に対して成り立つということは同値である。

ここで,

$$F_n(z) = \begin{cases} \frac{ik}{2 \cosh kh} [n_r(z) \cdot \cosh k(h+z) \cdot \{H_0^{(2)}(kR(z)) - H_2^{(2)}(kR(z))\} \\ \quad + 2n_z(z) \cdot \sinh k(h+z) \cdot H_1^{(2)}(kR(z))] & (n=0) \\ \frac{k_n}{2 \cos k_n h} [n_r(z) \cdot \cos k_n(h+z) \cdot \{K_0(k_n R(z)) + K_2(k_n R(z))\} \\ \quad + 2n_z(z) \cdot \sin k_n(h+z) \cdot K_1(k_n R(z))] & (n \geq 1) \end{cases} \dots\dots\dots(17)$$

とおくと, 式 (15) は次のように書くことができる.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \cdot F_n(z) = a_0 \omega \cdot n_r(z) \dots\dots\dots(18)$$

この両辺は, すでに述べたとおり, とともに $-h \leq z \leq 0$ で定義された z の関数である. 任意の関数が固有関数で展開できることから, この左辺, および右辺の $n_r(z)$ はそれぞれ次のように表わすことができる.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \cdot F_n(z) \\ = b_0 \cdot \cosh k(h+z) + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cdot \cos k_l(h+z) \\ n_r(z) = c_0 \cdot \cosh k(h+z) + \sum_{l=1}^{\infty} c_l \cdot \cos k_l(h+z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

ここに, $b_l, c_l (l=0, 1, \dots)$ はフーリエ係数で, 次式によって求められる.

$$b_l = \begin{cases} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \int_{-h}^0 F_n(z) \cdot \cosh k(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cosh^2 k(h+z) dz} & (l=0) \\ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \int_{-h}^0 F_n(z) \cdot \cos k_l(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cos^2 k_l(h+z) dz} & (l \geq 1) \end{cases} \dots\dots\dots(20)$$

$$c_l = \begin{cases} \frac{\int_{-h}^0 n_r(z) \cdot \cosh k(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cosh^2 k(h+z) dz} & (l=0) \\ \frac{\int_{-h}^0 n_r(z) \cdot \cos k_l(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cos^2 k_l(h+z) dz} & (l \geq 1) \end{cases} \dots\dots\dots(21)$$

式 (19)~(21) を考慮すると, 式 (18) が $-h \leq z \leq 0$ なる任意の z に対して成り立つためには, 次の関係式が成り立てばよいことがわかる.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \int_{-h}^0 F_n(z) \cdot \cosh k(h+z) dz \\ = a_0 \omega \int_{-h}^0 n_r(z) \cdot \cosh k(h+z) dz \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \int_{-h}^0 F_n(z) \cdot \cos k_l(h+z) dz \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} = a_0 \omega \int_{-h}^0 n_r(z) \cdot \cos k_l(h+z) dz \\ (l=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

これを行列表示すると次のようになる.

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1j} & \dots \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ d_{i1} & d_{i2} & \dots & d_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0^{(1)} \\ A_1^{(1)} \\ \vdots \\ A_{i-1}^{(1)} \\ \vdots \end{bmatrix} = a_0 \omega \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \end{bmatrix} \dots\dots\dots(23)$$

ただし, 行列の要素 d_{ij} , およびベクトルの要素 α_i は, それぞれ次式で定義される.

$$d_{ij} = \begin{cases} \int_{-h}^0 F_{j-1}(z) \cdot \cosh k(h+z) dz & (i=1, j \geq 1) \\ \int_{-h}^0 F_{j-1}(z) \cdot \cos k_{i-1}(h+z) dz & (i \geq 2, j \geq 1) \end{cases} \dots\dots\dots(24)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \int_{-h}^0 n_r(z) \cdot \cosh k(h+z) dz & (i=1) \\ \int_{-h}^0 n_r(z) \cdot \cos k_{i-1}(h+z) dz & (i \geq 2) \end{cases} \dots\dots\dots(25)$$

式 (23) は未定係数 $A_n^{(1)} (n=0, 1, \dots)$ が満たすべき無限次元複素係数連立1次方程式である. 一般解 (11) における固有関数列は収束級数をなすので, 必要な精度に応じて式 (23) を適当な n について解けば未定係数が定まる.

4. 動水圧と付加質量

任意点の動水圧は, 一般化されたベルヌーイの定理から求められ, 線形理論の範囲では次式によって表わすことができる.

$$p(r, \theta, z, t) = -i \rho \omega e^{i \omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_n^{(1)} \cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_1(k_n r) \right\}$$

$$-iA_0^{(1)} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} H_1^{(2)}(kr) \Big\} \cdot \cos \theta \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 $A_n^{(1)}$ ($n=0, 1, \dots$) は式 (23) の解として得られる。また、 ρ は流体密度である。

動水圧によって構造物の単位長さあたりに作用する流体力の水平成分を f とすると、 f は次式によって求められる。

$$f(z, t) = \int_0^{2\pi} p(R(z), \theta, z, t) \cdot n_r(z) \cdot \cos \theta \cdot R(z) d\theta \dots\dots\dots (27)$$

ただし、 $n_r(z)$ 、 $R(z)$ は、式 (16) で定義される単位法線ベクトルの r 成分、および構造物の中心軸から構造物表面までの距離である。

この積分を実行すると次式が得られる。

$$f(z, t) = -i\rho\omega\pi \cdot R(z) \cdot n_r(z) \cdot e^{i\omega t} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_1(k_n R(z)) - iA_0^{(1)} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} H_1^{(2)}(kR(z)) \right\} \dots\dots\dots (28)$$

また、深さ z における単位長さあたりの付加質量 m_v は次式によって求められる。

$$m_v(z) = \frac{\rho\pi \cdot R(z) \cdot n_r(z)}{a_0\omega} \left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \cdot K_1(k_n R(z)) - iA_0^{(1)} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot H_1^{(2)}(kR(z)) \right| \dots\dots\dots (29)$$

構造物全体の付加質量は、これを海底から水面まで積分することによって得られる。

5. 数値計算例と考察

本解析法の適用例として、図-3 に示すような円すい台構造物の付加質量特性について検討した。これを述べる前に、本解析法による解の収束性について調べた結果を示す。図-4 は D_1/D_2 を変化させ、各 D_1/D_2 に対しての収束性を調べたもので、横軸に展開項数、縦軸に水底における付加質量係数をとっている。この図からわかるように、 D_1/D_2 の値によって収束の速さに若干の違い

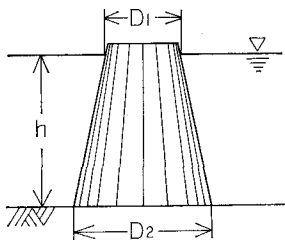


図-3 円すい台構造物の例

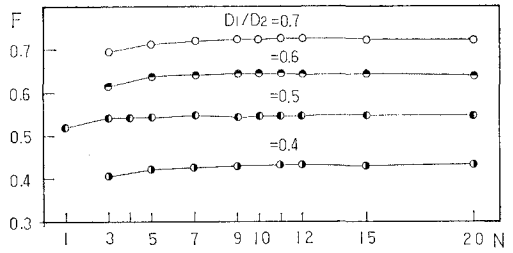


図-4 展開項数と付加質量係数の関係

はあるものの、いずれも展開項数を増すことによって一定値に収束している。これと関連して、展開項数による解の精度を調べたのが図-5で、横軸に展開項数、縦軸

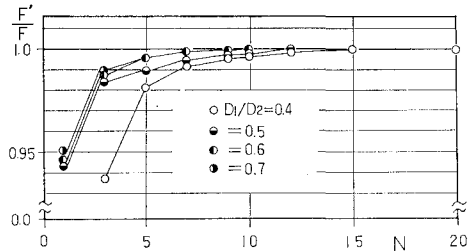


図-5 展開項数と精度の関係

に収束値との比をとって示してある。この図から、展開項数を 10 項もとれば解の精度は真値の 99% 以上となり、わずかの計算で高精度が期待できることがわかる。また、計算値は項数の増加に伴って低い方から真値に収束していることもわかる。

さて、このようにして円すい台構造物の付加質量係数 $F (=m_v/\rho\pi R^2)$ の水深方向分布を求めてみたのが図-6である。これらはそれぞれ $h/D_1=2.0, 4.0$ の場合で、 D_1/D_2 をパラメーターとして示してある。これらの図に見られるように、円すい台構造物の場合、一様断面柱と異なって、付加質量係数は水深方向に一樣に大きくなるのではなく、海底と水面との中間に極大値を持つような分布性状となることがわかる。また D_1/D_2 が 1 に近づくほど、換言すれば一様断面柱体に近くなるほど、付加質量係数は大きくなることもわかる。

図-7 は付加質量係数の振動数特性を示したもので、横軸に無次元化振動数 $\omega^2\sqrt{D_2h}/g$ 、縦軸に付加質量係数 F をとっている。図中、実線が $|z/h|=1.0$ 、破線が 0.5 の場合で、それぞれ海底および中間点における付加質量係数を示している。図にみられるように、 $\omega^2\sqrt{D_2h}/g$ の増加に伴って付加質量係数は一定値となり、振動数の影響を受けなくなることがわかる。また、低振動数領域で大きく値が変化しているのは表面波の影響と思われる。なお、いずれにしても大型海洋構造物の場合、地震の卓越振動数は、付加質量係数が振動数に依存しない一定領域にあることを付言しておきたい。

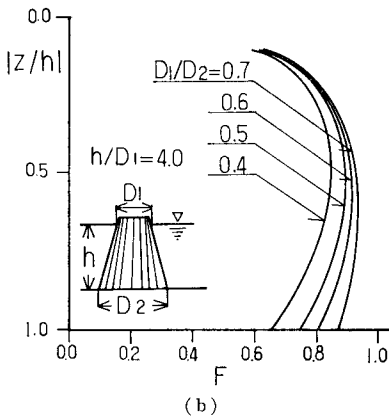
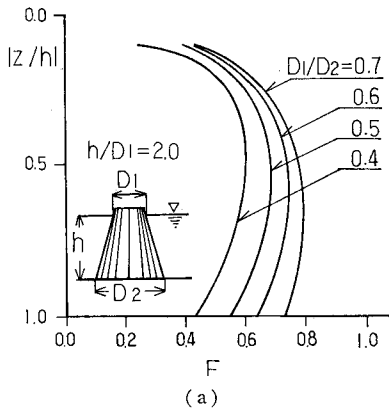


図-6 付加質量係数の鉛直分布

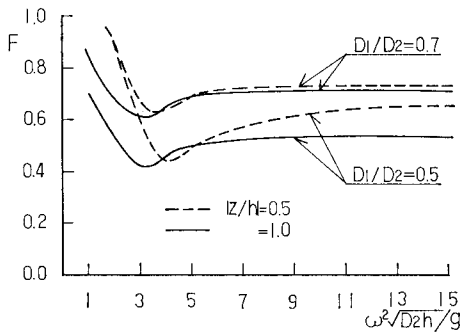


図-7 付加質量係数の振動数特性

6. 結 語

以上、本論文では軸対称構造物の水中振動による放射問題の厳密解を得る方法を中心に、この応用として円すい台構造物の地震時付加質量特性などについて述べた。

この研究は、著者らの創案になる“境界展開法”による境界値問題の解法を応用した一連の研究の延長上にあるもので、地震時付加質量の問題としては、今までに面対称柱体に関する理論を導き、これを用いて、く形断面および小判型断面などを有する一様断面柱体の付加質量特性を明らかにしてきた⁴⁾⁵⁾。今回は、軸対称構造物に関する理論を導き、水中橋脚、海中展望塔、取水塔、人工島などの形状として考えられる円すい台構造物の付加質量特性について検討した。この結果、円すい台構造物の付加質量係数は、一様断面柱体のように水深方向に一樣に大きくなるのではなく、水面と海底の間に極大値を持つような分布性状となることなどが明らかとなった。

なお、本論文では理論展開を中心に述べたので、適用例としては一例を紹介するにとどまり、軸対称構造物の他の形状については言及することができなかったが、これについては別の機会にゆずる。

最後に、日頃御指導いただいている、東京工業大学日野幹雄教授、並びに本研究における数値計算および図面の作成に協力された、東京理科大学学生道下隆信君に感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Nirat, F.: Hydrodynamic pressure and added mass for axisymmetric body, UCB/ERRC-80/12, 1980.
- 2) Garrison, C. J. and R. B. Berkliite: Impulsive hydrodynamics of submerged rigid bodies, J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 99, pp. 99~100, 1981.
- 3) 喜岡 渉: 大型海洋構造物に作用する地震時付加質量, 第28回海岸工学講演会論文集, pp. 609~613, 1981.
- 4) 清川哲志・小林 浩: 面対称柱体の水中振動による付加質量特性の研究, 土木学会論文報告集第321号, pp. 79~90, 1982.
- 5) 清川哲志・小林 浩: 小判型断面柱体の付加質量特性, 土木学会第37回年次学術講演会講演概要集第2部, 1982.