

論文

急変する版厚を有する張出し多層版の STRIP 法による数値解析

廣瀬清泰*, 鍋島益弘**, 堀川都志雄***

* (株)井沢設計, 技術部 (〒581-0019 大阪府八尾市南小阪合町 5-8-30)

** 博士(工学), (株)セーフティーアイランド (〒658-0024 神戸市東灘区魚崎浜町 16-7)

*** 工博, 大阪工業大学名誉教授 (〒522-0056 彦根市開出今町 1488-11)

厚板理論の Navier 解を特解に, 境界条件を満足させる同時解を薄板理論とする混合法を用いて, 多層版の変位や応力を級数形式で解析する場合, 同時解から得られる断面力を各層へどの様に按分するのかが 1 つの課題であった. 本研究では多層版の各層に適用する混合法に, 一方向を調和解析法, 他方向を選点法とする手法を充当して, 層状に組上げる STRIP 法を提案すると共に, 古典解との比較を基に本方法を検討した結果, 本方法は妥当性があると判断された. また急変する版厚をもつ張出し多層版の変厚部に部分荷重が作用する問題での変厚部近傍の橋軸直角方向の直応力やせん断応力に着目し, これらの版厚方向の分布形状を解明した.

キーワード: 多層版, 選点法, STRIP 法, 混合法

1. はしがき

級数を用いて多層版を解析する方法は, a)連続化した厳密解が得られる調和解析法, b)離散化した近似解の集合からなる選点法に大別される. いずれも全周単純支持された厚板の解を基本にしているため適用域は狭くなる. また単純支持と異なる境界条件を有する版を厚板理論のみで解析するには, 膨大な計算時間と煩雑な労力を要すると推測される. そこで簡便な方式として, 外荷重を忠実に表現できる厚板理論を特解に, 境界条件を満足させるために薄板理論を同時解に据える混合法によれば, 局所荷重下における単版での 3次元応力や変位が容易に計算できることを示した¹⁾. しかしこの方法を多層版に適用するには難点がある. 例えば自由の境界条件を満たすために, 多層版全体としての合曲げモーメントや合膜力がそれぞれ零となるように, 同時解の積分定数を決定する操作が必要になる. しかし各層の応力を算出する際には, 同時解から導かれる曲げモーメントや膜力等を各層にどのように按分するのが問題となる. 特に界面の一部で剥離等の不連続性が顕在化する場合には大きな欠陥となる. このような課題を克服するためには何らかの工夫が望まれる.

本研究では自由辺をもつ多層版の各層に混合法を適用し, 一方向(x方向)を調和解析法, 他方向(y方向)には選点法を組み合わせる解析手法(STRIP法という)を提案する. 次に層の上下面での3方向の変位と表面力(=伝達力)の関係式を誘導し, 上下層の両面における3つの変位を互いに連続させる. 伝達力に関する連立方程式を解く

ことにより, 各層の変位や応力が求められる. 2, 3の数値計算例を通して, 薄板理論による古典解と本方法による結果との比較から, 本方法の妥当性を検証する. また急激に変化する版厚をもつ張出し多層版の変厚部直上で部分荷重を受ける問題を取り上げる. 多層版の変厚部近傍に生じる応力に着目し, 橋軸直角方向の直応力やせん断応力が版厚方向にどのような分布状態を示すのかを算出する. また選点法のみによる結果とを比較して本方法の特性を吟味する.

2. 混合法による層の解析

混合法では厚板理論による全周単純支持版の Navier 解を特解に, 境界条件を満たす薄板理論は曲げ問題と引張り問題に分離して求められる解を同時解とし, これらの和から一般解を構成する方法である.

各層の座標は x 軸を支持辺上に, y 軸を版の中央線上に, z 軸を版の中央面に設ける (図-1).

2.1 特解

変位関数 Galerkin-vector f_3 と Boussinesq 関数 θ_3 の基礎式, および変位との関係式は次式で示される²⁾.

$$\Delta \Delta f_3 = 0, \quad \Delta \theta_3 = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u &= -\partial_x \partial_z f_3 + \partial_y \theta_3 \\ 2\mu v &= -\partial_y \partial_z f_3 - \partial_x \theta_3 \\ 2\mu w &= \mu / (\lambda + \mu) [\partial_z^2 + (\lambda + 2\mu)(\partial_x^2 + \partial_y^2) / \mu] f_3 \end{aligned} \right\} (2)$$

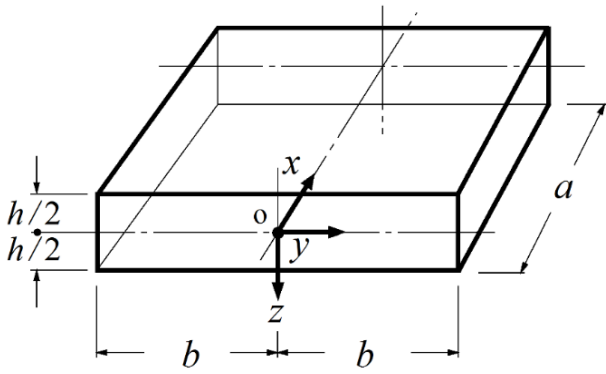


図-1 各層の座標および形状

ここで、 $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$
 Δ : 3次元ラプラシアン, λ, μ : ラメの定数

本研究では変位関数の Fourier 級数表示は荷重条件や境界条件に合わせて次のように区分する.

- 中央線に関して正対称性の時

$$f_3 = \sum_m \sum_n (C_1 \text{ch}\gamma z + C_2 \text{sh}\gamma z + C_3 \gamma z \text{ch}\gamma z + C_4 \gamma z \text{sh}\gamma z) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (3)$$

$$\theta_3 = \sum_m \sum_n (C_5 \text{ch}\gamma z + C_6 \text{sh}\gamma z) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y$$

- 中央線に関して逆対称性の時

$$f_3 = \sum_m \sum_n (C_1 \text{ch}\gamma' z + C_2 \text{sh}\gamma' z + C_3 \gamma' z \text{ch}\gamma' z + C_4 \gamma' z \text{sh}\gamma' z) \sin \alpha_m x \sin \beta'_n y \quad (4)$$

$$\theta_3 = \sum_m \sum_n (C_5 \text{ch}\gamma' z + C_6 \text{sh}\gamma' z) \cos \alpha_m x \cos \beta'_n y$$

ここで、 $\alpha_m = m\pi/a$ ($m=1, 2, 3, 4 \dots$)
 $\beta_n = (2n+1)\pi/b'$ ($n=0, 1, 2, 3 \dots$)
 $\beta'_n = 2n\pi/b'$ ($n=0, 1, 2, 3 \dots$)
 $\gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$, $\gamma'^2 = \alpha_m^2 + \beta_n'^2$
 $b' = 2b$
 $\text{sh}\gamma z = \sinh \gamma z$, $\text{ch}\gamma z = \cosh \gamma z$

$C_1 \sim C_6$: 各層の上下面での境界条件から決定される積分定数

式(3)または(4)を式(2)に代入して3方向の変位を求めた後に、フックの法則から応力に関する式を導き、層の上下面での境界条件より6つの積分定数を表面力と関連づける。更に応力を版厚方向に積分することにより、曲げモーメント M_x や M_y 、および膜力 N_x や N_{xy} 等を算出する。

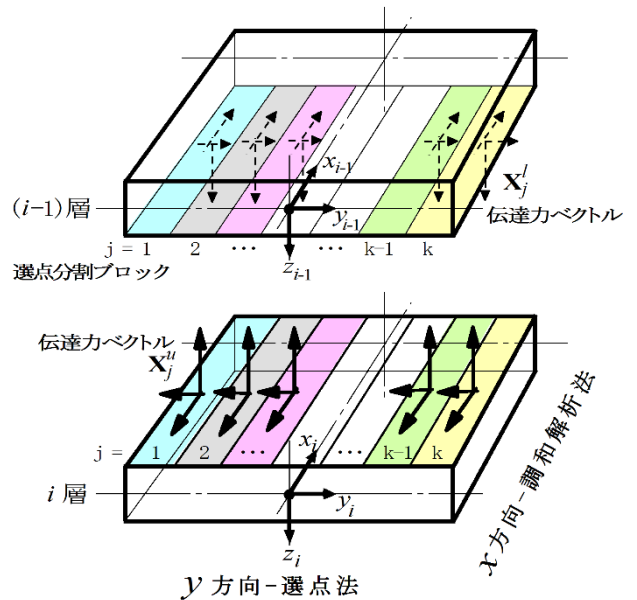


図-2 STRIP法における界面の伝達力

2.2 同時解

薄板理論での曲げ問題と引張り問題の基礎式、および変位との関係式を略記する¹⁾.

- 曲げ問題 $D\Delta'\Delta'w^h = 0$
 $u_b^h = -z\partial_x w^h$, $v_b^h = -z\partial_y w^h$ (5)

ここで、 D : 版剛性, Δ' : 2次元ラプラシアン

- 引張り問題 $H\Delta'\Delta'\phi^h = 0$
 $u_s^h = [\partial_x^2 + 4(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)\partial_y^2] \phi^h$
 $v_s^h = -(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + 2\mu)\partial_x \partial_y \phi^h$ (6)

ここで、 H : 延び剛性

関数 w^h と ϕ^h の Fourier 級数表示は次のようになる。

$$w^h = \sum [A_m \text{ch}\alpha_m y + B_m \text{sh}\alpha_m y + C_m \alpha_m y \text{ch}\alpha_m y + D_m \alpha_m y \text{sh}\alpha_m y] \sin \alpha_m x$$

$$\phi^h = \sum [I_m \text{ch}\alpha_m y + J_m \text{sh}\alpha_m y + K_m \alpha_m y \text{ch}\alpha_m y + L_m \alpha_m y \text{sh}\alpha_m y] \cos \alpha_m x \quad (7)$$

ここで、 $A_m \sim D_m$: 曲げ問題での積分定数

$I_m \sim L_m$: 引張り問題での積分定数

一般解は特解と同時解の和として与えられる。

薄板理論の境界条件、例えばy方向の端辺が自由で規定される場合は、曲げモーメント M_y と換算せん断力 V_y 、および軸力 N_y と N_{xy} がそれぞれ零となり、式(7)での8つの積分定数が決定される。

3. 多層版への適用

n 層からなる多層版の $(i-1)$ 層と i 層の接合界面に作用する3方向の表面力(=伝達力)を、y方向に対して k 個の柱状ブロックに分割すれば、 $(i-1)$ 層下面の変位ベクトル \mathbf{U}_j^{i-1} ($j=1, k$)と i 層上面の変位ベクトル \mathbf{U}_j^i ($j=1, k$)は伝達力ベクトル \mathbf{X}_j^i ($j=1, k$)と関連づけられる³⁾ (図-2)。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j^{i-1} &= \mathbf{f}_1 \mathbf{X}_j^{i-1} + \mathbf{f}_2 \mathbf{X}_j^i + \mathbf{P}_j^i \\ \mathbf{U}_j^i &= \mathbf{g}_1 \mathbf{X}_j^i + \mathbf{g}_2 \mathbf{X}_j^{i+1} \quad (j = 1, k) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$: ($i-1$)層の柔性マトリックス
 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$: i 層の柔性マトリックス
 \mathbf{P}_j^i : 外荷重による影響項

式(8)を変位の連続条件式に代入すれば、($i-1$)層と i 層の伝達力に関する式が求められる。

$$\mathbf{f}_1 \mathbf{X}_j^{i-1} + (\mathbf{f}_2 - \mathbf{g}_1) \mathbf{X}_j^i - \mathbf{g}_2 \mathbf{X}_j^{i+1} = -\mathbf{P}_j^i \quad (9)$$

この操作を n 層版に拡張すれば、各界面に働く伝達力についての $(n-1) \times 3k$ 元の連立方程式が構成され、伝達力を用いて各層の変位・応力が求められる。

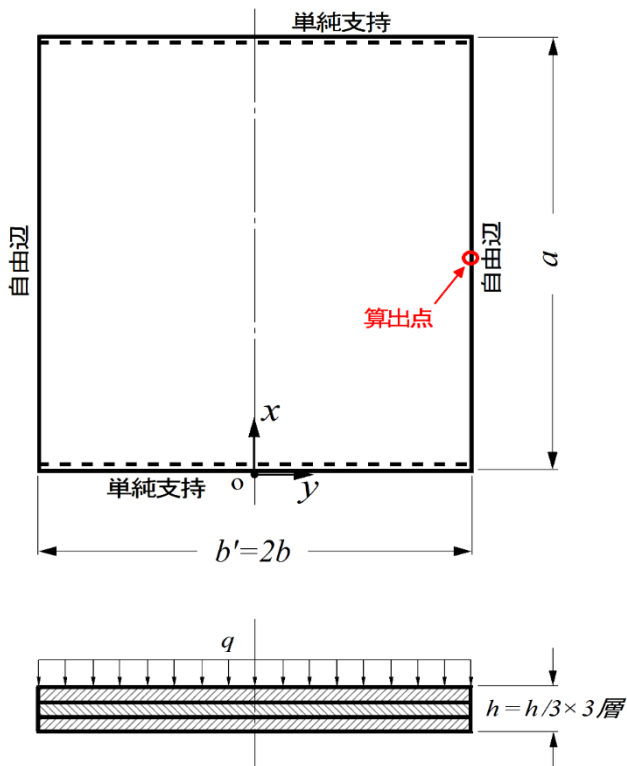


図-3 相対2辺が単純支持、残りの辺が自由の多層版

4. STRIP 法の検証

同じ版厚をもつ3層からなる多層版(全厚: h)が等分布満載荷重 q を受ける場合を考える。

版の諸元を $h/a = 1.0$, ポアソン比 $\nu = 0.3$, 弾性係数を E とする. 本方法と古典解⁴⁾の比較する項目は、いずれも自由辺中央における最上面でのたわみ w と自由辺と平行な x 方向の直応力 σ_x である。

- 1) 相対2辺が単純支持, 残りの辺が自由の多層版 (スパン比 $b/a = 0.5$)
 式(3)の正対称性モードを適用する(図-3).
 表-1に古典解と本方法との比較を示す.
- 2) 相対2辺が単純支持, 残りの辺が単純支持および自由の多層版 (スパン比 $b/a = 1.0$)
 式(4)の逆対称性モードを適用する(図-4).
 表-2に古典解と本方法との比較を示す.

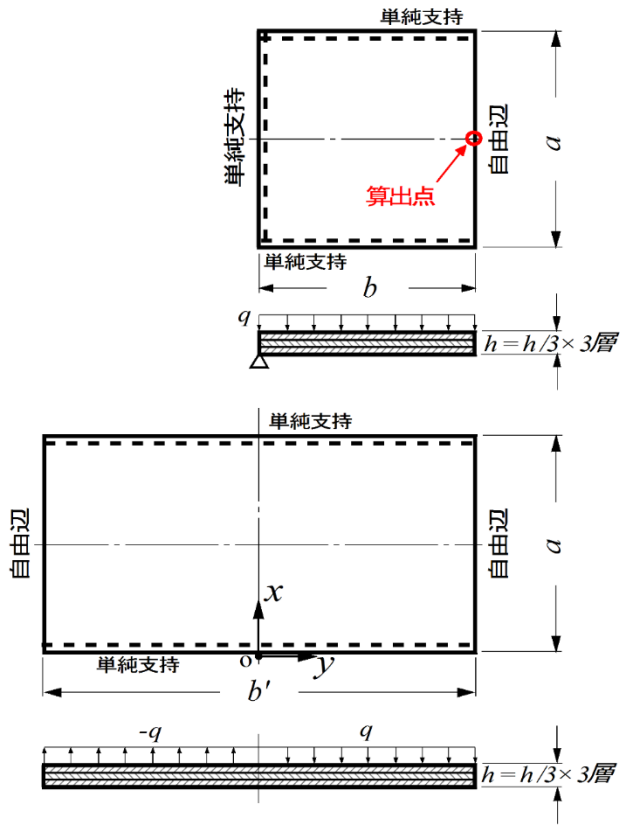


図-4 相対2辺が単純支持、残りの辺が単純支持および自由の多層版

表-1 古典解と本方法との比較 ($x/a = 0.5$)

項目	古典解	10分割	20分割
$w E/qa$	164.8	169.0	168.2
σ_x/q	-79.08	-77.24	-77.51

表-2 古典解と本方法との比較 ($x/a = 0.5$)

項目	古典解	10分割	20分割
$w E/qa$	140.4	147.8	146.0
σ_x/q	-67.20	-64.57	-65.16

3) 相対2辺が単純支持, 残りの辺が固定および自由の多層版 (スパン比 $b/a = 1.0$)

最下層の下部に剛性が無限大となる仮想版を設け, 仮想版と最下層との伝達力を $y/a = 0$ の位置で鉛直方向のみに作用させて, 文献3)と同様の操作を採用する. すなわち $y/a = 0$ でたわみが零で, かつ y 軸について正対称であるので固定条件が再現される (図-5). 表-3 に古典解と本方法との比較を示す.

分割数 20 の結果と古典解との差は, たわみと応力がそれぞれ約 5% と 3% 以内に留まっていた.

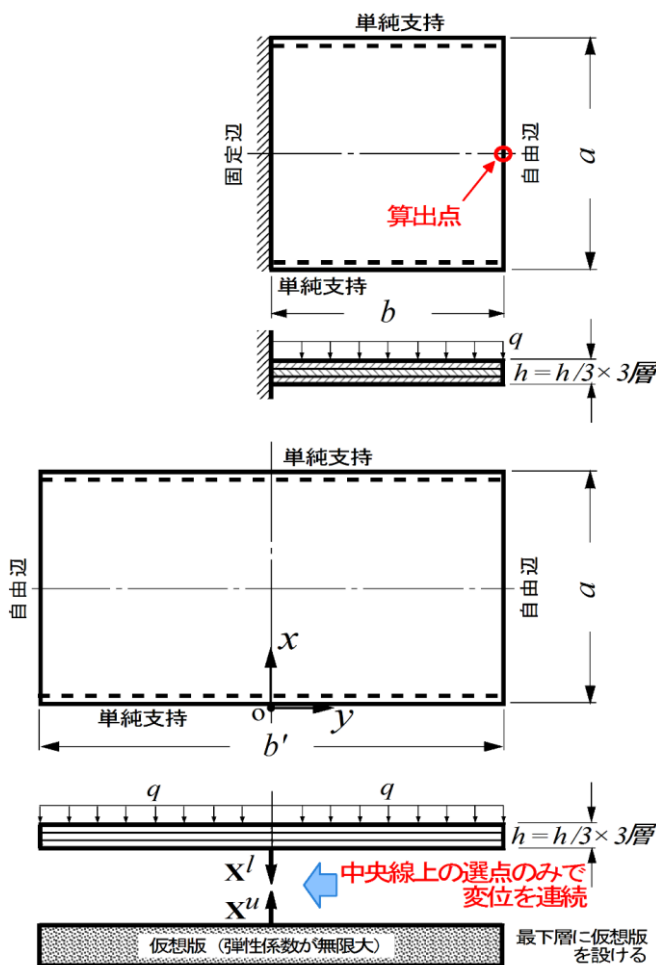


図-5 相対2辺が単純支持, 残りの辺が固定および自由の多層版

表-3 古典解と本方法との比較 ($x/a = 0.5$)

項目	古典解	10 分割	20 分割
w/Eqa	123.4	132.5	129.8
σ_x/q	-58.32	-57.00	-57.39

5. 張出し多層版への適用

次に図-6 のように y 方向スパンが $b = a$ で, 各層の y 方向が等スパンの 3 層からなる張出し多層版に部分荷重が載荷される問題を取上げる. 荷重部の周辺に生じる直応力 σ_y とせん断応力 τ_{yz} に着目し, 荷重近傍の $y/a = 0.8 \sim 0.95$ の範囲での版厚方向におけるそれぞれの分布状態を図-7 に示す. 分割数を 20 としている.

直応力 σ_y の分布状態は荷重端より版厚程度離れた y/a の位置が 0.8 よりも小さくなる程, 線形に漸近する傾向にある. $y/a = 0.85$ を超えるにつれて非線形性が現われ, 荷重直下では上面圧縮, 下面引張へと移行しているのが判る. せん断応力 τ_{yz} については, $y/a < 0.85$ の範囲内では放物形状を呈しているが, $y/a = 0.9$ の荷重端部では 3 次元解析特有の応力分布形状を示している.

6. 変厚部を有する張出し多層版への適用

次に図-8 のように最上層の y 方向スパンが $b = a$ で, 他層の y 方向スパンが $0.9a$ の 3 層からなる張出し多層版の変厚部に部分荷重が載荷される問題を取上げる. 変厚部周辺に生じる直応力 σ_y とせん断応力 τ_{yz} に着目し, 変厚部近傍の $y/a = 0.8 \sim 0.9$ の範囲での版厚方向におけるそれぞれの分布状態を図-9 に示す.

また x, y の 2 方向とも 20 分割とする選点法を全ての

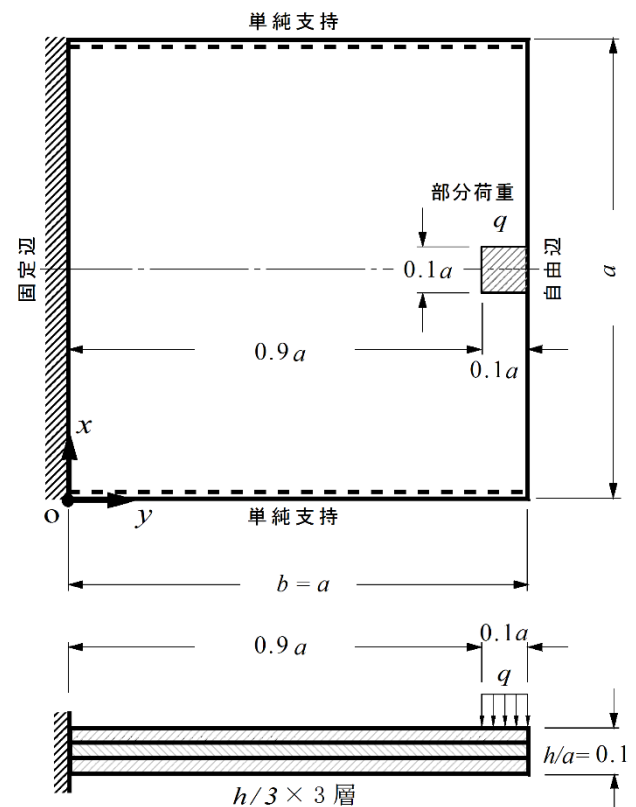


図-6 張出床版タイプの多層版

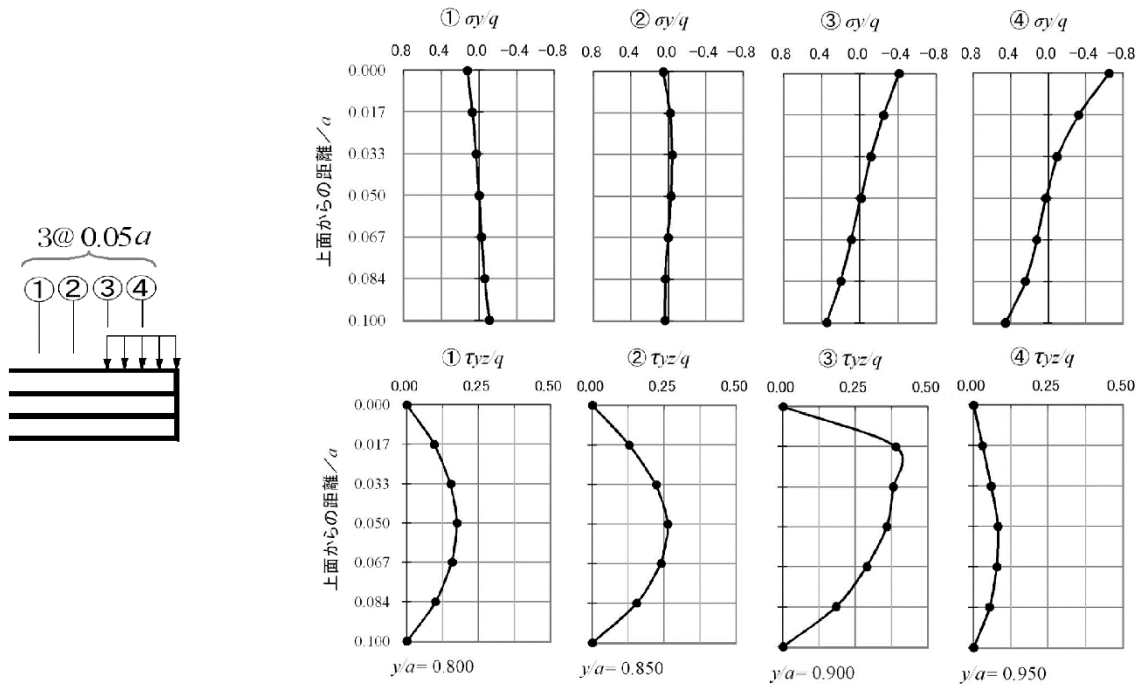


図-7 荷重部周辺に生じる直応力 σ_y とせん断応力 τ_{yz} の版厚方向の分布

界面に適用した結果も合わせて記載する。

直応力 σ_y の分布状態は荷重直下では曲線状で示され、 y/a の位置が 0.8 よりも小さくなる程、線形に漸近する傾向にある。選点法の値は $y/a = 0.8$ で版厚方向の一部で本方法の値と異なっているが、概ね一致しているのが判る。せん断応力 τ_{yz} については、荷重域内ではかなり乱れた値を示しているが、 $y/a = 0.825$ よりも小さい範囲内では本方法の値とほぼ同一である。直応力と同様 $y/a < 0.8$ の範囲内では次第に放物形状を呈すると推量される。

しかし変厚部 ($y/a = 0.9$) では第 2 と第 3 層で残留するせん断応力が認められる。この原因は自由辺での境界条件に関する、すなわち換算せん断力 $V_y = 0$ は満足されているが、せん断力 Q_y については何らの制約を設けない薄板理論にあると推察される。

7. あとがき

得られた知見を以下に列記する。

- 1) 厚板理論を特解に、同時解に薄板理論を採用する混合法を用いれば、自由辺を有する単版の解析は容易になり、擬似的な 3 次元解が得られる。しかし弾性係数の異なる層からなる多層版の応力算定を扱う場合、境界条件を満足する同時解から算出される断面力の各層への按分方法が課題になる。したがって各層自身での解を同時解も含めて予め誘導し、これらを層状に組み上げて多層版の構成を図るのが適切であると考えられる。
- 2) 多層版の中央線上に座標軸を設置することにより、厚板理論の変位関数や薄板理論の関数は正対

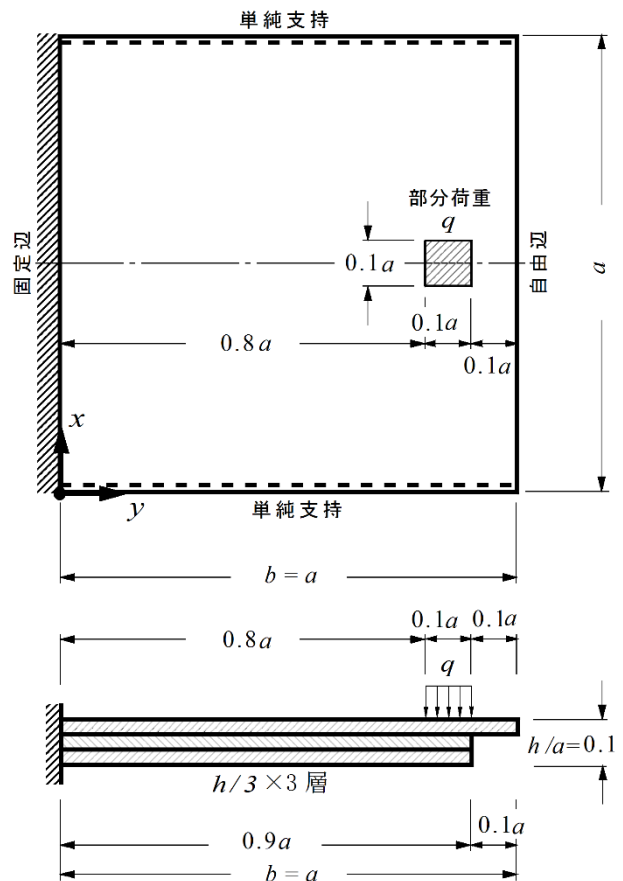


図-8 変厚部をもつ張出床板タイプの多層版

称形と逆対称形に分離できるので、荷重条件や境界条件に合わせたモード解析が容易になった。

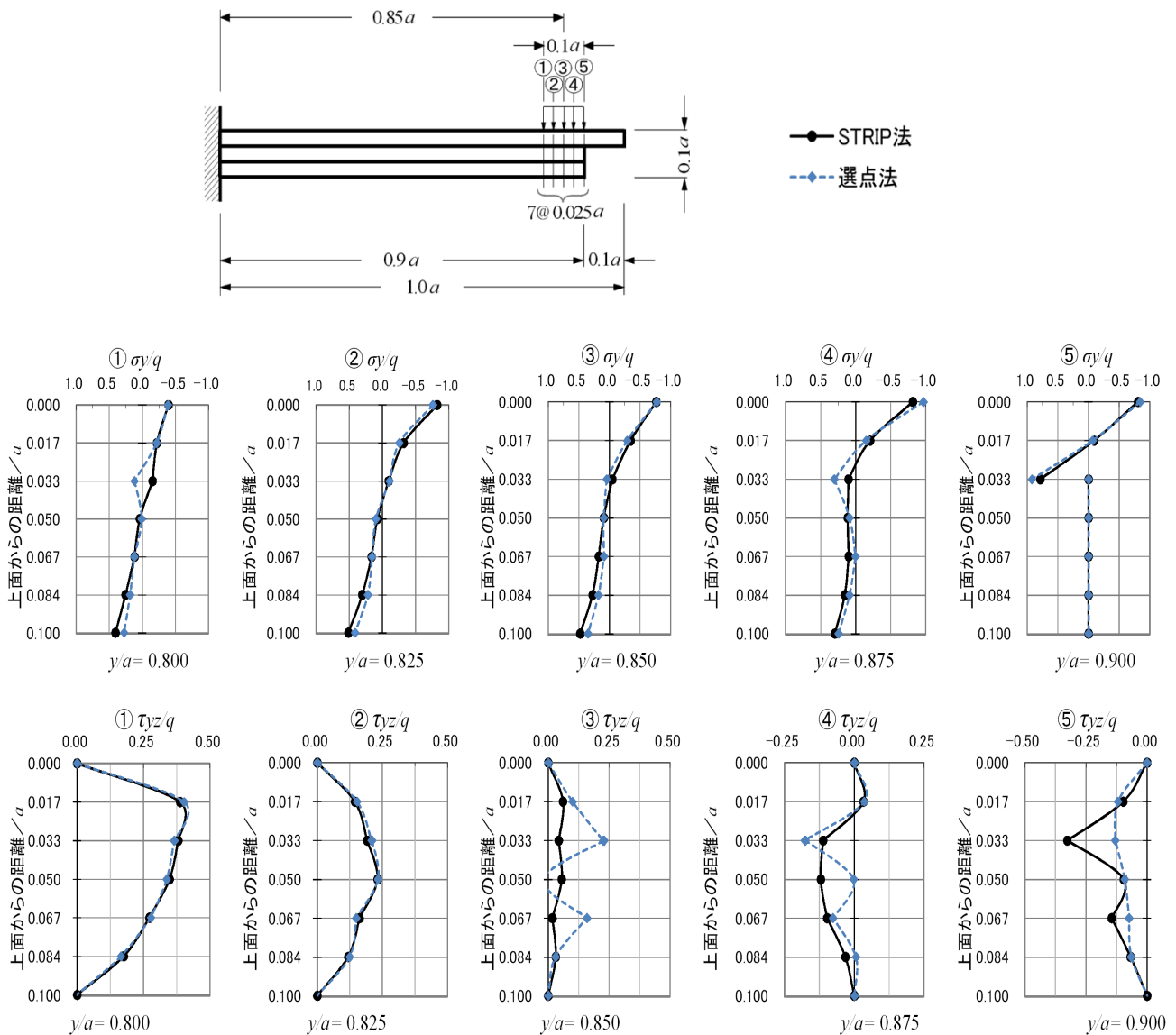


図-9 変厚部周辺に生じる直応力 σ_y とせん断応力 τ_{yz} の版厚方向の分布

- 3) 1方向に調和解析法を、他の方向に選点法を採用するSTRIP法は、2方向とも離散化する選点法と厳密解が得られる調和解析法との中間に位置する解析法で、精度上からも双方の難点を補完する性質を持っていると推測される。すなわち単純支持と異なる境界条件をもつ多層版の解析には最良であると言える。
- 4) また古典解との比較から本方法の妥当性が認められ、弾性係数の相異なる材料で張出し多層版が構成される場合にも、本方法が有効であると推察される。
- 5) 急変する版厚部をもつ張出し多層版の変厚部近傍で部分荷重を受ける場合、荷重点直下では複雑な応力分布状態となることより注意を要する。

参考文献

- 1) 横山広, 安東祐樹, 関口幹夫, 堀川都志雄: 選点法と調和解析法を導入した混合法による道路橋床版の数値解析, コンクリート工学年次論文集, Vol.31, No.2, pp.469-474, 2009.7.
- 2) 三上, 高島, 廣瀬, 堀川: 二方向アラミド繊維シート補強床版の界面剥離に関する数値解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.59A, pp.1065-1074, 2013.
- 3) 三上, 高島, 廣瀬, 堀川: 調和解析法と選点法からなる併用法による多層版の数値解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.60A, pp.1134-1139, 2014.
- 4) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and shells, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1955.