

鋼橋の FEM および非線形解析を 用いた設計について

岩崎英治（長岡技術科学大学）

鋼橋のFEMおよび非線形解析を用いた設計について

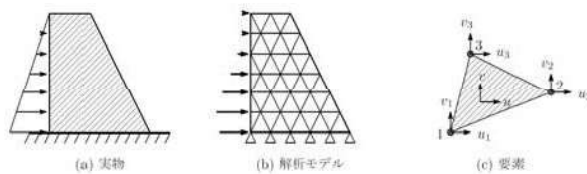
長岡技術科学大学
岩崎英治

1

FEMの誤差

2

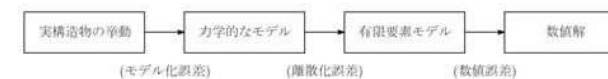
FEMの基礎



- 構造物を細領域分割(有限要素)
- 有限要素内の変位分布を節点の変位で補間
- 節点の変位は, エネルギー原理により決定

3

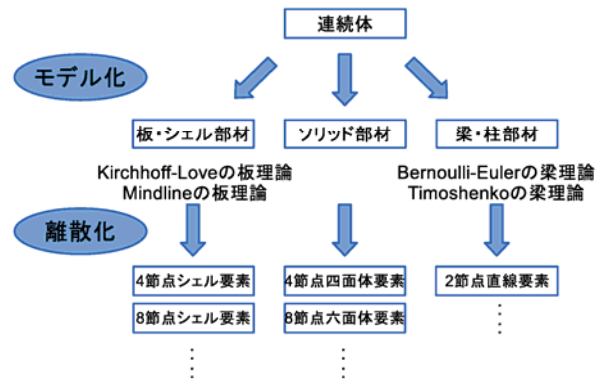
FEMの誤差



- モデル化誤差: 実構造物の挙動を再現するための力学モデルを構築する際に生じる.
- 離散化誤差: 変位などの連続量を, 離散的な点での変位で表す際に生じる.
- 数値誤差: 変位などの数値を有限な桁で打ち切る際に生じる.

4

FEMの誤差



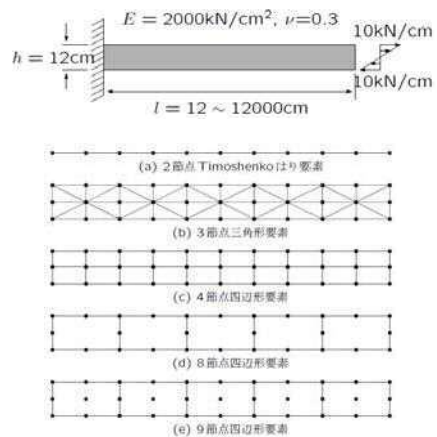
5

ロッキング

- 細長い梁要素や薄い板要素が曲げを受ける場合に、極端な精度低下が見られることがある(せん断ロッキング).
- 非圧縮性の材料をソリッド要素でモデル化すると、極端な精度低下が見られることがある(体積ロッキング).

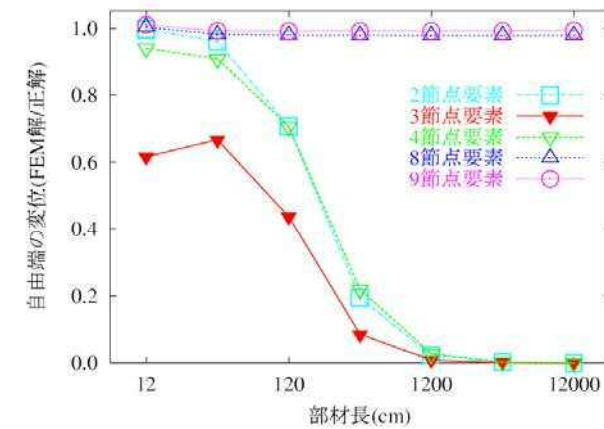
6

せん断ロッキングの例



7

せん断ロッキングの例



8

せん断ロッキングの原因

- Timoshenko梁要素, 厚板シェル要素, ソリッド要素など, せん断変形を表現可能な有限要素で発生.
- 細長い梁や薄い板では, せん断変形が他の変形成分に比べて非常に小さい.
- 例(2節点Timoshenko梁要素)

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{v_2 - v_1}{l} + \frac{\theta_{z1} + \theta_{z2}}{2} + \zeta \frac{\theta_{z2} - \theta_{z1}}{l} \approx 0$$

要素内の任意位置で上式がゼロに近くなることから,

$$\frac{v_2 - v_1}{l} + \frac{\theta_{z1} + \theta_{z2}}{2} = 0, \quad \frac{\theta_{z2} - \theta_{z1}}{l} = 0$$

たとえば, 片持ち梁では, 支持条件から $\theta_{z1} = v_1 = 0$

すると, $\theta_{z2} = v_2 = 0$. 隣接する要素の節点も, $\theta_{z3} = v_3 = \theta_{z4} = v_4 = \dots = 0$

9

ロッキングを回避するために

- 剛性行列の積分方法を工夫する
選択的次數低減積分など
- 変位関数, 形状関数を工夫する
- 変分原理の汎関数を工夫する
混合法など

統一的な方法はなく, FEMソフト毎に,
種々の工夫がされている

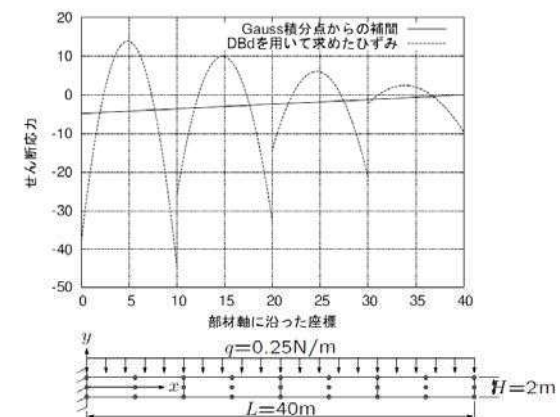
10

応力評価

- 変位関数
 $u = Nd$ (N :形状関数, d :節点変位)
- ひずみ変位関係式
 $\varepsilon = \partial u = \partial Nd = Bd$
- 応力ひずみ関係式
 $\sigma = D\varepsilon = DBd$

11

応力評価



12

ひずみ評価の最適点と応力評価法

ひずみ評価の最適点

- 2節点トラス要素→要素中央
- 4節点四辺形要素→要素中央
- 8節点四辺形要素→2x2ガウス積分点

低減積分のガウス積分点で
ひずみ(応力)の精度は良い

要素内の任意な場所の応力を精度良く求める
には？

- 応力プロジェクション法
- 単純補間法

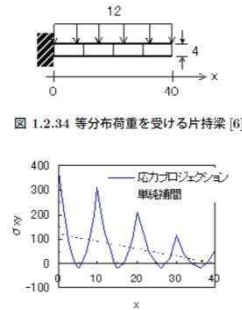


図 1.2.34 等分布荷重を受ける片持梁 [6]

図 1.2.35 せん断応力分布 [6]

13

線形FEAのラウンドロビン・テスト

14

線形FEAのラウンドロビン・テスト

FEM解析は近似解法であり、FEMソフト、要素分割、要素の種類などが異なると、得られる結果には違いがある。

そこで、以下のケースについて違いを示す。

- 要素分割や要素の種類を自由に設定
- 要素分割や要素の種類を統一
(4節点シェル要素 28800要素, 29273節点)

FEMソフトの性能比較は行わない。

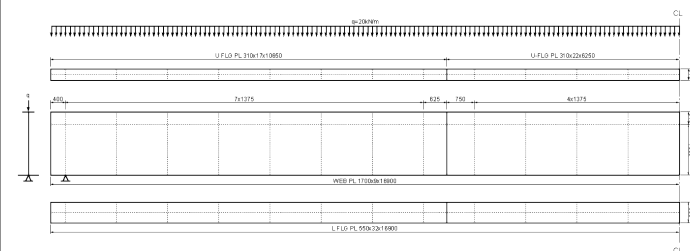
FEMソフトや要素分割、要素の種類が異なると、結果にどの程度の違いが現れるのかを示す。

使用FEMソフト

- ☐ ABAQUS
- ☐ ADINA
- ☐ COSMOS/M
- ☐ DIANA
- ☐ MARC
- ☐ Midas/Gen
- ☐ NASTRAN
- ☐ SOFISTIK
- ☐ 自作FEM

15

解析対象の桁



(参照: 日本橋梁建設協会 合成桁の設計例と解説)

要素分割や要素の種類は自由

表 1.3.2 Case-1 の解析結果

解析者	要素数	節点数	支間中央部ウェブ			支間 1/4断面部ウェブ		
			たわみ (mm)	上縁応力 (N/mm ²)	下縁応力 (N/mm ²)	上縁応力 (N/mm ²)	下縁応力 (N/mm ²)	せん断応力 (N/mm ²)
A	30600	40443	-85.40	-151.72	85.92	-131.64	66.24	-12.18
B	25612	25650	-85.36	-160.32	90.00	-133.40	69.68	-12.16
C	4930	10260	-81.708	-151.300	86.26	-126.940	67.036	-11.644
D	690	612	-82.896	-154.400	90.016	-129.100	67.500	-12.728
E	28800	29273	-85.436	-154.140	86.204	-132.988	67.756	-12.188
F	1800	7473	-85.448	-153.536	87.760	-132.992	67.704	-12.200
G	1800	1019	-85.360	-151.628	88.868	-131.896	68.608	-12.132
H	70560	71613	-85.440	-153.156	87.828	-130.216	66.628	-12.548
I	10252		-87.2	-155.6	92.8	-134.8	72.0	-12.20
J	10252		-80.2	-155.6	96.4	-131.8	74.4	-12.12
K	7040	7275	-85.28	-154.76	89.08	-134.08	68.88	-11.56
L	7040	7275	-85.36	-154.92	89.16	-134.28	68.96	-12.108
M	350	300	85.32	-151.88	89.20	-131.64	68.96	12.04
N	3672	3805	87.00	-155.2	92.8	-134.4	71.6	12.12
最大値			80.2	160.32	96.4	134.8	74.4	12.728
最小値			81.708	151.300	85.92	126.940	66.24	11.56
最大値と最小値の差			7.5	9.0	10.5	7.9	8.2	1.17

17

要素分割や要素の種類を指定

表 1.3.3 Case-2 の解析結果

解析者	要素タイプ	支間中央部ウェブ			支間 1/4断面部ウェブ		
		たわみ (mm)	上縁応力 (N/mm ²)	下縁応力 (N/mm ²)	上縁応力 (N/mm ²)	下縁応力 (N/mm ²)	せん断応力 (N/mm ²)
A	厚肉要素	-89.400	-159.504	95.592	-134.496	73.448	-12.188
B	厚肉要素	-89.488	-159.576	95.636	-134.556	73.480	-12.200
C	平面要素	-89.464	-159.576	95.636	-134.560	73.484	-12.192
D	平面要素	89.480	-159.560	95.640	-134.560	73.480	-12.200
E	曲面要素	-89.444	-159.544	95.616	-134.528	73.468	-12.192
F	曲面要素	89.440	-158.812	95.460	-134.520	73.480	-12.192
G	厚肉要素	-89.236	-157.724	95.800	-132.060	74.768	-12.260
H	シェル要素	89.600	-159.200	95.200	-134.400	73.200	12.200
I	厚肉要素	-89.440	-158.400	94.480	-133.600	72.560	-12.200
J	厚肉要素	-89.440	-158.396	94.480	-135.868	72.560	12.200
K	厚肉要素	89.460	-158.920	95.424	-133.940	73.316	12.200
L	厚肉要素	89.460	-158.920	95.424	-133.940	73.316	12.200
M	シェル要素	-89.440	-159.956	93.932	-134.620	72.088	12.192
N	板要素	-89.480	-159.264	95.324	-134.304	73.232	12.200
O	シェル要素	89.468	-159.272	95.332	-134.308	73.240	12.200
P	シェル要素	-89.480	-159.260	95.324	-134.300	73.232	12.200
最大値		89.600	159.956	95.800	135.868	74.768	12.200
最小値		89.236	157.724	93.932	132.060	72.088	12.188
差		0.364	2.232	1.868	3.808	2.680	0.012

18

ラウンドロビン・テストのまとめ

- 要素分割や要素の種類を指定せず、解析者の判断に委ねた場合(実務に近い状態)には、
上縁応力:-151~-160N/mm²(9N/mm²)
下縁応力:86~96N/mm²(10N/mm²)
- 要素分割と要素の種類を指定した場合には、
上縁応力:-158~-160N/mm²(2N/mm²)
下縁応力:94~96N/mm²(2N/mm²)
- 全て解析者に委ねた場合が、実務での状況に近い
- 要素分割と要素タイプを揃えても、若干の違いがある

19

有限要素の基本特性

- FEAソフトにより、ロッキングの回避方法や応力評価法が異なっている。
- このため、同じ要素分割、同タイプの要素を用いても、解析結果に違いがある。
- FEAソフトの精度特性などを、事前に把握おくことが望ましい。

20

非線形問題と誤差

21

平衡方程式

- 線形平衡方程式

$$KD = P$$

- 非線形平衡方程式

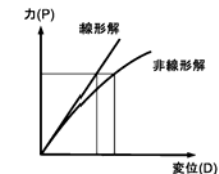
$$F(D) = P \equiv \lambda \bar{P}$$

- 増分型の平衡方程式

$$K_T(D)\Delta D = \Delta \lambda \bar{P} + \lambda \bar{P} - F(D)$$

- 座屈平衡方程式

$$K_G(D)\Delta D = 0$$



λ : 荷重倍率

$\bar{P}$: 基準荷重

$K_T(D)$: 接線剛性

$K_G(D)$: 幾何剛性

22

線形座屈解析

線形座屈解析の仮定

- 座屈前の変位は微小であり, 座屈前の形状変化は考慮しない.
- 座屈前の断面力や応力は, 荷重に比例する.
- 座屈変位は, 比較的小さく, 座屈平衡方程式は, 座屈変位の2次以上の項は考慮しない.

これらの仮定により, 座屈平衡方程式の解法は固有値の問題になる.

扁平なアーチの座屈や桁の横倒れ座屈では, 誤差が大きくなることがある.

23

増分型の平衡方程式の解法

増分型の平衡方程式

$$K_T(D)\Delta D = \Delta \lambda \bar{P} + \lambda \bar{P} - F(D)$$

上式の解

$$\Delta D = \Delta \lambda D_0 + D_1$$

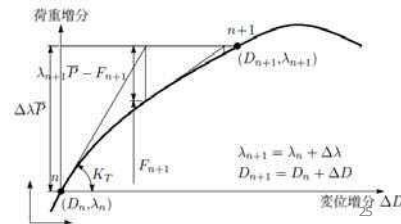
なお, D_0 と D_1 は, 次の方程式の解

$$K_T(D)D_0 = \bar{P} \quad K_T(D)D_1 = \lambda \bar{P} - F(D)$$

24

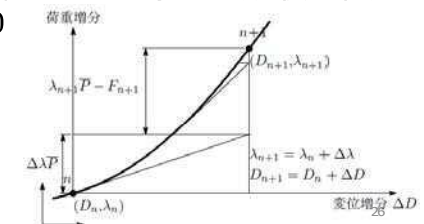
荷重増分法

- 荷重倍率の増分量 $\Delta\lambda$ を与えて、平衡方程式 $K_T\Delta D = \Delta\lambda\bar{P}$ の解 ΔD を求める(増分過程)。
- 荷重倍率 λ_{n+1} と変位 D_{n+1} から、不平衡力 $\lambda_{n+1}\bar{P} - F_{n+1}$ を求めて、平衡方程式 $K_T\Delta D = \lambda_{n+1}\bar{P} - F_{n+1}$ の解 ΔD を求める(反復過程)。
- これを、不平衡力が許容値以下になるまで繰り返す。



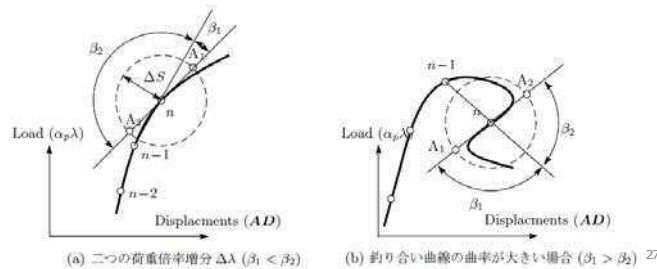
変位増分法

- 変位増分の1成分 ΔD_i を与えて、平衡方程式 $K_T\Delta D = \Delta\lambda\bar{P}$ の解 $\Delta\lambda$ と ΔD を求める(増分過程)。
- 荷重倍率 λ_{n+1} と変位 D_{n+1} から、不平衡力 $\lambda_{n+1}\bar{P} - F_{n+1}$ を求めて、平衡方程式 $K_T\Delta D = \lambda_{n+1}\bar{P} - F_{n+1}$ の解 $\Delta\lambda$ と ΔD を求める(反復過程)。このとき、 $\Delta D_i = 0$
- これを、不平衡力が許容値以下になるまで繰り返す。



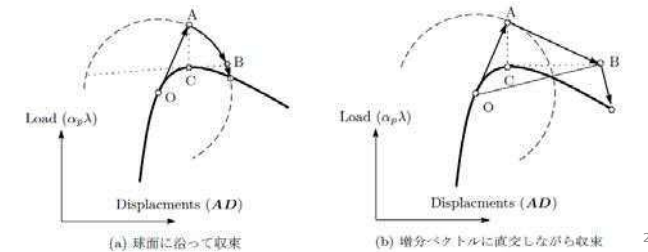
弧長増分法

- 弧長増分 ΔS を与えて、平衡方程式 $K_T\Delta D = \Delta\lambda\bar{P} + \Delta S^2 = \Delta\lambda^2 + \Delta D^2$ の解 $\Delta\lambda$ と ΔD を求める(増分過程)。

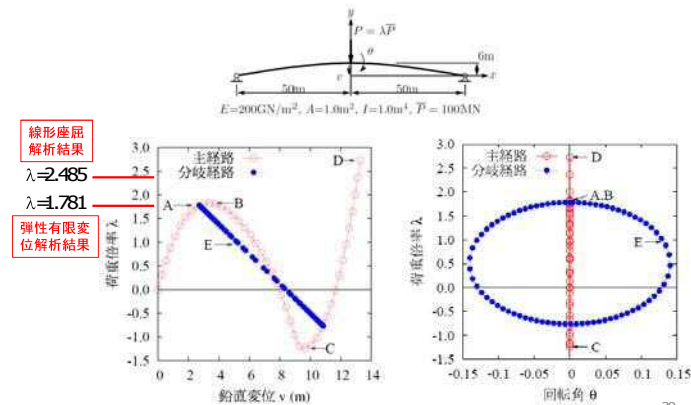


弧長増分法

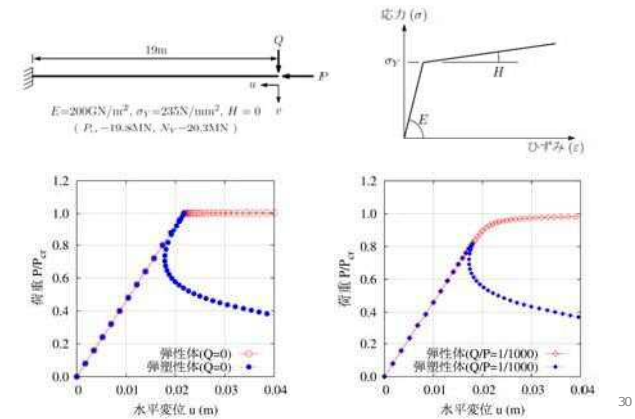
- 荷重倍率 λ_{n+1} と変位 D_{n+1} から、不平衡力 $\lambda_{n+1}\bar{P} - F_{n+1}$ を求めて、平衡方程式 $K_T\Delta D = \lambda_{n+1}\bar{P} - F_{n+1}$ の解 $\Delta\lambda$ と ΔD を求める(反復過程)。このとき、 $\Delta S = 0$ を満足する方法と満足しない方法がある。
- これを、不平衡力が許容値以下になるまで繰り返す。



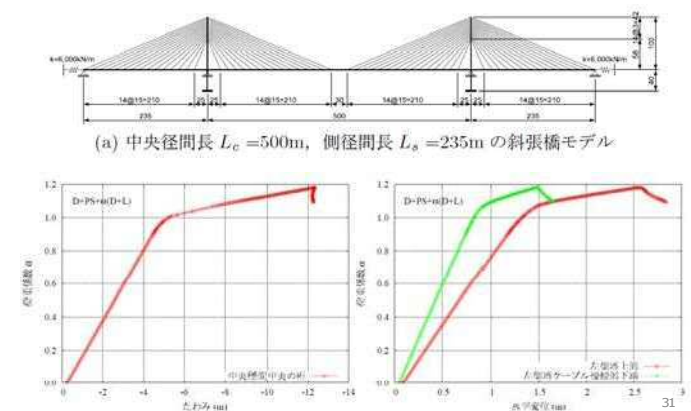
弾性有限変位解析の例



弾塑性解析の例

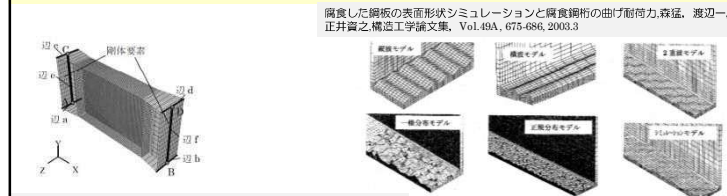


斜張橋の終局強度解析の例



FEAの各種解析手法とモデル化

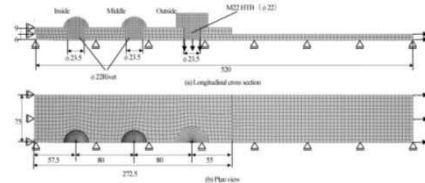
座屈・耐力解析のためのモデル化



極厚フランジを有するプレートガーダーの曲げ破壊形式と変形能, 入川充大, 藤井堅, 川見周平, 南鉄木, 構造工学論文集, Vol.55A, 134-143, 2009.3

補修補強解析のためのモデル化

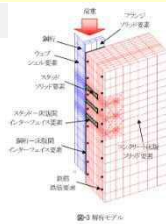
高力ボルト摩擦接合とする既設リベット継手の部分取替え補修に関する解析的検討, 橋本 國太郎, 山口 隆司, 北田 俊行, 構造工学論文集, Vol. 54A, 555-562, 2008.3



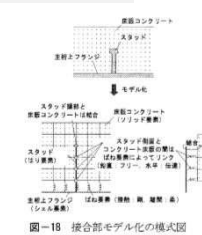
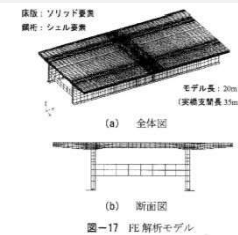
37

ずれ止め解析のためのモデル化

密にグループ配列した頭付きスタッドの寸法および強度のせん断耐力性能に及ぼす影響と床版断面のせん断耐力評価, 岡田淳, 伏田照彦, 土木学会論文集A, Vol. 62 No. 3, 556-569, 2006.7



合成2主桁橋の中間横桁位置での床版-鋼桁接合部の応力性状の解明と設計, 佐々木保隆, 小山明久, 山田金吾, 長井正剛, 土木学会論文集A, vol.62 No.1, 41-52, 2006.1



38

形状のモデル化のまとめ

- (1) 座屈・耐力
 - ・ 鋼部材のモデル化には、一般的にシェル要素が使われることが多い、一方で、腐食桁に対する耐力特性の解析におけるモデル化では、ソリッド要素を用いて2mm程度の要素分割を使用していることが多い
- (2) 補修補強
 - ・ 床版・橋脚の補強に関するモデル化では、ソリッド要素を用いていることが多い
 - ・ 接合に関するモデル化では、着目箇所をソリッド要素でモデル化している
 - ・ 接合面には、バネ要素を用いたり、摩擦係数を導入したりしている
- (3) ずれ止め
 - ・ ずれ止めのモデル化においては、多くの文献では、バネにより評価している
 - ・ ずれ止め構造自体に着目する場合には、ずれ止め構造をソリッド要素にて、忠実にモデル化している

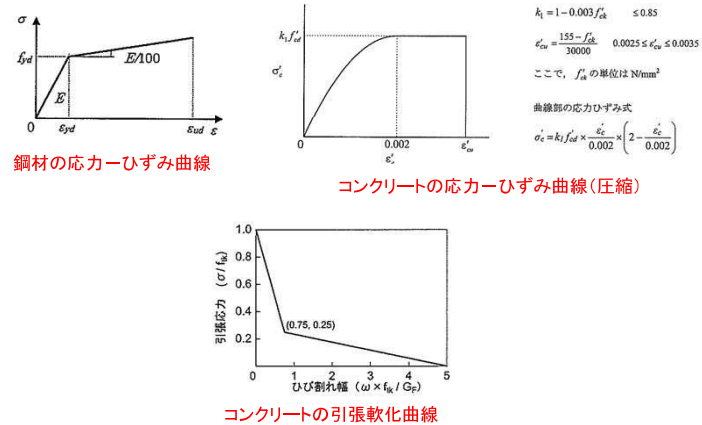
39

材料のモデル化

- ・ **非線形解析**では、材料のモデル化、特に応力-ひずみモデル(構成則)の設定が重要となる
- ・ **コンクリートや鋼の引張・圧縮を示す材料構成則**は、国内の基準類に多く示されている。
- ・ **コンクリートのひび割れを再現する構成則**は、研究として様々な種類が提案されている。
- ・ 構造形式や使用目的を限定して、部材等の見かけ上の非線形挙動を再現するテクニックとしての構成則も様々提案されている(ずれ止め、隅角部、合成床版など)

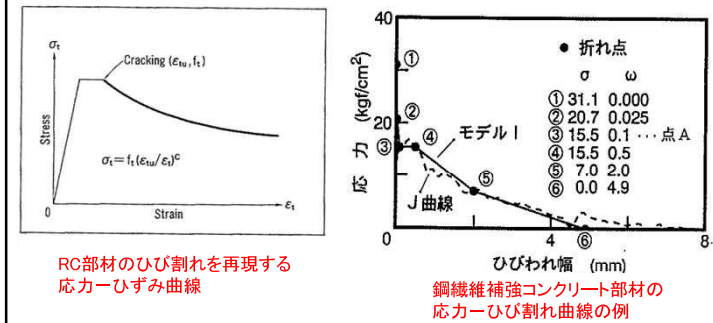
40

国内の設計基準類に示されている構成則の例



41

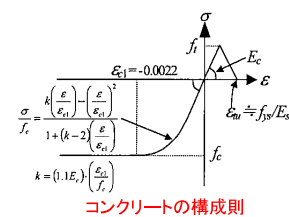
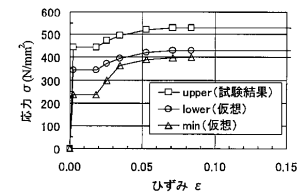
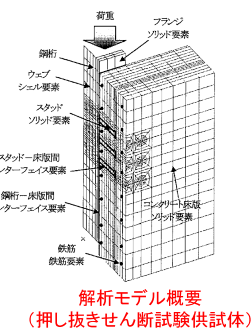
ひび割れを再現するためのコンクリートの構成則の例



42

各検討課題に対して提案されている構成則

グループ配列した頭付きスタッドのせん断耐力を評価するための構成則



43

材料のモデル化のまとめ

- 基準類には鋼・コンクリートの基礎的な材料構成則が示されている。
- コンクリートのひび割れについては、各種研究がおこなわれている。
- 様々な個別の構造に対しても、実験などと整合する構成則が示されている。
- ただし、個別の課題に対しては、構造のモデル化とセットで示されているものが多いため、適用範囲は限定的であると考えられる。

今後の課題

- ひび割れに関する構成則は、多数のモデル化事例が見られるため、適用範囲については検討が必要である。
- 使用する解析ソフトの特性の違いによる、構成則の適用方法の差について、明確になっていない。
- 鋼・コンクリート以外の材料については文献が少ない。
- 鋼材のすべり挙動(添接部)、鋼・コンクリート境界部(ずれ止め部)についても文献が少ない。

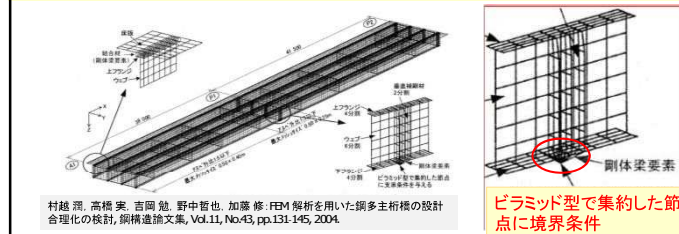
44

境界条件・荷重のモデル化

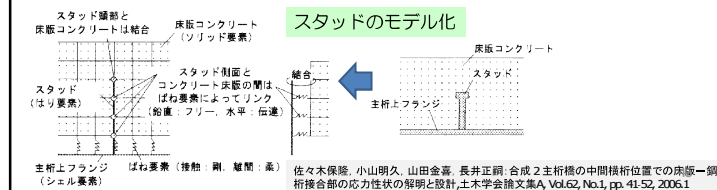
- 支承のモデル化
- 接触面の取り扱い
- 荷重の取り扱い
- 部分モデルの境界条件
- 初期不整・残留応力

45

支承のモデル



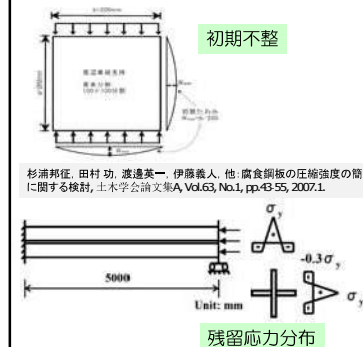
接触面の取り扱い



部分モデルの境界条件

高橋和也, 内藤 繁, 関 雅樹, 市川篤司, 三木千壽: 鋼鉄道橋トラス橋縦桁横桁連結部の疲労き裂の原因解明, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.2, pp.235-247, 2008.

初期不整・残留応力



山口栄輝, 定家孝雄, 村越潤, 清水 英樹, 小野 潔・奥取直樹: 鋼 I 形断面梁圧縮フランジの耐荷力に関する考察, 構造工学論文集, Vol.55A, pp.154-163, 2009.3.

荷重条件・支持条件のまとめ

- (1) 支承のモデル化
 - 支点部はソールプレートに相当する範囲を剛体, 剛体はり要素などを用いてローラー位置に一点集中させる方法など
- (2) 接触問題の取り扱い
 - 両者の節点を共有する剛結状態とする場合
 - 接触面を導入し摩擦係数を与える場合
 - 両者の節点間にバネ要素を導入する場合 などに分類される
- (3) 荷重の取り扱い
 - 道路橋示方書に準拠して設定するのが一般的
 - 疲労などの局所的な解析を実施する場合には, 着目する部分が不利となるように載荷位置を設定する場合が多い
 - 静載荷実験等を対象とする場合には, 実際の載荷状況(重量, 載荷位置)等を確認し, 適切に数値解析に反映させる必要あり
- (4) 部分モデルの境界条件
 - 全体系モデルに対して解析を実施し, 部分モデルの周辺における節点変位や回転, 断面力などを確認後, それらを部分モデルの境界条件として与える
 - 全体モデルと部分モデルで異なる要素タイプを使用する場合, 要素タイプごとの自由度が異なることがあるので, 十分に精査する必要あり
- (5) 初期不整・残留応力
 - 初期不整に関しては道路橋示方書に準拠. ただし, 実験を対象とする場合には実測値データが用いるべき
 - 残留応力に関しては, 実測データに基づき導入することが望まれるが, 簡略化して長方形分布とする場合が多い

46

今後の課題

(1) 支承のモデル化

- ・ 供用年数を超えた橋梁を対象に数値解析を実施する場合、支承部は経年劣化により、理想的な状態と大きく異なることが予想される。
- ・ より信頼性の高い解析結果を得るには、この経年劣化による支承挙動をどのようにモデル化すべきかが非常に重要となる。
- ・ 従って、**新設および既設橋梁に関する載荷実験等の実測データはもちろん、併せて数値解析を実施し、支承のモデル化に関する基礎的な知見を蓄積することが必要と考えられる。**

(2) 残留応力のモデル化

- ・ 鋼部材の残留応力は、長方形あるいは三角形分布に近似される場合が多い。これは鋼橋に広く用いられている桁および箱形断面の残留応力に関する実測データの公開が少ないことによる
- ・ **残留応力分布に関しては、実測データの積極的な公開など、今後の成果が期待される。**

49

FEMおよび非線形解析業務における品質保証

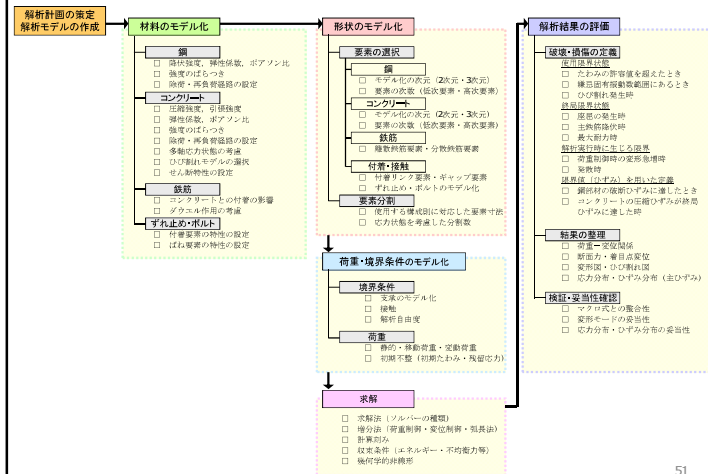
- ・ **非線形解析**では、要素の選択・メッシュ品質・求解法の選択について**高度な判断が要求される**
- ・ 《海外》**V&V10** (ASME) , **SAFESA** (NEFEMS) が先駆的
- ・ 《国内》コンクリート工学協会2008, 計算工学会2009～, 原子力学会2010～で解析業務の品質保証について議論されている

資格制度・継続教育

- ・ 要員の力量管理、教育・訓練 (ISO9001, 6章)
- ・ 《機械学会》計算力学技術者 (2003年～): 固体・熱流体の2分野, 4階級

50

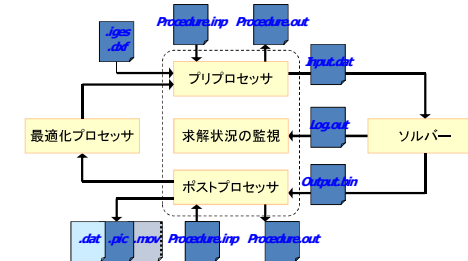
チェックフロー図



51

解析業務における検証・妥当性確認の具体的な方法

- ・ 理論解・単純系との比較
- ・ コンクリート標準示方書【設計編】における構造解析の妥当性確認方法
- ・ 検証・妥当性確認のためのプレ・ポストプロセッサの具体的な使用方法
- ・ 感度解析
- ・ プロセス記録と手続きファイルの利用



52

FEAの設計への適用について

(計算結果の評価)

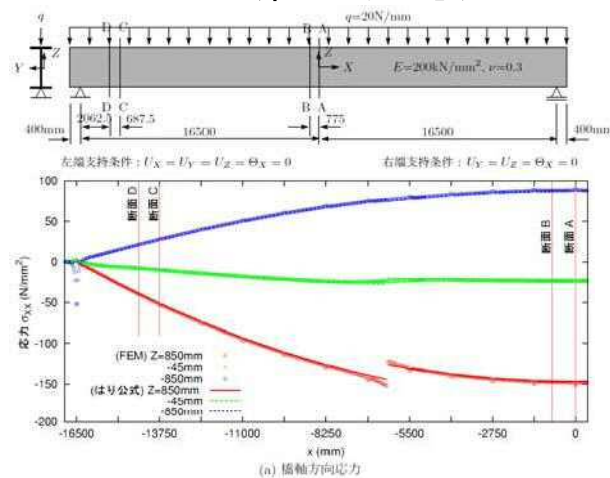
53

規則による設計と解析による設計

- 規則による設計 (design by rule)**
 部材を梁や板で近似して、断面力や(公称)応力が材料強度の限界値以下になっていることを照査する。
 伝統的な設計法で、経験や力学の知識に裏付けされている。
- 解析による設計 (design by analysis)**
 有限要素法により得られた応力が材料強度の限界値以下になっていることを照査する。
 応力がモデル化に依存する。

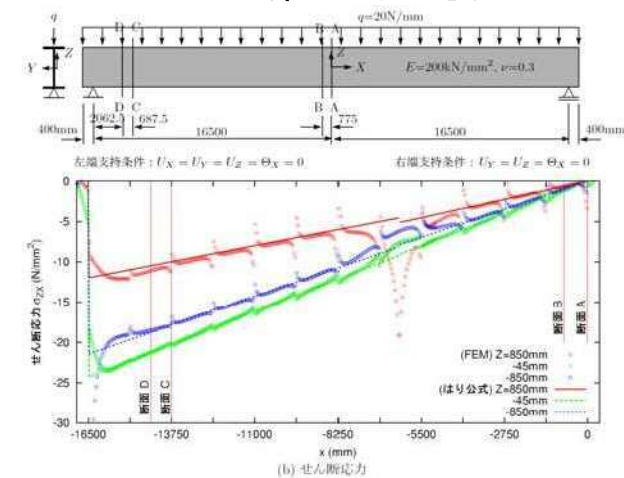
54

FEMと梁公式の応力



55

FEMと梁公式の応力



56

1次応力(公称応力)と2次応力

- FEAは要素を細かくすると精度の良い応力が得られる。しかし、他部材との接合部などの不連続部の乱れた(2次)応力が現れてくる。
- 通常(規則による設計)の照査式をそのまま使用して良いか？
- 解析による設計のための、照査式を考える必要がある(安全率の変更, 部分係数の変更など)。

57

材料強度の限界値の例

表 23.5 許容応力値

例: 圧力容器の応力照査

応力の種類	延性材料		脆性材料		備 考
	ミーゼスの説、トレスカの説		最大主応力説		
	長期荷重 *1	短期荷重 *2	長期荷重 *1	短期荷重 *2	
1 次応力 (引張)	0.5～0.8 σ_y 1/3 σ_u	1.0 σ_y 1/2 σ_u	0.1～0.4 σ_u	0.1～0.6 σ_u	法規、規格、規則 による基本的許 容応力が適当
1 次応力 (曲げ)	1.0 σ_y 1/2 σ_u	1.5 σ_y 3/4 σ_u			
1 次 + 2 次応力	1.0～2.0 σ_y	——	1.0 σ_y	1.0 σ_y	——
1 次 + 2 次 + ピーク応力	許容疲労限 設計疲労曲線	——	許容疲労限 設計疲労曲線	——	変動荷重がある 場合

表 23.4 応力分類と応力の特徴

応力分類	1 次応力	2 次応力	ピーク応力
応力算出 *5	材料力学の算式 粗分割の有限要素法	有限要素法により 1 次+2 次応力が 求められる	有限要素法により 1 次+2 次+ピーク応力 が求められる

*5: 有限要素法で応力を求める場合, 適切な要素分割が前提である。

出典: 岸 正彦, 構造解析のための有限要素法実践ハンドブック, 森北出版, 2006. 58