

論文

はさみ込み法による異方性多層版の数値解析

廣瀬清泰*, 樋口慶太郎**, 河野一資***, 堀川都志雄****

*(株)井沢設計, 技術部 (〒581-0019 大阪府八尾市南小阪合町 5-8-30)

**(株)構造メンテ 営業部次長 (〒651-0072 兵庫県神戸市中央区脇浜町 2-11-4)

*** (株)構造メンテ 顧問 (〒651-0072 兵庫県神戸市中央区脇浜町 2-11-4)

****工博, 大阪工業大学名誉教授 (〒522-0056 彦根市開出今町 1488-11)

変位関数による等方性多層版の級数解法には, 応力法と変位法が挙げられる. 例えばL層からなる多層版の場合, 界面の伝達力を未知量におく応力法では, $3 \times (L - 1)$ 元の連立方程式が形成され, 元数の増大に伴う計算精度が問題点になる. また任意層が異方性体である多層版に対しては, 異方性の変位関数の導入が不可欠となる. そこで異方性多層版を対象に, 連立方程式の元数を最小限に留める「はさみ込み法」の拡張と適用を試みる.

キーワード: 異方性体, 変位関数, 多層版, はさみ込み法

1. はしがき

等方弾性体の変位関数に基づく等方性多層版の級数解法には, 界面の伝達力を未知量とする応力法と, 界面の変位を未知量におく変位法が挙げられる. 応力法は界面での剥離現象等の問題に, 変位法は最下面の任意領域で剛支持される問題で用いられてきた¹⁾²⁾. 各層内で一般的な弾性定数が層厚方向のみに変化する場合には威力を発揮するが, 層の水平面内で弾性定数が異なる, いわゆる異方性を顕す場合への適用は不適合になる. 異方性を伴う問題に対しては, 異方性が考慮できる変位関数の開発が望まれる.

本研究では①直交異方性体³⁾における独立な弾性定数9個を低減した異方性体(以下, Huber型異方性体という)での物体力に対応する変位関数を誘導し, Fourier級数展開による異方性多層版の適用を試みる. ②調和解析法による従来の計算手法では, 層数に呼応した連立方程式が形成されるのに伴う計算精度上の誤差が混入することがある. そこで元数が6の最小連立方程式に留まる伝達マトリックス級数法⁴⁾(以下, はさみ込み法という)の異方性体への拡張を図る. ③等分布荷重を受ける異方性多層版や, 部分荷重下での各層の弾性定数が異なる多層版を例に, はさみ込み法の結果と応力法や単一版による数値との比較から本方法の妥当性を調べる. ④各層の強軸方向(弾性定数の大きい方向)が交互に直交して構成される異方性多層版に部分荷重が作用する場合での変位や応力の挙動が, 等方性に比べてどの程度の影響があるのかを明らかにする.

2. 異方性体における変位関数の誘導

xとy方向の弾性定数 E_x と E_y との比を異方性パラメータ α で表せば, Huber型異方性体でのフックの法則は式(1)で示される.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \sqrt{\alpha}\lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, \tau_{xy} = \sqrt{\alpha}\mu\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \sqrt{\alpha}\lambda\varepsilon_x + \alpha(\lambda + 2\mu)\varepsilon_y + \sqrt{\alpha}\lambda\varepsilon_z, \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz} \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + \sqrt{\alpha}\lambda\varepsilon_y + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z, \tau_{yz} = \sqrt{\alpha}\mu\gamma_{yz} \end{aligned} \right\} (1)$$

ここで, λ, μ : 等方性体のラメの定数, $\alpha = E_y/E_x$

式(1)を応力のつり合い式に代入すれば, 物体力を伴うNavierの式が得られる.

$$\begin{aligned} \{(\lambda + 2\mu)\partial_x^2 + \sqrt{\alpha}\mu\partial_y^2 + \mu\partial_z^2\}u + \sqrt{\alpha}(\lambda + \mu)\partial_x\partial_yv \\ + (\lambda + \mu)\partial_x\partial_zw = -B_x, \\ \sqrt{\alpha}(\lambda + \mu)\partial_x\partial_yu + \{\sqrt{\alpha}\mu\partial_x^2 + \alpha(\lambda + 2\mu)\partial_y^2 + \sqrt{\alpha}\mu\partial_z^2\}v \\ + \sqrt{\alpha}(\lambda + \mu)\partial_y\partial_zw = -B_y, \\ (\lambda + \mu)\partial_x\partial_zu + \sqrt{\alpha}(\lambda + \mu)\partial_y\partial_zv \\ + \{\mu\partial_x^2 + \sqrt{\alpha}\mu\partial_y^2 + (\lambda + 2\mu)\partial_z^2\}w = -B_z \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, B_x, B_y, B_z : x, y, z方向の物体力,

u, v, w : x, y, z方向の変位,

物体力 B_z に対応する変位関数のz方向成分の組 (f_3, θ_3) と変位の関係式を, 式(3)のように仮定する.

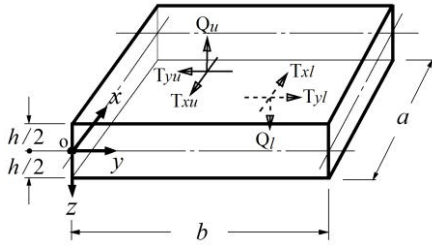


図-1 座標および形状

$$\begin{aligned} 2\mu u &= -\partial_x \partial_z f_3 + \sqrt{\alpha} \partial_y \theta_3, \\ 2\mu v &= -\partial_y \partial_z f_3 - \partial_x \theta_3, \\ 2\mu w &= (\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu) [\partial_x^2 + \sqrt{\alpha} \partial_y^2 \\ &\quad + \mu/(\lambda + 2\mu) \partial_z^2] f_3 \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)を式(2)に代入すれば、変位関数 f_3 と θ_3 の基礎式が得られる。

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \sqrt{\alpha} \partial_y^2 + \partial_z^2)^2 f_3 &= -2(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) B_x, \\ (\partial_x^2 + \sqrt{\alpha} \partial_y^2 + \partial_z^2) \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式(1)の弾性定数はエネルギー正值の条件を満足し、 $\alpha=1$ のとき式(4)の変位関数 f_3 と θ_3 はそれぞれ等方性体での Galerkin ベクトルと Boussinesq の関数の z 方向成分に帰着する。

同様にして物体力 B_x と B_y に対応する変位関数の x, y 方向成分の組 (f_1, θ_1) と (f_2, θ_2) の基礎式、およびそれらに関連する変位との関係式が得られる。

・物体力 B_x

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \sqrt{\alpha} \partial_y^2 + \partial_z^2)^2 f_1 &= -2(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) B_x, \\ (\partial_x^2 + \sqrt{\alpha} \partial_y^2 + \partial_z^2) \theta_1 &= 0, \\ 2\mu u &= (\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu) [\mu/(\lambda + 2\mu) \partial_x^2 \\ &\quad + \sqrt{\alpha} \partial_y^2 + \partial_z^2] f_1, \\ 2\mu v &= -\partial_x \partial_y f_1 + \partial_z \theta_1, \\ 2\mu w &= -\partial_x \partial_z f_1 - \sqrt{\alpha} \partial_y \theta_1 \end{aligned} \quad (5)$$

・物体力 B_y

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} (\partial_x^2 + \sqrt{\alpha} \partial_y^2 + \partial_z^2)^2 f_2 &= -2(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) B_y, \\ (\partial_x^2 + \sqrt{\alpha} \partial_y^2 + \partial_z^2) \theta_2 &= 0, \\ 2\mu u &= -\sqrt{\alpha} \partial_x \partial_y f_2 + \partial_z \theta_2, \\ 2\mu v &= (\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu) [\partial_x^2 + \mu/(\lambda + 2\mu) \partial_y^2 \\ &\quad + \partial_z^2] f_2, \\ 2\mu w &= -\sqrt{\alpha} \partial_y \partial_z f_2 + \partial_x \theta_2 \end{aligned} \quad (6)$$

また式(2)の物体力にダランベールの原理による慣性を考慮すれば、動的問題における変位関数が誘導できる。その結果を付録に記す。

3. 異方性体での変位関数の級数表示

異方性版の x と y 座標の原点を版の隅角点に、 z 座標を版の中央面に置き、また上下面に作用する表面力を図-1に示す。変位関数 f_3 と θ_3 を三角級数で展開すれば、 $E_y \geq E_x$ での式が求められる。

1) MODE-M ($E_y \geq E_x$)

$$\begin{aligned} f_3 &= \sum \sum [C_1 \operatorname{ch} \gamma z + C_2 \operatorname{sh} \gamma z \\ &\quad + C_3 \gamma z \operatorname{ch} \gamma z + C_4 \gamma z \operatorname{sh} \gamma z] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \theta_3 &= \sum \sum [C_5 \operatorname{ch} \gamma z + C_6 \operatorname{sh} \gamma z] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\gamma^2 = \alpha_m^2 + \sqrt{\alpha} \beta_n^2$,
 $\alpha_m = m\pi/a$ ($m=0, 1, 2, 3 \dots$),
 $\beta_n = n\pi/b$ ($n=0, 1, 2, 3 \dots$),
 $\operatorname{ch} \gamma z = \cosh \gamma z$, $\operatorname{sh} \gamma z = \sinh \gamma z$,
 a, b : x, y 方向のスパン, $C_1 \sim C_6$: 版の上下面の境界条件から決定される積分定数

級数の各項で成立させる調和解析法を用いれば、応力法による第 i 層の上下面の変位ベクトル \mathbf{U}^i は、上下面の伝達力ベクトル \mathbf{X} と関連づけられる。なお上添字 u は上面を、 l は下面を意味する。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}^u \\ \mathbf{U}^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}^u \\ \mathbf{X}^l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{23} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{U} = \{u, v, w\}^T$, $\mathbf{X} = \{T_x, T_y, T_z\}^T$,
 \mathbf{a}_{ij} : 3×3 の正方行列 ($i, j=1, 2$)
 \mathbf{a}_{i3} : 物体力による 3×1 の荷重ベクトル ($i=1, 2$)

例えば \mathbf{a}_{11} の要素 d_{kl} ($k, l=1, 3$) は次のように示される。

$$\begin{aligned} 2\mu d_{11} &= D_2 \alpha_m^2 / \gamma^3, & 2\mu d_{12} &= D_3 \alpha_m \beta_n / \gamma^3 \\ 2\mu d_{13} &= D_1 \alpha_m / \gamma^2, & 2\mu d_{21} &= D_3 \alpha_m \beta_n / \gamma^3 \\ 2\mu d_{22} &= D D_2 \beta_n^2 / \gamma^3, & 2\mu d_{23} &= D_1 \beta_n / \gamma^2 \\ 2\mu d_{31} &= D_1 \alpha_m / \gamma^2, & 2\mu d_{32} &= D_1 \beta_n / \gamma^2, \\ 2\mu d_{33} &= D_4 / \gamma \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} D_1 &= (1 - \nu)(1/D_m + 1/D_p) \\ D_2 &= (1 - \nu)(\operatorname{th} \zeta / D_m + \operatorname{ct} \zeta / D_p) \\ &\quad - \beta_n^2 (\operatorname{th} \zeta + \operatorname{ct} \zeta) / \sqrt{\alpha} \alpha_m^2 \\ D D_2 &= (1 - \nu)(\operatorname{th} \zeta / D_m + \operatorname{ct} \zeta / D_p) \\ &\quad - \sqrt{\alpha} \alpha_m^2 (\operatorname{th} \zeta + \operatorname{ct} \zeta) / \beta_n^2 \\ D_3 &= (1 - \nu)(\operatorname{th} \zeta / D_m + \operatorname{ct} \zeta / D_p) + (\operatorname{th} \zeta + \operatorname{ct} \zeta) \\ D_4 &= (1 - \nu)(\operatorname{ct} \zeta / D_m + \operatorname{th} \zeta / D_p) \\ D_p &= \zeta (\operatorname{th} \zeta - \operatorname{ct} \zeta) - 1, & D_m &= \zeta (\operatorname{ct} \zeta - \operatorname{th} \zeta) - 1 \\ \operatorname{th} \zeta &= \tanh \zeta, & \operatorname{ct} \zeta &= \coth \zeta, & \zeta &= \gamma h / 2 \end{aligned}$$

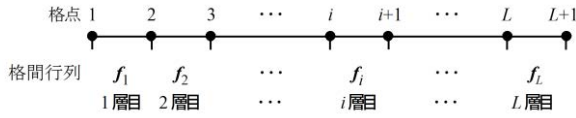


図-2 格点番号と格間行列

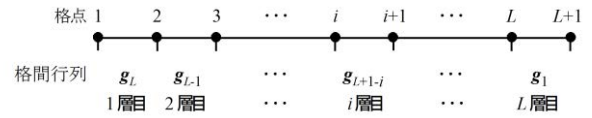


図-3 格点番号と格間行列

変位法についても同様に次式で示される。

$$\begin{Bmatrix} X^u \\ X^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^u \\ U^l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 b_{ij} : 3×3 の正方行列 ($i, j=1, 2$)

b_{i3} : 物体力による 3×1 の荷重ベクトル ($i=1, 2$)

今 L 層からなる多層版を考えると、多層版の最上面を第 1 界面と名付ければ、最下面は第 $(L+1)$ 界面と位置づけられる。多層版内部の界面に作用する伝達力 X を未知量とする応力法の例では、 $3 \times (L-1)$ 元の連立方程式が形成される。層数 L が多くなれば大きな次元の連立方程式となり、計算精度上で問題点となる。

2) MODE-D ($E_y < E_x$)

同様にして変位関数 f_3 と θ_3 の展開式(7')が求められる。

$$f_3 = \sum \sum [C_1 \text{ch}\gamma z + C_2 \text{sh}\gamma z + C_3 \gamma z \text{ch}\gamma z + C_4 \gamma z \text{sh}\gamma z] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$\theta_3 = \sum \sum [C_5 \text{ch}\gamma z + C_6 \text{sh}\gamma z] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (7')$$

$$\text{ここで、} \gamma^2 = \sqrt{\beta} \alpha_m^2 + \beta_n^2$$

4. はさみ込み法の誘導

式(8)下段の式の両辺に a_{21}^{-1} を乗じて変形すれば、式(11)が得られる。

$$\begin{aligned} a_{21}^{-1} U^l &= X^u + a_{21}^{-1} a_{22} X^l + a_{21}^{-1} a_{23} \\ \therefore X^u &= a_{21}^{-1} U^l - a_{21}^{-1} a_{22} X^l - a_{21}^{-1} a_{23} \end{aligned} \quad (11)$$

同様にして、式(12)が得られる。

$$X^l = a_{12}^{-1} U^u - a_{12}^{-1} a_{11} X^u - a_{12}^{-1} a_{13} \quad (12)$$

また変位法の式(10)より、式(13)が導かれる。

$$\begin{aligned} U^u &= -b_{21}^{-1} b_{22} U^l + b_{21}^{-1} X^l - b_{21}^{-1} b_{23}, \\ U^l &= -b_{12}^{-1} b_{11} U^u + b_{12}^{-1} X^u - b_{12}^{-1} b_{13} \end{aligned} \quad (13)$$

伝達マトリックス法の形式となるように式(11)~(13)を組み合わせ、上面 u を格点 i に、下面 l を格点 $(i+1)$ に置き換えれば、格点 i の状態量 $\{U, X, 1\}_i^T$ と格点 $(i+1)$ の状態量を $\{U, X, 1\}_{i+1}^T$ を結びつける関係が求められる(図-2)。

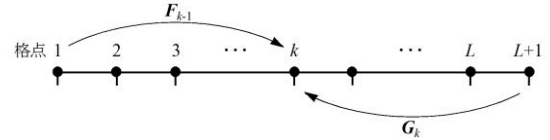


図-4 格点 k と最左右端の格点との模式図

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_i &= \begin{bmatrix} -b_{21}^{-1} b_{22} & b_{21}^{-1} & -b_{21}^{-1} b_{23} \\ a_{21}^{-1} & -a_{21}^{-1} a_{22} & -a_{21}^{-1} a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} \\ &= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = [f_i] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 f_{ij} : 3×3 の正方行列 ($i, j=1, 2$),

f_{i3} : 3×1 の列ベクトル ($i=1, 2$),

$[f_i]$: 7×7 の格間行列

同様にして格点 $(i+1)$ と格点 i との関係が得られる(図-3)。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} &= \begin{bmatrix} -b_{12}^{-1} b_{11} & b_{12}^{-1} & -b_{12}^{-1} b_{13} \\ a_{12}^{-1} & -a_{12}^{-1} a_{11} & -a_{12}^{-1} a_{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_i \\ &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_i = [g_{L+1-i}] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_i \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 g_{ij} : 3×3 の正方行列 ($i, j=1, 2$),

g_{i3} : 3×1 の列ベクトル ($i=1, 2$),

$[g_{L+1-i}]$: 7×7 の格間行列

式(14)より、左側の格点から右側の格点へ伝達する関係式が順次得られる。

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = [f_1] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_2, \quad \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_2 = [f_2] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_3, \quad \dots$$

格点 1 と最右端の格点 $L+1$ との関係式が求められる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_1 &= [f_1] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_2 = [f_1][f_2] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_3 \\ &= [f_1][f_2] \cdots [f_L] \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{L+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = \prod [f_i] \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_{L+1} \quad (16)$$

ここで、 \prod : 乗積 ($i=1, L$)

同様にして、

$$\therefore \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_{L+1} = \prod [g_{L+1-i}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_1 \quad (17)$$

通常の伝達マトリックス法では、例えば最右端の格点 ($L+1$) での状態量 $\{\mathbf{U}, \mathbf{X}, 1\}_{L+1}^T$ を決定した後に、順次内部の格点での状態量を求める操作中で誤差が積み重なり、正確な状態量を算出し難いことが知られている。そこでサブストラクチャー法と同様の考え方によるはさみ込み法を導入する。式(16)と(17)を参照して、任意の格点 k での状態量 $\{\mathbf{U}, \mathbf{X}, 1\}_k^T$ は式(18)、および(19)のように示される (図-4)。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_1 &= \prod [f_{k-1}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_k = [F_{k-1}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_k \\ &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_k \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_{L+1} &= \prod [g_{L+1-k}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_k = [G_K] \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_k \\ &= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{Bmatrix}_k \quad (19) \end{aligned}$$

ここで、 $K = L + 1 - k$

多層版の最上面(格点 1)と最下面(格点 $L+1$)で、応力が規定される境界条件の場合、式(18)と(19)より格点 k での状態量が求められる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_{L+1} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} s_{21}^{k-1} & s_{22}^{k-1} \\ t_{21}^K & t_{22}^K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{X}_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} s_{23}^{k-1} \\ t_{23}^K \end{Bmatrix} \\ \therefore \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{X}_k \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} s_{21}^{k-1} & s_{22}^{k-1} \\ t_{21}^K & t_{22}^K \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 - s_{23}^{k-1} \\ \mathbf{X}_{L+1} - t_{23}^K \end{Bmatrix} \quad (20) \end{aligned}$$

ここで、上添字 ($k-1$) と K は格間行列の F_{k-1} と G_K に対応している。

同様にして、最下面で変位が規定される場合には式(21)となる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{X}_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{21}^{k-1} & s_{22}^{k-1} \\ t_{11}^K & t_{12}^K \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 - s_{23}^{k-1} \\ \mathbf{U}_{L+1} - t_{13}^K \end{Bmatrix} \quad (21)$$

表-1 たわみと応力の比較 ($x/a=y/a=0.5$)

項目	$\alpha = 1$			$\alpha = 2$		
	本方法	応力法	単一版	本方法	応力法	単一版
$w^u E_0 / qa$	46.00	46.03	46.00	31.76	31.76	31.76
$w^l E_0 / qa$	45.95	45.95	45.96	31.72	31.72	31.72
σ_x^u / q	-29.00	-29.01	-29.00	-21.51	-21.51	-21.51
σ_x^l / q	28.86	28.86	28.86	21.34	21.34	21.34
σ_y^u / q	-29.00	-29.01	-29.00	-37.51	-37.51	-37.51
σ_y^l / q	28.86	28.86	28.86	37.36	37.36	37.36

表-2 各層の層厚と弾性定数

項目	1層	2層	3層	4層	5層
層厚 h_i/a ($i=1,5$)	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
$E_x/E_0 = E_y/E_0$	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0

表-3 たわみと応力の比較 ($x/a=0.5$)

項目	$y/a=$ 解法	0.5			0.55		
		本方法	応力法	単一版	本方法	応力法	単一版
$w E_0 a^2 / P$	1層	4.935	4.940	6.552	2.620	2.616	3.589
	3層	2.134	2.134	3.478	1.215	1.215	2.083
	5層	0.456	0.456	0.894	0.286	0.286	0.561
$\sigma_x a^2 / P$	1層	-62.02	-62.52	-72.45	-28.93	-28.47	-33.61
	3層	-13.04	-13.04	-11.34	-6.815	-6.815	-6.056
	5層	-8.951	-8.951	-9.320	-6.116	-6.115	-6.521
$\sigma_y a^2 / P$	1層	-61.70	-62.52	-72.45	-24.09	-23.34	-25.27
	3層	-13.04	-13.04	-11.34	-13.03	-13.03	-12.34
	5層	-8.950	-8.950	-9.320	-10.13	-10.13	-10.12
$\tau_{yz} a^2 / P$	1層	--	--	--	--	--	--
	3層	--	--	--	-19.39	-19.39	-19.42
	5層	--	--	--	-10.39	-10.39	-9.448

これらの操作を格点ごとに繰り返せば、全格点での状態量、つまり各層の上下面に作用する変位や伝達力が決定される。さらにこれらを用いて、残りの応力が得られる。

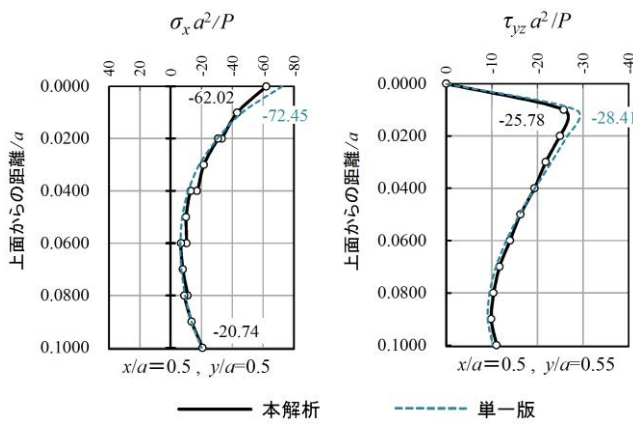


図-5 応力 σ_x と τ_{yz} の版厚方向の分布

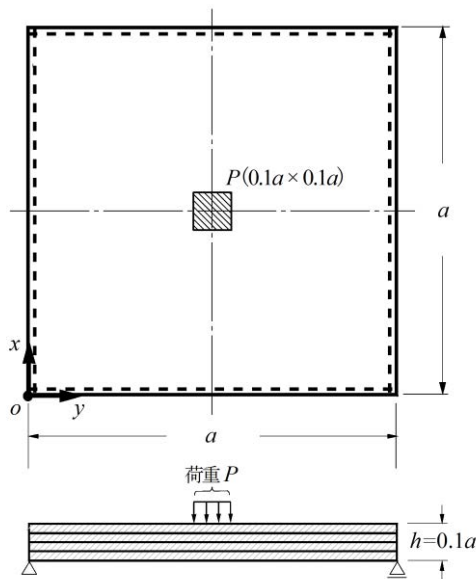


図-6 等厚4層の正方形多層版

5. はさみ込み法の検証

異方性パラメータが $\alpha = 1$ と $\alpha = 2$ の多層版(層数 10)を例に、はさみ込み法によるたわみと応力を応力法や単一版での値と比較する。計算モデルは等分布満載荷重 q の作用下での全周単純支持される正方形多層版($a = b$)で、版厚比 $h/a = 0.1$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、 x 方向の弾性定数 E_x を基本定数の E_0 とする。級数の項数 m, n の終項はいずれも 100 である。

多層版中央点での本方法によるたわみや応力の数値と、応力法および単一版での値を表-1 に示す。なお上添字 (u) と (l) はそれぞれ最上面と最下面を意味する。

いずれの異方性パラメータでも本方法による変位と応力は、応力法や単一版での値と一致している。

次に層内の水平方向の弾性定数が同じで、各層の弾性定数が版厚方向に大きくなる等厚 5 層版での本方法と応力法を比較する。床版中央に載荷面積を $0.1a \times 0.1a$ とす

表-4 各層の弾性定数

弾性係数比	第1層 MODE-M	第2層 MODE-D	第3層 MODE-M	第4層 MODE-D
E_x/E_0	1.0	2.0	1.0	2.0
E_y/E_0	2.0	1.0	2.0	1.0

注) 基準の弾性定数を E_0 とする。

表-5 たわみと応力の比較 ($x/a = 0.5$)

項目	$y/a = 0.5$		$y/a = 0.55$	
	本方法	等方性版	本方法	等方性版
$w^u E_0 a / P$	98.12	137.1	93.20	131.1
$w^l E_0 a / P$	93.55	132.5	90.89	128.8
$\sigma_x^u a^2 / P$	-189.9	-219.7	-142.7	-171.0
$\sigma_x^l a^2 / P$	205.6	172.0	184.9	153.7
$\sigma_y^u a^2 / P$	-278.2	-219.7	-191.8	-156.8
$\sigma_y^l a^2 / P$	137.2	172.0	114.2	142.0
$\tau_{yz}^{max} a^2 / P$	—	—	-41.64	-37.10

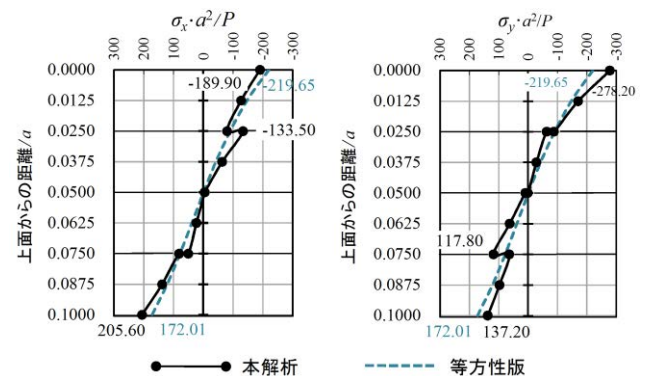


図-7 多層版中央点での応力 σ_x と σ_y の版厚方向の分布

る部分荷重 P が作用する正方形多層版($a = b$)を対象に、版厚比 $h/a = 0.1$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、基準弾性定数を E_0 とする多層版の諸元を表-2 に示す。なお級数の項数 m, n が 100 で、応力法では多層版の最下層下面に厚さ $0.04a$ 、弾性定数比が 2.0×10^{10} とする剛な層を配置し、多層版最下面の変位を拘束している。

中央点と荷重端部($y/a = 0.55$)における本方法と応力法による各層上面でのたわみと応力を表-3 で比較する。中央点の応力 σ_x と荷重端部でのせん断応力 τ_{yz} の版厚方向の分布を図-5 に示す。図中の破線は単一版の値である。

本方法による各層での変位と応力が応力法の値とほぼ同じであることから、本方法の妥当性が確認できる。

6. 異方性多層版への適用

等厚4層からなる正方形多層版を取り上げる(図-6). 多層版の諸元は, x と y 方向スパンを a , 全版厚を $h(=0.1a)$, ポアソン比 ν を0.3とし, 床版中央に荷重 P (載荷面積 $0.1a \times 0.1a$)を受ける多層版の弾性定数を表-4に示す. 級数の各項ごとに成立させる調和解析法を用いるはさみ込み法での終項をいずれも100とする.

多層版中央点と荷重端部でのたわみと応力の比較を表-5に示す.

等方性版の値を基準として, 中央点での最上面(u)と最下面(l)のたわみはそれぞれ28.4と29.4%程度減少し, 最上面での応力 σ_x と σ_y はそれぞれ13.6%減少と19.5%増加となる. 逆に最下面の応力 σ_x と σ_y はそれぞれ26.6%増加と20.0%減少する. 弾性定数の大きい方向の応力は, 等方性に比べて増大する傾向にあり, 異方性の特長が現れている.

また図-7は多層版中央点での応力 σ_x と σ_y の版厚方向の分布図を表し, 図中の破線は等方性版の値である. 各層の弾性定数が異なるため, 版厚方向の応力分布は滑らかな形状を呈していない.

7. まとめ

得られた知見を以下に列記する.

- 1) 独立な物体力に対応するベクトル形式で, 異方性パラメータを介して表現されるHuber型異方性体の変位関数群を開発し, $\alpha=1$ となる場合これらの変位関数群は等方弾性体でのGalerkin-vectorやBoussinesqの関数に帰着する.
- 2) 計算例によればはさみ込み法による数値は, 応力法や単一版の値と一致していることから, 本方法の計算精度は良好であると判断できる.
- 3) 弾性定数が大きくなる強軸方向が, 交互に入替わる異方性多層版での直応力の版厚方向分布は複雑な形状を呈する. 特に界面に作用する付着せん断応力は等方性版での値と異なっている.

8. あとがき

今後は本方法を異方性多層構造からなる半無限異方性体に適用し, 柔基礎や剛基礎を介して載荷される場合での変位や応力に関する問題を扱う予定である.

付録

動的問題での変位関数 f_3 と θ_3 の基礎式, および変位との関係式

$$\begin{aligned} & \{[\partial_x^2 + \sqrt{\alpha}\partial_y^2 + \partial_z^2 - \rho/(\lambda + 2\mu)\partial_t^2] \\ & \times (\partial_x^2 + \sqrt{\alpha}\partial_y^2 + \partial_z^2 - \rho/\mu\partial_t^2)\} f_3 \\ & = -2(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)B_z, \\ & (\partial_x^2 + \sqrt{\alpha}\partial_y^2 + \partial_z^2 - \rho/\mu\partial_t^2)\theta_3 = 0, \\ & 2\mu u = -\partial_x\partial_z f_3 + \sqrt{\alpha}\partial_y\theta_3, \\ & 2\mu v = -\partial_y\partial_z f_3 - \partial_x\theta_3, \\ & 2\mu w = (\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)[\partial_x^2 + \sqrt{\alpha}\partial_y^2 \\ & + \mu/(\lambda + 2\mu)\partial_z^2 - \rho/(\lambda + 2\mu)\partial_t^2]f_3 \end{aligned}$$

ここで, ρ : 密度

$\alpha=1$ のとき基礎式は次式に帰着する.

$$\begin{aligned} \square_1 \square_2 f_3 &= -2(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)B_z, \\ \square_2 \theta_3 &= 0 \end{aligned}$$

ここで, \square_1, \square_2 : それぞれP波とS波によるダランベルシアン

他の x, y 方向成分の変位関数の組 (f_1, θ_1) と (f_2, θ_2) についても同様に誘導される.

参考文献

- 1) 廣瀬清泰, 鍋島益弘, 堀川都志雄: 剥離域を有する張出し多層版の併用法による数値解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.62A, pp.1135-1140, 2016.
- 2) 三上 浩, 井之上賢一, 水野政純, 河野一資, 廣瀬清泰, 堀川都志雄: 変位法の剛支持領域をもつ多層版への適用, 土木学会構造工学論文集, Vol.62A, pp.1141-1148, 2016.
- 3) Sonoda, K. and Horikawa, T., Displacement functions for an orthotropic elastic body and their applications to thick plate problems, Theo. Appl. Mech., Vol. 29, 1979, pp.117-126.
- 4) 園田恵一郎, 堀川都志雄, 白鳥良一, 3次元弾性問題に対する伝達マトリックス-級数解法の適用, 土木学会論文報告集, No.339, 昭和58年11月, pp.41-50.

(2018年7月20日受付)