厚板理論の概要と多層版への応用

堀川　都志雄[*1]
Toshio Horikawa

[*1] 大阪工業大学　名誉教授

1.　厚板理論への目覚め

厚板理論を述べるに当たって，厚板とはどのようなものかを定義しなければなりません．このことを理解するには，私自身の回顧録を披露した方が手取り早いかと思いますので，ご容赦下さい．

私の研究の出発は薄板理論から始まっています．薄板理論は周知のように曲げモーメントやせん断力のような断面力を中心に据えた構造力学の発展系です．一方弾性学という学問では応力が主になっており，薄板理論が弾性学とどのように関連するのかが疑問でありました．私は 1968 年に「PC 斜版の差分法による解析」と題する卒業論文を与えられ，差分法を用いて相対２辺が自由である斜版にプレストレス力が導入される場合でのたわみや断面力を解析した．自由辺に対してある角度を持って，版の中央面から偏心する位置でプレストレスが導入される時，自由辺には辺と直交する方向に曲げモーメントが，自由辺に沿って捩じりモーメントがそれぞれ作用することになり，捩じりモーメントの処理が問題となります．薄板理論では捩じりモーメントが直接境界条件に参入することはないからです．なぜ捩じりモーメントが考慮されないのか？ここで薄板理論に対して１つ目の疑問を抱きました．

1970 年は大学紛争の真只中であり，研究に没頭する時代ではなく，大学の改革にのめり込んでいました．修士論文のテーマとして与えられたのは，薄板理論を用いた「階段状に変化する板の解析」です．この解析は単に曲げ剛性の異なる板を連結する変厚板です．断面の急激に変化する部位での応力状態は一体どのようになっているのか？ここで２つ目の疑問が出てきました．

1971 年に E. Reissner[1)]の論文に出合い，「目からうろこ」状態の大きな感動を受けたことを今でも覚えています．その後 Reissner 理論の係わる論文を収集し, 弾性論との関係はどうなのかを思索しつつ, 日々苦闘していました．

1971 年の後半に，宮本博著「3 次元弾性論」[2)]を手に入れ，以後 3 次元弾性論に関する著書や論文を読み漁る一方，私のバイブルとも言える書物 S. P. Timoshenko 著’Theory of Plates and Shells’と’Theory of Elasticity’を，現在でも行き詰ると何らかのヒントを求め紐解いています。

厚板理論とは 3 次元弾性論を板状の物体に適用したもので，どのような仮定をも設けないとされています．また Reissner 理論では，①板厚方向の変位（＝たわみ）だけが一定であるとの仮定に基づき，例えば自由辺上では，曲げモーメント，捩じりモーメント，およびせん断力がそれぞれ零である３つの境界条件が示されています．Mindlin 理論や Kromm 理論等もこの類であり，一般に中等厚板理論と称されています．薄板理論では，②板厚方向のせん断変形を無視する（＝「平面保持の仮定」）との仮定がさらに付加されて，周知のような２つの境界条件となっています．

2.　3 次元弾性論の概要[3)]

前述のように厚板理論の展開は 3 次元弾性論と同じことになりますので，以下では 3 次元弾性論の概略を示します．

3 次元弾性論での未知量は以下に示す通り，

変位　u, v, w

応力　$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

ひずみ　$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

の合計 15 ケとなります.

一方, 変位や応力には, ⅰ)応力とひずみの構成則, ⅱ)応力のつり合い式, ⅲ)ひずみの適合条件式の３つの絶対条件が課せられています．順次要点のみを記します.

ⅰ）応力とひずみの構成則　（6 本）

構成則は熱力学の第二法則から誘導されるが，以下では温度変化による影響項を無視する.

一般性を持たせるために，直交異方弾性体から始め，独立な弾性定数の数を変化させることにより，横等方性体や等方性体での構成則を誘導する.

a　直交異方性体（斜方晶系，独立な定数 9 ケ）

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z,\\
\sigma_y &= C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z,\\
\sigma_z &= C_{13}\varepsilon_x + C_{23}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z,\\
\tau_{xy} &= C_{44}\gamma_{xy},\\
\tau_{yz} &= C_{55}\gamma_{yz},\\
\tau_{zx} &= C_{66}\gamma_{zx}
\end{aligned} \tag{1}$$

また弾性定数間にはエネルギー正値の条件が課せられるため, これらの定数の同定には注意を要すことは言うまでもない.

b　横等方性体（正方晶系，独立数 5）

式(1)の弾性定数間にある制約を設ければ,

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z,\\
\sigma_y &= C_{12}\varepsilon_x + C_{33}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z,\\
\sigma_z &= C_{13}\varepsilon_x + C_{13}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z,\\
\tau_{xy} &= C_{55}\gamma_{xy},\\
\tau_{yz} &= (C_{11}-C_{12})\gamma_{yz},\\
\tau_{zx} &= C_{55}\gamma_{zx}
\end{aligned} \tag{2}$$

c　等方性体（等方晶系，独立数 2）

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{12}\varepsilon_z,\\
\sigma_y &= C_{12}\varepsilon_x + C_{11}\varepsilon_y + C_{12}\varepsilon_z,\\
\sigma_z &= C_{12}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{11}\varepsilon_z,\\
\tau_{xy} &= (C_{11}-C_{12})\gamma_{xy},\\
\tau_{yz} &= (C_{11}-C_{12})\gamma_{yz},\\
\tau_{zx} &= (C_{11}-C_{12})\gamma_{zx}
\end{aligned} \tag{3}$$

ⅱ）応力のつり合い式　（3 本）

微小要素の x，y および z 方向のつりあい式は次のように得られる.

$$\begin{aligned}
&\partial_x\sigma_x + \partial_y\tau_{xy} + \partial_z\tau_{xz} + X_1 = 0,\\
&\partial_x\tau_{xy} + \partial_y\sigma_y + \partial_z\tau_{yz} + X_2 = 0,\\
&\partial_x\tau_{xz} + \partial_y\tau_{yz} + \partial_z\sigma_z + X_3 = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで, $\partial_x=\partial/\partial x, \partial_y=\partial/\partial y, \partial_z=\partial/\partial z$,

$X_i\ (i=1,3)$:　物体力

ⅲ）ひずみの適合条件式　（6 本）

物体が力を受けて変形するとき，変形状態にはある拘束条件，つまり位相幾何学におけるビアンキの恒等式が存在する．ひずみ間で次のような適合式が成立する.

$$\begin{aligned}
&\partial^2_x\varepsilon_y + \partial^2_y\varepsilon_x = \partial_x\partial_y\gamma_{xy},\\
&\partial^2_y\varepsilon_z + \partial^2_z\varepsilon_y = \partial_y\partial_z\gamma_{yz},\\
&\partial^2_z\varepsilon_x + \partial^2_x\varepsilon_z = \partial_z\partial_x\gamma_{zx},\\
&2\partial_x\partial_y\varepsilon_z = \partial_z(\partial_x\gamma_{yz} + \partial_y\gamma_{zx} - \partial_z\gamma_{xy}),\\
&2\partial_y\partial_z\varepsilon_x = \partial_x(\partial_y\gamma_{zx} + \partial_z\gamma_{xy} - \partial_x\gamma_{yz}),\\
&2\partial_z\partial_x\varepsilon_y = \partial_y(\partial_z\gamma_{xy} + \partial_x\gamma_{yz} - \partial_y\gamma_{zx})
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで，$\partial^2_x=\partial^2/\partial x^2$，$\partial^2_y=\partial^2/\partial y^2$，

$\partial^2_z=\partial^2/\partial z^2$

すなわち合計 15 本の条件式が得られ，未知量の数と同数の偏微分で構成される多元連立系の方程式となるが，基本的に解くことが可能です.

3.　既往の応力関数と変位関数 3）

これらの偏微分方程式を如何に解くかが古くから注目され，数多くの研究者らが係わってきた．これらの式の何れかを事前に満たしてくれる関数の発見以来，この類の関数を見出すことに精力が注がれてきた．以下，つり合い式(4)を自明で満足する関数を応力関数，また適合条件式(5)を自明で満足するものを変位関数と名付ける.

それらの主なものを記述する.

a　等方性体の応力関数

Maxwell－Morera の関数（1868,1892）と現在一括して称されており，いずれも重調和方程式を満たすベクトル型の関数で示されている．周知の Airy の応力関数は，これらの関数の 2 次元版であり，スカラ

一関数である．

b　等方性体の変位関数

変位関数は応力関数よりも多く研究されてきた．まずMichellの関数(1900)とLoveのひずみ関数(1906)はいずれも重調和型のスカラー関数である．一方ベクトル型の関数としては，4 階型の Galerkin－vector (1930)や 2 階型の Neuber－Papkovitch の関数(1934,1932)が挙げられる．Galerkin－vector は独立な物体力に対応する 3 つの変位関数で示されており，Neuber と Papkovitch はそれぞれ独立に同じ関数群を導き，今日では総称して呼ばれている．また R.D.Mindlin は Galerkin－vector と Neuber－Papkovitch の関数が同一であることを証明している(1936).

4.　直交異方性体から等方性体への変遷

秦[4]は 1956 年に物体力のない場合のスカラータイプの関数を発表しているが，その後これに関する論文は見当たらない．直交異方弾性体の変位関数から横等方性体および等方性体での変位関数との関連を，x 方向に関する一成分に限定して以下に記す．

a　直交異方性体の変位関数（6 階型）

$$L^{o}(x,y,z)F^{o}_{1}=-2B_5B_7/B_1B_4\cdot X_1 \qquad (6)$$

変位

$$2B_5u_1=L_{11}F^{o}_{1},$$
$$2B_5v_1=L_{12}F^{o}_{1},$$
$$2B_5w_1=L_{13}F^{o}_{1}$$

ここで，$B_1=C_{11}$，$B_4=C_{44}$，$B_5=C_{66}$，$B_7=C_{12}+C_{44}$

$L^{o}, L_{11}, L_{12}, L_{13}$；微分演算子，

上添字 o は直交異方性体を表す

物体力 X_2 と X_3 に対応する関数 F^{o}_{2}，F^{o}_{3} も得られ，ベクトル型の関数群で示される．

b　横等方性体（4 階型＋2 階型）

$$L^{t}(x,y,z)f^{t}_{1}=-2D_5/D_1\cdot X_1$$
$$K^{t}(x,y,z)\phi^{t}_{1}=0 \qquad (7)$$

変位

$$2D_3u_1=M_{11}f^{t}_{1},$$
$$2D_3v_1=M_{12}f^{t}_{1}+K_{12}\phi^{t}_{1},$$
$$2D_3w_1=M_{13}f^{t}_{1}-K_{13}\phi^{t}_{1}$$

ここで，$D_1=B_1$，$D_3=B_5$，$D_5=B_7$

この関数は式(6)から求められるが，縮退項があるために 6 階型の微分形が 4 階型と 2 階型の微分形に分離される．y,z 方向の関数 f^{t}_{2}, f^{t}_{3} では縮退項がないので，6 階型の微分形に留まる．既往の研究では Lekhnitsky のスカラー関数があり，さらに H.C.Hu[5]は非軸問題での関数を導入しており，この関数は式(6)の ϕ^{t}_{1} と一致している．

c　等方性体（4 階型＋2 階型）

$$\Delta\Delta f^{i}_{1}=-2(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)\cdot X_1$$
$$\Delta\theta^{i}_{1}=0 \qquad (8)$$

変位

$$2\mu u_1=\mu/(\lambda+\mu)[\partial^2_x+(\lambda+2\mu)/\mu(\partial^2_y+\partial^2_z)]f^{i}_{1},$$
$$2\mu v_1=-\partial_x\partial_y f^{i}_{1}+\partial_z\theta^{i}_{1},$$
$$2\mu w_1=-\partial_x\partial_z f^{i}_{1}-\partial_y\theta^{i}_{1}$$

ここで，λ，μ：ラメの定数

関数 f^{i}_{1} は Galerkin－vector と一致し，関数 θ^{i}_{1} は秦が非軸問題で用いた Boussinesq の関数に他ならない．

5.　厚板理論の展開

前述のように 3 次元弾性体の変位関数と厚板理論の変位関数は同一であり，以下では Galerkin－vector および Boussinesq の関数の名称を用いる．

板厚が他の方向の長さに比べて小さい板状の物体を想定する．また水平面内に x と y 軸を，z 軸を板厚方向にとり，z 軸の原点を板の中央面に置く．板が全周単純支持され，x，y，z 方向にそれぞれ独立な応力が板の上下面に作用している状態，すなわち上下面で応力が規定されている場合を考える．

式(8)の変位関数 f^{i}_{3} と θ^{i}_{3} は双曲線関数で表現され，２つの関数による等方性体の Navier 解(本来は薄板理論での等分布満載時の級数解を示す)は，変位 w で示される。

$$f^{i}_{3}=\Sigma\Sigma(f_p+C_1\mathrm{ch}\gamma z+C_2\mathrm{sh}\gamma z+C_3\gamma z\mathrm{ch}\gamma z+C_4\gamma z\mathrm{sh}\gamma z)\sin\alpha_m x\times\sin\beta_n y$$
$$\theta^{i}_{3}=\Sigma\Sigma(C_5\mathrm{ch}\gamma z+C_6\mathrm{sh}\gamma z)\cos\alpha_m x\times\cos\beta_n y \qquad (9)$$

ここで，$\alpha_m=m\pi/a$，$\beta_n=n\pi/b$，

$\gamma^2=\alpha_m^2+\beta_n^2$，

a：x 方向のスパン,b：y 方向のスパン，

$\mathrm{ch}\gamma z=\cosh\gamma z$, $\mathrm{sh}\gamma z=\sinh\gamma z$

C_1~C_6：版の上下面の境界条件から得られる定

数,

f_p：物体力に伴う特解

このNavier解が中等厚板理論や薄板理論での値とどの程度の差があるのかを吟味する．

板厚hがスパンに比べて小さい時，双曲線関数の引数ζ(=γh/2)も小さくなるので,以下の漸近展開が可能になる．

$$ch\zeta = 1 + \zeta^2/2!,\ sh\zeta = \zeta + \zeta^2/3!$$

板中央面でのたわみw_0は,

$$Dw_0 = \Sigma\Sigma[p_m\{1+(2-\nu)\gamma^2h^2/8(1-\nu)\} + h/2(\alpha_m t_{xp} + \beta_n t_{yp})\{1+(2-\nu)\gamma^2h^2/24(1-\nu)\}] \times sin\,\alpha_m x\, sin\,\beta_n y/\gamma^4 \quad (10)$$

ここで，$D(=Eh^3/12(1-\nu^2)))$：版の剛性

$p_m = p_l - p_u,\ t_{xp} = t_{xl} + t_{xu},$

$t_{yp} = t_{yl} + t_{yu}$

式(10)はh^2の係数が若干異なるものの中等厚板のReissner理論でのNavier解の近傍にあり，さらにh^2の項を無視すれば薄板理論でのNavierの解に一致する．

6. 他の境界条件を有する板への拡張

板が単純支持辺以外の境界条件をもつ，例えばy方向の端辺が自由である場合に厚板理論のみを用いると,xとy方向に級数展開される関数系に加えて，yとz方向にも級数表現した関数系を重ね合わせて，同時に$\sigma_y=0, \tau_{xy}=0, \tau_{yz}=0$ の境界条件を満足するように互いの未定定数を決定しなければならず，双曲線関数の再展開等の労力を必要とする．そこで厚板理論のNavier解を特解に，薄板理論の同時解を併用するHybrid法(混合法) を開発した．得られた解は精度上3次元解を忠実に表した解よりも劣ると推察されるが，この方法のハンドリングの良さは遥かに優れている．

今相対2辺が自由で，残りの2辺が単純支持される板を考えると，境界条件はy=0,bでMy=0，Vy=0と，x=0,aでw=0，Mx=0となる．

例えばたわみwは次のように得られる．

$$Dw = \Sigma(\Sigma w_p sin\,\beta_n y + A_m ch\,\alpha_m y + B_m sh\,\alpha_m y + C_m \alpha_m y ch\,\alpha_m y + D_m \alpha_m y sh\,\alpha_m y) sin\,\alpha_m x \quad (11)$$

ここで，w_p：厚板理論によるNavier解,

A_m〜D_m：y=0,bの境界条件から得られる定数

7. 多層版への応用

多層版を解析するに際して，解析手法を解の精度の点から検討する必要がある．すなわち解には2つの種類，①閉じた解と②開いた解がある．①はべき乗や指数関数等のからなる代数解で，使用者が誰であっても同じ数値結果が得られる解である．級数の項数のとり方によって解の変動はあるが，今日ではFourier級数に代表される級数解も含まれる．

一方②は，使用者の意図に左右される懸念のある離散化手法で，代表として差分法および有限要素法等がこれに当たる．

式(9)で得られた未定係数を決定した後に，単一版の上下面での変位や応力を求める．さらにこれらを組み合わせて全周単純支持された多層版を構成する．多層版の解法には大別して，多層版の界面に作用するa)伝達力に着目する応力法とb)変位を中心とする変位法がある．

a)応力法

応力法には級数の特長を捉えることにより，次の3つの手法がある．

1. 調和解析法…級数の項数m,nごとに連立式を解き，最後に(m,n)について総和する．
2. 一方向調和解析＋一方向選点法…級数の項mごとに連立式を解き，mについて和をとる．
3. 二方向選点法…離散化された伝達力を項数m,nで総和した形で予め求めておく．

手法1は界面が完全合成される場合に最適で，計算時間も早い点が特長であり，手法2[6)]は一方向が離散化された物理量で表現されている．例えば桁と合成される問題に効率的である．手法3[7)]は連続する物理量を離散的な矩形状パルス（台形でもよい）で置き換え，物理情報を代表点(矩形では中央点)に集めて,伝達力を連立式系に組み立てる｡伝達力間に自由度をもたせることにより，界面の一部分が非合成状態でズレ量が発生する問題に効果がある．応力法を式化すれば次のようにまとめられる．

a)応力法

$$\begin{Bmatrix} U^{u} \\ U^{l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X^{u} \\ X^{l} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

ここで，上添字uは上面を，lは下面を示す。

b)変位法

有限要素法と同じ形式で，界面の変位で表される剛性マトリックスで構成される連立式となる．

$$\begin{Bmatrix} X^{u} \\ X^{l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{u} \\ U^{l} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

応力法および変位法によるいずれの連立式も漸化式の形式を成しており，連立式の形態はバンドマトリックスで構成される．

8. 今後の展望に向けて

独立な3つの物体力に対応する直交異方弾性体のベクトルタイプの変位関数から等方弾性体のGalerkin－vectorとBoussinesqの関数に至る経緯を述べた．これらの関数の持つキーポイントは独立な物体力と連動していることである．つまり物体力に何らかの物理的意味を持たせれば，3つの関数が当然必要になる．例えばDuhamelの類似によれば，温度分布や水圧分布の勾配が物体力に置換できることを証明している．

一方，物体力と関連づけられる変位関数の誘導過程は線形分野に限定されているが，これを非線形分野にまで拡張することが可能である．例えば岡村・島田らはMindlinの素解を積分した値を駆使して，弾性定数の異なる物質が内在する不均質問題[8)]，ひび割れ等によって塑性化した部位を有する問題[9)]等で，線形構成則から外れる物理量を非線形項として物体力に置換させる工夫を巧みに操作することで多くの数値解を示し，3次元問題の研究に大きな影響を与えている．すなわち物体力にどの様な意味を持たせ，どう処理するのかが，複雑に絡み合った非線形問題を解決する糸口になるだろうと推察される．

参考文献

1) E.Reissner: The effects of transversely shear deformation on the bending of elastic plates, Trans.ASME,Vol.67,pp.69-77,1945.
2) 宮本　博：３次元弾性論，裳華房，1967年
3) 国尾　武：固体力学の基礎，培風館，1987年
4) K.Hata:On one method for solving three-dimensional elasticity problems in orthotropic solids,Proc.6th Japan Nat. Cong. Appl. Mech.,1956,pp.43-46.
5) Hu,H.C.:On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body, Acta Scientia Sinica,Vol.2,1953,pp.145-149.
6) 関口幹夫,横山　広,堀川都志雄：リブ付き多層版解析による各種補強床版の実測たわみの評価，構造工学論文集,Vol.54A,pp.442-451,2008.
7) 横山　広,関口幹夫,堀川都志雄：局部はく離を考慮した輪荷重下における舗装と床版界面の応力解析,構造工学論文集,Vol.53A,pp.980-987,2007.
8) 岡村宏一，島田　功：弾塑性，もしくは不均質弾性を有する３次元体の一数値解法，土木学会論文報告集，No.212,pp.11-24，1973.
9) 岡田　清，岡村宏一，園田恵一郎，島田　功：道路橋鉄筋コンクリート床版のひび割れ損傷と疲労性状，土木学会論文報告集，No.312,pp.49-61，1982.

付録

多層版問題の解析には a)応力法，あるいは b)変位法の何れかが採用されてきた．調和解析法に限定して以下議論を進める．多層版の層数 n が一体どの位であれば，得られた解の精度が信頼できるのかを確認する必要がある．各変位や各応力の項目を対象にした試算結果によれば, 単一版の素解による数値と，これら２つの方法から求められた数値との比較では，各方法とも 8~10 程度に留まっていた．さらに多くの層数からなる多層版の解析に対しては，①計算精度を向上させる，例えば単精度演算を倍精度演算に移行する，あるいは②異なった解析方法を見出す等の工夫が要求される．　　そこで新しい方法「挟み込み法」を提案する．この方法は本質的には「伝達マトリックス法」が基本であり，中村 [1)]の示した改良型の伝達マトリックス法を応用した級数解である．周知のように伝達マトリックス法は左側の情報量(U，X)を，右側の情報量(U，X)とを格間マトリックスを用いて関連づける方法である．なお，はり問題ではUは$(w,\ \theta)^T$で，Xは$(M,\ Q)^T$を表現している．

多層版にこの方法を適用するために，式(12)と(13)を組み換えて，格間マトリックスを作成する．

ｉ)　右側の状態量ベクトルを左側の状態量ベクトルに伝達する場合

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = F_i \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} \quad (1)$$

ここで，$\{U \quad X \quad 1\}^T$；状態量ベクトル，

f_{13}と f_{23}は物体力による影響項

ⅱ)　左側の状態量ベクトルを右側の状態量ベクトルに伝達する場合

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_i = G_i \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_i \quad (2)$$

n 層からなる多層版を考える．各界面に番号を付け，最上面が 1 で，最下面の番号を(n+1)とする．なお各層の版厚や弾性定数は任意に設定できる．

式(1)と(2)から，任意点 k での状態量ベクトルは，点 1 での状態量ベクトルで表される．

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = \prod_{j=1}^{k-1} F_j \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{k+1} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_k \quad (3)$$

ここで、Π；乗積を示す.

同様にして，(n+1)の状態量ベクトルとも関係づけられる．

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_{n+1} = \prod_{j=1}^{k} G_{n+1-j} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_k \quad (4)$$

最上面と最下面での応力規定の問題では，式(5)と(6)より k 点の状態量ベクトルが求められる．この操作を順次内点ｉ(ｉ=2,n)で繰り返せば, 最終的に全ての内点での状態量ベクトルが得られる．

$$\begin{Bmatrix} U_k \\ X_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{21}^{k-1} & s_{22}^{k-1} \\ t_{21}^{k} & t_{22}^{k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} X_1 - s_{23}^{k-1} \\ X_{n+1} - t_{23}^{k} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

参考文献

1). 中村秀治：数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案,No.289,pp.43-53,1979.