

# 逐次推計を用いた動特性の変化点検出手法

Change point detection of dynamic properties using sequential estimation

松岡弘大\*, 貝戸清之\*\*  
Kodai Matsuoka, Kiyoyuki Kaito

\*工修, 大阪大学, 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)

\*\*工博, 大阪大学准教授, 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (同上)

In this study, a change point detection technique of dynamic characteristics for time series was proposed with a statistics and informatics viewpoints. Concretely, the change point detection technique was formulated by sequentially discounting estimation of an AR model and scoring that used Shannon information. Moreover, the potency of proposed technique was verified by the numerical simulation. As a result, the change in the mean value was able to be detected when the amount of change was three times or more standard deviation larger. However, the detection sensitivity for the change in periodicity was low.

*Key Words: 24-span railway bridge, passing train load, vibration properties*

キーワード: 24 連鉄道橋, 走行列車荷重, 振動特性

## 1. はじめに

近年, 計量経済や情報論といった分野で時系列応答の周期性の変動評価, および変化点の検出技術が長足の進歩を遂げている<sup>1),2)</sup>. 社会基盤構造物を対象とした場合, 時系列応答(振動)の周期性は固有振動数として理解されており, その重要性から, 理論解析, 数値計算, 現地計測などが継続的に実施されてきた<sup>3),4)</sup>. また, 観測した時系列応答から固有振動数やモード減衰比といった振動特性を同定する手法も数多く提案されている<sup>5)</sup>. それらの指標の一つの応用として, 振動特性の相対変化に着目し, 災害など非常時の構造物の健全性を評価する試みがなされている<sup>6)</sup>. その他にも, 長期モニタリングのための一計測手法として移動車両応答に基づく橋梁の固有振動数の同定<sup>7)</sup>や, 列車の自動制御のための位置検知<sup>8)</sup>といった問題では, ある特定の区間でのみ励起される応答を抽出することが必要とされる. いずれも, 時間軸上で相対的に変化する動特性の変化に着目しており, その時点, もしくは変化前後の動特性を時系列から正確に検出することは重要な課題であると考えられる. このような問題意識のもと, 本研究では, 統計学的, 情報学的な信号処理技術に着目し, ある時点で平均, 分散, 周期といった動特性が変化する時系列から変化点を検出する手法を構築する. なお, 一般的に平均や分散といった指標は動特性と呼ばれないが, 後に詳述するように,

それらが時間的に変動する場合を考慮するために, 本研究では平均, 分散を含めて動特性と呼称する. また, ARモデルは統計的時系列モデルの一種であるが, 状態方程式により構造物の動的応答と関連付けられている<sup>9)</sup>. この点から, 本研究では特にARモデルを基本とした評価手法に焦点を絞って検討する.

他分野では, 変化点を有するような時系列を対象とした時系列モデル, および振動特性の同定法がいくつか提案されている. 非定常性を陽に組み込んだ時系列モデルは主に計量経済の分野で発展している. 例えば, モデルパラメータの推移確率を潜在変数として導入した隠れマルコフモデル<sup>10)</sup>や, スイッチングモデル<sup>11)</sup>などが存在する. しかし, これらは前提条件として, 再び元の状態に戻ることを許容しないなどの制限がある場合が少なくない. 一方で, このようなモデル構造の高度化とは別に, 逐次推計やオンライン推計といった推計アルゴリズムの高度化によって陰に非定常性をモデル化する試みが情報理論の分野で進められている<sup>12)</sup>. 例えば, 逐次推計で得られる結果はモデルパラメータの時系列であり, その変化として非定常性が表現される. 本研究でもこのような時系列モデルの逐次推計を基本とする.

## 2. 時系列モデル

本研究で取扱うAR過程が構造物の運動方程式より導

出されることを示すとともに、AR モデルのパラメータと構造物の固有振動数、モード減衰比との関係を述べる。

## 2.1 状態方程式表現

$N$  自由度離散系としてモデル化される構造物の物理空間座標における運動方程式は次式で定義することができる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

式中、 $\mathbf{M}$ ：質量行列、 $\mathbf{C}$ ：減衰行列、 $\mathbf{K}$ ：剛性行列であり、それぞれ  $N \times N$  次元の正方行列である。また、 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ 、 $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$  は変位ベクトルと外力ベクトルを、右上の添え字  $T$  は転置をそれぞれ表す。ここで物理空間座標で定義される変位  $\mathbf{u}$  をモード空間座標へ変換すると、次式を得る。

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q} \quad (2)$$

$\mathbf{\Phi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$  は固有モード行列で、その行列の要素（モードベクトル）の添え字はモード次数である。一方  $\mathbf{q}$  は  $n$  次元のモード変位ベクトルを示す。さらに係数行列  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  は、

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \delta_{ij} \quad (3a)$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} = \delta_{ij} 2\zeta_n \omega_n = \mathbf{H} \quad (3b)$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \delta_{ij} \omega_n^2 = \mathbf{\Omega} \quad (3c)$$

のように対角化できる。なお、式中の  $\omega_n$ ,  $\zeta_n$  はそれぞれ  $n$  次の非減衰固有周期、および減衰定数である。また、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ関数であり、行数  $i$  と列数  $j$  が等しい場合に 1 をとる。減衰行列の対角化に際しては比例減衰を仮定している。式(3)からモード空間座標における運動方程式は、

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Omega}\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}(t) \quad (4)$$

と表すことができる。ここで、状態変数を  $\mathbf{x} = [\mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}}]^T$  と定義する。式(2)、および式(4)に状態変数  $\mathbf{x}$  を代入し任意の  $k$  を用いて整理することにより、

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{f}(k) \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (6)$$

の状態方程式をえることができる<sup>9)</sup>。また、係数行列  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  はそれぞれ、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega} & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{\Phi}^T \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{\Phi} \quad 0] \quad (7a)$$

である。離散時間系の  $\mathbf{x}(k)$  は連続時間系の時刻  $k\Delta t$  での状態変数  $\mathbf{x}_{\text{continuous}}(k\Delta t)$  に等しいことから、離散時間系での係数行列  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{C}'$  はそれぞれ、

$$\mathbf{A}' = \exp(\mathbf{A}\Delta t) \quad (8a)$$

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{A}' - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (8b)$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C} \quad (8c)$$

となる。

## 2.2 AR 過程

入力応答が白色雑音であると仮定すると、式(5)は

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (9)$$

と表すことができる。なお、 $\boldsymbol{\varepsilon}$  は平均  $\boldsymbol{\mu}$ , 分散共分散  $\boldsymbol{\Sigma}$  の多次元ガウス分布を表す。さらに系が可観測である場合には、可観測行列、

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{2N-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

を用いて、

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{M}_o \mathbf{x}(k) \quad (11)$$

のように可観測正準形に同値変換することにより、

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (12)$$

$$\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (13)$$

と表現できる。なお、

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{M}_o \mathbf{A} \mathbf{M}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_{2N} \\ 1 & 0 & & -a_{2N-1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{M}_o \mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_{2N}]^T \quad (14b)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{M}_o^{-1} = [1, 0, \dots, 0] \quad (14c)$$

である。可観測性を仮定していることから、正準形への変換により固有値は変化しない。すなわち、式(12)、(13)は、

$$\mathbf{u}(k) + \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{A}_n \mathbf{u}(k-n) = \boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (15)$$

で表される AR 過程の状態方程式表現となっている<sup>9)</sup>。AR 過程は、現在の観測値  $\mathbf{u}(k)$  が過去の観測値の線形結

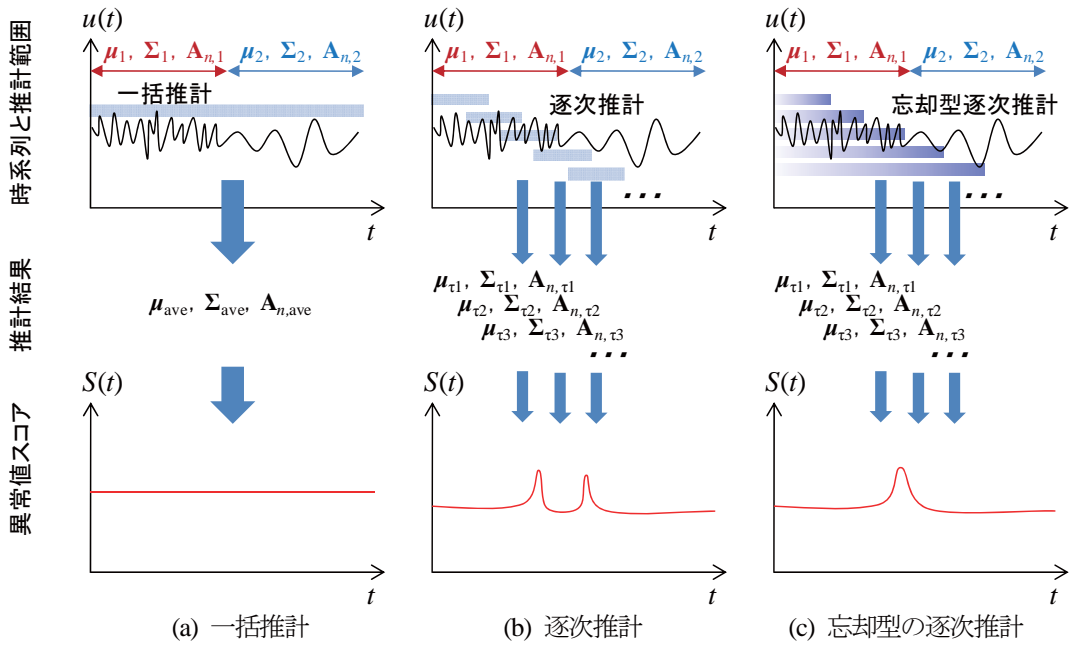


図-1 逐次推計法概念

合となっている。それにより、系の特性は線形結合の係数であるAR係数行列 $\mathbf{A}_n (n=1, \dots, 2N)$ と誤差項の分散共分散 $\Sigma$ 、平均値 $\mu$ により表される。本研究では、それらのパラメータを動特性と呼称し、その変化点を抽出する方法論について議論する。

なお、過去の研究で構造物の動特性として用いられてきた固有周期 $\omega$ とモード減衰比 $\zeta$ は、

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}) = 0 \quad (16)$$

を満たすAR係数行列の固有値 $\lambda$ により、

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \left( \text{Re}(\ln \lambda)^2 + \text{Im}(\ln \lambda)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$\zeta = \frac{-\text{Re}(\ln \lambda)}{\left( \text{Re}(\ln \lambda)^2 + \text{Im}(\ln \lambda)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (18)$$

と導出できる。

### 3. 推計と変化点検出の方法

#### 3.1 動特性の変化と推計法

本研究では動特性 $(\mu, \Sigma, \mathbf{A}_n)$ がある時点で変化するような時系列を対象とし、推計手法の高度化によってその変化点を捉えることを試みる。具体的な方法論として忘却型の逐次推計<sup>12)</sup>を用いる。まずはじめに、忘却型の逐次推計と異常値スコアによる変化点検出の概念を、図-1に示す時系列に基づいて説明する。図-1(a)に示すように、対象とする時系列は2つの動特性 $(\mu_1, \Sigma_1, \mathbf{A}_{n,1})$ 、 $(\mu_2, \Sigma_2, \mathbf{A}_{n,2})$ を有し、ある時点で動特性が変化することによる変化点を有している。一般的な推計法として、全時系列(青塗り範囲)を用いて動特性を推計した場合を考える、

この時、当然ながら、得られる動特性 $(\mu_{\text{ave}}, \Sigma_{\text{ave}}, \mathbf{A}_{n,\text{ave}})$ は全体の平均的な値となる。この場合、時系列の変化具合を表す異常値スコア(3.4で詳述する)は一定であり変化点を検出することはできない。時系列の変化点を抽出する一つの方法論として同図(b)に示す逐次推計を用いることがあげられる。逐次推計では、一定の短い時間ウィンドウ(青塗り範囲)により切出された区間を対象に推計を実施し、ウィンドウを移動させながら推計を繰り返すことで動特性の時系列 $(\mu_\tau, \Sigma_\tau, \mathbf{A}_{n,\tau} : \tau=1, 2, \dots)$ を得る。この動特性の時系列に基づき逐次的に異常値スコアを計算することで、動特性の変化を抽出する。異常値スコアとしては、シャノン情報量やヘリンジャースコアを利用できる<sup>12)</sup>。一方で、逐次推計に基づいて算出した異常値スコアは、1回の動特性の変化に対して2回のピークを生成する。これは、「時間ウィンドウにはじめに変化点が含まれる時点」と「時間ウィンドウから変化点が抜ける時点」にモデルが大きく変化することに起因する。本研究で扱う忘却型の逐次推計は、そのような逐次推計の問題点を改善した手法である。当該手法では、時間ウィンドウによる切出しは行わずに、逐次、新たな観測値を取りこんで推計することにより逐次推計と同様に動特性の時系列 $(\mu_\tau, \Sigma_\tau, \mathbf{A}_{n,\tau} : \tau=1, 2, \dots)$ を得る。この際、過去の観測値ほどモデルに及ぼす影響が小さくなるような、忘却パラメータを導入する。3.2で述べるように、忘却パラメータを用いた逐次推計により過去の観測値の影響度は指数的に小さくなる。図-1(c)には観測値の影響度を青塗り部の濃淡で示しており、忘却型の逐次推計により新たに取り込む観測値に特化したモデルが推計されることを表している。結果として、シャノン情報量やヘリンジャースコアといった異常値スコア利用し、動特性の変化点を異常値スコア系列の唯一のピ

ークとして抽出することができる。以下では忘却型の逐次推計について説明した後、異常値スコアとして用いるシャノン情報量について述べる。

### 3.2 AR モデルの一括推計

AR モデルの一括推計に新規性はないが、全体の見通しを良くするために、本節で説明を加え、その後、次節 3.3 で忘却型の逐次推計法とそのアルゴリズムを述べることにする。

推計に際して、観測値  $\mathbf{u}(k)$  を以下のように変換する。

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{u}(k) - \boldsymbol{\mu} \quad (19)$$

これにより、AR 過程は、

$$\mathbf{z}(k) + \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{A}_n \mathbf{z}(k-n) = \boldsymbol{\varepsilon}'(k) \quad (20)$$

として表される。なお、 $\boldsymbol{\varepsilon}'$  は平均 0、分散共分散  $\boldsymbol{\Sigma}$  の多次元ガウス分布である。誤差項  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  がガウス過程であることから、AR 過程  $\mathbf{z}(k)$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) もガウス過程に従う。これにより未知パラメータ  $\mathbf{A}_n$ 、 $\boldsymbol{\Sigma}$  を与件とした  $2N$  次元確率変数  $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(2N)]^T$  の確率密度関数  $h$  は、自己共分散関数を要素とする対称行列を分散共分散  $\boldsymbol{\Sigma}$  として有する  $2N$  次元正規分布として以下のように算出できる。

$$h(\mathbf{Z} | \mathbf{A}_n, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-N} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{Z}\right\} \quad (21)$$

また、式(20)より  $\mathbf{z}(k-1), \dots, \mathbf{z}(k-2N)$  が与えられたときの  $\mathbf{z}(k)$  の確率密度分布は、

$$g(\mathbf{z}(k) | \mathbf{A}_n, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi |\boldsymbol{\Sigma}|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(\mathbf{z}(k) - \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{A}_n \mathbf{z}(k-n)\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\mathbf{z}(k) - \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{A}_n \mathbf{z}(k-n)\right)\right] \quad (22)$$

と算出することができる。これにより、式(20)の尤度関数  $L$  が式(21)と(22)の同時確率密度関数、

$$L(\mathbf{z}(k) | \mathbf{A}_n, \boldsymbol{\Sigma}) = h(\mathbf{Z} | \mathbf{A}_n, \boldsymbol{\Sigma}) \prod g(\mathbf{z}(k) | \mathbf{A}_n, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (23)$$

として与えられる。最終的に対数尤度関数  $\ln L$  は、

$$\ln L = \ln h + (K-N) \ln (2\pi |\boldsymbol{\Sigma}|)^{1/2} - \frac{1}{2} \sum_{k=2N+1}^K \left(\mathbf{z}(k) - \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{A}_n \mathbf{z}(k-n)\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\mathbf{z}(k) - \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{A}_n \mathbf{z}(k-n)\right) \quad (24)$$

のように算出できる。

一般的に、 $K$  は  $N$  の仮定のもとで式(24)の右辺第 1 項を省略した近似関数を最大化する  $\mathbf{A}_n$  を求める。これを  $\mathbf{A}_n$  で偏微分して 0 とおくことにより、対数尤度を最大化する  $\mathbf{A}_n$  ( $n=1, \dots, 2N$ ) は、

$$\sum_{n=1}^{2N} \mathbf{A}_n \mathbf{R}_{m-n} = \mathbf{R}_m \quad (m=1, \dots, 2N) \quad (25)$$

を満たす。なお、 $\mathbf{R}_m$  は自己共分散関数であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_m &= \frac{1}{K-2N} \sum_{k=2N+1}^K \mathbf{z}(k) \mathbf{z}(k-m)^T \\ &= \frac{1}{K-2N} \sum_{k=2N+1}^K (\mathbf{u}(k) - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{u}(k-m) - \boldsymbol{\mu})^T \end{aligned} \quad (26)$$

により表される。式(25)は Yule-Walker 方程式と呼ばれ、帰納的に  $\mathbf{A}_n$  を求めることができる。また、 $\boldsymbol{\mu}$ 、 $\boldsymbol{\Sigma}$  についても当然のことながら、

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{K-2N} \sum_{k=2N+1}^K \mathbf{u}(k) \quad (27)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{K-2N} \sum_{k=2N+1}^K \left(\mathbf{z}(k) - \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{A}_n \mathbf{z}(k-n)\right) \left(\mathbf{z}(k) - \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{A}_n \mathbf{z}(k-n)\right)^T \quad (28)$$

として推計できる。

### 3.3 AR モデルの忘却型逐次推計

忘却型の逐次推計では、上記の推計を逐次的に実行する。ここで、忘却パラメータ  $r$  を導入する。忘却パラメータ  $r$  により、計算に必要な統計量を、現在の値と新しい値の  $(1-r) : r$  の比の重み付き平均の形で更新する<sup>13)</sup>。忘却パラメータ  $r$  が大きいほど、過去のデータの影響が小さくなる。以下、AR モデルの一括推計を忘却パラメータ  $r$  を用いた忘却型の逐次推計へと書き換える。

いま、初期値として  $\hat{\mathbf{A}}_n^0$ 、 $\hat{\boldsymbol{\mu}}^0$ 、 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^0$ 、および  $\hat{\mathbf{R}}_m^0$  を設定する。なお、そのうえで、新たな観測値読み込むたびに、以下により推計を行う。

観測値  $\mathbf{u}(k)$  を読み込むことで、まず、平均  $\hat{\boldsymbol{\mu}}^k$  が、

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^k = r \mathbf{u}(k) + (1-r) \hat{\boldsymbol{\mu}}^{k-1} \quad (29)$$

により算出される。つぎに、平均  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_n^k$  を用いて自己共分散関数  $\hat{\mathbf{R}}_m^k$  が

$$\hat{\mathbf{R}}_m^k = (1-r) \hat{\mathbf{R}}_m^{k-1} + r (\mathbf{u}(k) - \hat{\boldsymbol{\mu}}^k)(\mathbf{u}(k-m) - \hat{\boldsymbol{\mu}}^k)^T \quad (30)$$

と更新できる。これにより、AR 係数行列  $\hat{\mathbf{A}}_n^k$  は、式(25)と同様に

$$\sum_{n=1}^{2N} \mathbf{A}_n^k \hat{\mathbf{R}}_{m-n}^k = \hat{\mathbf{R}}_m^k \quad (m=1, \dots, 2N) \quad (31)$$

の解  $\hat{\mathbf{A}}_n^k$  として与えられる。自己共分散行列  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^k$  は

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^k = (1-r) \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{k-1} + r (\hat{\mathbf{u}}(k) - \mathbf{u}(k)) (\hat{\mathbf{u}}(k) - \mathbf{u}(k))^T \quad (32)$$

として求めることができる。なお、 $0 < r < 1$  であるとともに、



$$\hat{\mathbf{u}}(k) = \sum_{n=1}^{2N} \hat{\mathbf{A}}_n^k (\mathbf{u}(k-n) - \hat{\boldsymbol{\mu}}^k) + \hat{\boldsymbol{\mu}}^k \quad (33)$$

である。

これにより、観測値  $\mathbf{u}(k) : k=1, 2, \dots, K$  から、それぞれに対応した推計値  $\hat{\mathbf{A}}_n^k, \hat{\boldsymbol{\mu}}^k, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^k, : k=1, 2, \dots, K$  で表される AR モデル  $p$  の系列  $p^k : k=1, 2, \dots, K$  を得ることができる。

### 3.4 異常値スコア

いま、観測値  $\mathbf{u}(k) : k=1, 2, \dots, K$  に対して、それぞれの観測値に対応したモデル（確率分布）の系列  $p^k : k=1, 2, \dots, K$  が得られているとする。本研究では観測値  $\mathbf{u}(k)$  に対応するモデルは AR モデル(20), その確率密度関数は式(22)である。

いま、変化点検出のために必要な指標を考える。一つの考え方として、3.1 でも言及したように、過去のモデルと現在の観測値との一致性を利用することがあげられる。動特性  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{A}_n)$  が変化しなければ観測値の系列は定常であるために、観測値のいずれの区間で推計した動特性も同様となる。一方で、変化点を有する場合には、動特性  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{A}_n)$  の推計値は変化点前後で大きく異なる。そのため、例えば、変化点以後の観測値に、変化点以前の観測値から推計したモデルを当てはめた場合、モデルによる説明力は変化点がない場合と比較して小さくなる。このような考え方にに基づき、異常値スコアを、

$$S(k) = -\ln p(\mathbf{u}(k) | \hat{\boldsymbol{\mu}}^{k-1}, \hat{\mathbf{A}}_n^{k-1}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n^{k-1}) \quad (34)$$

と定義する。異常値スコア  $S(k)$  は、1 期 (1 サンプル) 過去のモデルの動特性  $(\hat{\mathbf{A}}_n^{k-1}, \hat{\boldsymbol{\mu}}^{k-1}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{k-1})$  に対する現在の観測値  $\mathbf{u}(k)$  の意外性を表す。異常値スコア  $S(k)$  のこのような性質から、動特性の変化点を取り込まれた場合、これまで学習してきた動特性  $(\hat{\mathbf{A}}_n^{k-1}, \hat{\boldsymbol{\mu}}^{k-1}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{k-1})$  と異なるため、異常値スコア  $S(k)$  は他の時点よりも大きくなる<sup>2)</sup>。一般的に式(34)より算出される量はシャノン情報量と呼ばれる<sup>13)</sup>。この他にも、ヘリンジャースコアと呼ばれる情報量を異常値スコアとして利用することも考えられる。ヘリンジャースコアはモデルパラメータの移動量に着目した指標であり、その値が高い場合、観測値がモデルの変化に大きく寄与したと見なすことができる。しかしながら、本研究で扱う AR モデルにおいては直接算出することが困難で近似計算が必要であるために、本研究ではシャノン情報量を異常値スコアとして採用する。

## 4. 数値シミュレーションによる性能検証

AR モデルの忘却型逐次推計による変化点検出では、

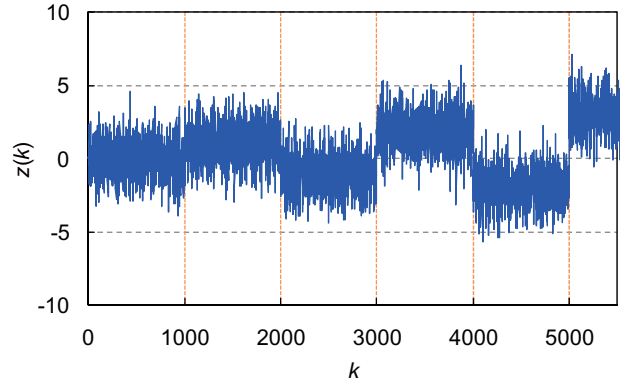


図-2 平均値の変化点を有する時系列

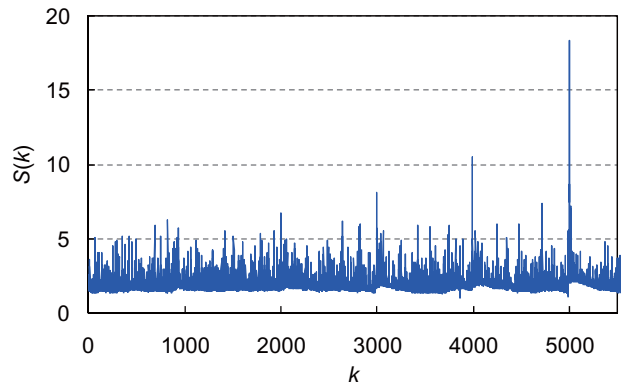


図-3 平均値の変化に対する異常スコアの感度

動特性  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{A}_n)$  の変化に起因して、増加する異常値スコアから変化点を読み取ることで、変化点を検出する。以下では動特性  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{A}_n)$  のそれぞれの変化に対する検出性能を数値シミュレーションに基づき議論する。

### 4.1 平均値の変化点検出

本節では特に動特性  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{A}_n)$  のうち、平均値  $\boldsymbol{\mu}$  の変化点の検出性能を検討するために、

$$\mathbf{u}(k) = z(k) + \boldsymbol{\mu}(k) \quad (35)$$

$$z(k) = 0.6z(k-1) - 0.5z(k-2) + N(0,1) \quad (36)$$

から時系列データを発生させた。なお、 $\boldsymbol{\mu}(k)$  は  $k$  が 1000 ごとにその値を変動させ、その他の  $k$  では  $k-1$  と同様とした。変動量は、 $\boldsymbol{\mu}(1001) = \boldsymbol{\mu}(1000) + 1$ ,  $\boldsymbol{\mu}(2001) = \boldsymbol{\mu}(2000) - 2$ ,  $\boldsymbol{\mu}(3001) = \boldsymbol{\mu}(3000) + 3$ ,  $\boldsymbol{\mu}(4001) = \boldsymbol{\mu}(4000) - 4$  とし、正負交互、かつ後の変化点ほど変化量を増加させた。また、サンプル数  $K$  は 5500 としている。なお、式(36)中  $N(0, 1)$  は平均 0, 分散 1 の標準ガウス分布を表す。作成した時系列  $z(k)$  を図-2 に示す。同図には平均値の変化時点を橙線で併記している。 $k$  が大きくなるほど平均値の変化量が大きく検出が容易となる。

これに対して、AR モデルの忘却型逐次推計を行い、異常値スコアを算出した。なお、AR 次数は 2, 忘却パラメータ  $r$  は 0.01 としている。結果を図-3 に示す。図-3

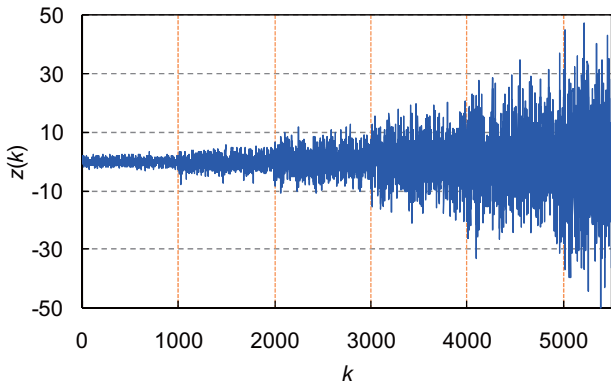


図-4 分散の変化点を有する時系列

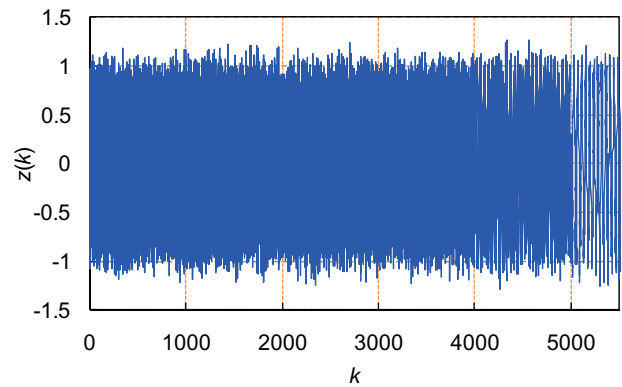


図-6 分散の変化点を有する時系列

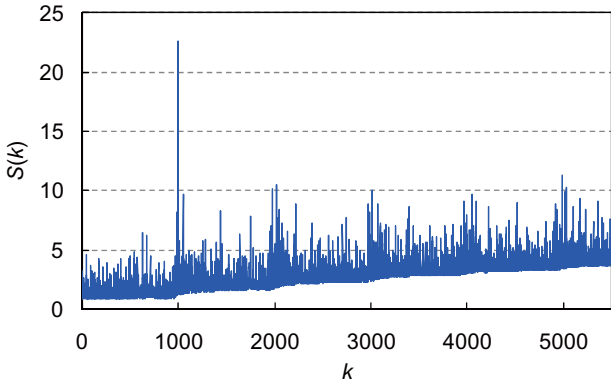


図-5 分散の変化に対する異常スコアの感度

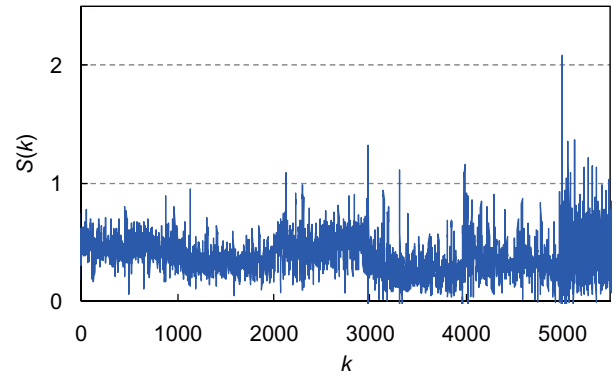


図-7 周期性の変化に対する異常スコアの感度

より  $k=1000$  の時点（平均が1変動）に異常値スコアのピークを確認することはできないが、それ以外の  $k=2000, 3000, 4000, 5000$  には異常値スコアのピークを確認することができる。また、平均値の変化点における異常値スコアは  $k$  が大きいほど高いピークを形成する傾向にある。  $k=2000$  での異常値スコアの約7となっているが、変化点でない  $k$  が約4800の地点でも7.5程度の異常値スコアを示している。このことから、平均値のみの変動に着目した場合、その変動が標準偏差の2倍程度から異常値スコアがピークを形成し、約3倍以上であればその変化点を誤検知なく抽出できることがわかる。

#### 4.2 分散の変化点検出

つぎに分散共分散  $\Sigma$  の変化点の検出性能を検討するために、

$$u(k) = z(k) \quad (37)$$

$$z(k) = 0.6z(k-1) - 0.5z(k-2) + N(0, \alpha(k)) \quad (38)$$

から時系列データを発生させた。なお、 $\alpha(k)$  は  $k$  が1000ごとにその値を変動させ、その他の  $k$  では  $k-1$  と同様とした。変動量は、 $\alpha(1001) = \alpha(1000) + 1$ ,  $\alpha(2001) = \alpha(2000) + 2$ ,  $\alpha(3001) = \alpha(4000) + 3$ ,  $\alpha(4001) = \mu(5000) + 4$  とし、後の変化点ほどその変化量を増加させた。また、サンプル数  $K$  は前節と同じく5500としている。作成した時系列  $z(k)$  を図-4に示す。同図には標準偏差（分散  $\Sigma^{1/2}$ ）

の変化時点を橙線で併記している。

異常値スコアの算出結果を結果を図-3に示す。なお、AR次数は2、忘却パラメータ  $r$  は0.01としている。同図より異常値スコアは  $k=1000$  で大きなピークを形成している。しかしながら、それ以外の変化点では、分散共分散の変化量が大いにも関わらず明確なピークを確認できない。変化量とは別に分散共分散が大きくなることで、モデル自体の推計精度の低下が一つの原因であると考えられる。さらに、変化は式(38)のガウス分布を通じて系列  $z(k)$  に現れる。実際にはガウス分布  $N(0, \alpha(k))$  に従う乱数を  $z(k)$  に付加しているため、 $\alpha(k)$  を変化された時点ですぐにその値が  $z(k)$  に反映されるとは限らない。これにより、変化点直後にこのピークが団塊的に形成されたと考えられる。以上より、分散共分散  $\Sigma$  の変化においては、変化前の分散共分散  $\Sigma$  の値の影響が大きく、その値が大きい場合には、異常値スコアは明確なピークを示さないことを確認した。

#### 4.3 周期性の変化点検出

最後に動特性  $(\mu, \Sigma, \mathbf{A}_n)$  のうち、周期性を表す  $\mathbf{A}_n$  の変化点の検出性能を検討する。

$$u(k) = z(k) \quad (39)$$

$$z(k) = \beta_1(k)z(k-1) - \beta_2(k)z(k-2) + N(0, 0.1) \quad (40)$$

から時系列データを発生させた。なお、 $\beta_1(k), \beta_2(k)$  は  $k$

が 1000 ごとにその値を変動させ、その他の  $k$  では  $k-1$  と同様とした。変動量は、周期  $\omega$  に換算して、 $\omega(1001)=0.9 \times \omega(1000)$ ,  $\omega(2001)=0.8 \times \omega(2000)$ ,  $\omega(3001)=0.7 \times \omega(3000)$ ,  $\omega(4001)=0.6 \times \omega(5000)$ ,  $\omega(5001)=0.5 \times \omega(5000)$  とした。具体的な  $\beta_1(k)$ ,  $\beta_2(k)$  の値として  $[\beta_1(1), \beta_2(1)] = [-1.0774, 0.9968]$  と設定し、それ以降の  $\beta_1(k)$ ,  $\beta_2(k)$  を上記の周期  $\omega$  の関係から逆算した。これまでと同様に、後の変化点ほど変化量を増加させている。また、サンプル数  $K$  も同様に 5500 としている。作成した時系列  $z(k)$  を図-6 に示す。同図には周期性の変化時点を橙線で併記している。 $k$  が大きくなるほど周期性の変化量が大きく検出が容易となる。

異常値スコアの算出結果を結果を図-7 に示す。なお、AR 次数は 2, 忘却パラメータ  $r$  は 0.01 としている。同図より異常値スコアは  $k=3000, 4000, 5000$  でピークを形成しているが、誤検知なしに抽出可能なピークは  $k=5000$  のみとなっている。誤差項の標準偏差を 0.2 と他のケースと比べて小さくしているにも関わらず、周期  $\omega$  が半減するような場合のみしか抽出することはできなかった。これは時系列の周期が変化したとしても、新たに取り込んだ 1 観測点の値は大きく変化しないことに起因している。すなわち、周期性の変化を捉えるためには、新たな観測点  $\mathbf{u}(k)$  を読み込む際に、1 観測点ではなく、ある程度の長さ  $k_n$  を有する観測点系列  $[\mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k+1), \dots, \mathbf{u}(k+k_n)]$  を読み込む必要があると考えられる。

## 5. おわりに

本研究では、構造物に突発的な異常が発生した際にこれを検知するため、もしくは走行する移動車両の応答から特定の路線施設通過時にのみ励起される応答を検知するための要素技術の開発を目的として、統計学的、情報学的観点から検討を実施した。まず、構造物の動的応答（時系列）を状態方程式を介して AR モデルで表現したうえで、ある時点で平均  $\boldsymbol{\mu}$ , 分散共分散  $\boldsymbol{\Sigma}$ , AR 係数行列  $\mathbf{A}_n$  が変化する時系列を対象に、その変化点を抽出するための方法論を提示した。具体的には、AR モデルの未知パラメータの推計法として、忘却型の逐次推計法を定式化するとともに、変化点を検知するための指標としてシャノン情報量を用いることを提案した。さらに、数値シミュレーションにより作成した変化点を有する時系列に本手法を適用することで、その有効性について検証した。その結果、平均  $\boldsymbol{\mu}$  は、その変化量が標準偏差の 3 倍程度より大きい場合に変化点として検出できること、分散共分散  $\boldsymbol{\Sigma}$  の変化点検出精度は、変化量よりも変化点以前の値に大きく影響されること、周期性を表す AR 係数行列  $\mathbf{A}_n$  については、変化に対する感度が低く周期  $\omega$  が半減するような場合に検出可能となることなどの知見を得た。

一方で、実構造物から得られる観測値への適用を見据

えた場合、依然として課題が山積している。以下に主な課題を述べる。現状で、常時獲得可能な構造物の時系列応答は加速度応答のみであるために、構造物の突発的異常の影響は主として振幅と周期性に現れると考えられる。これらの限られた情報から構造物の健全性といった実務的要請の高い情報を獲得するためには、周期性の変化に対する検出感度の向上が不可欠である。一方で、本手法で比較的感受度が高かった平均値の変化を利用することを考えた場合、変位に相当する情報の常時モニタリングが必要となる、変位を常時モニタリングすることは経済的、物理的に難しく、常時モニタリングが比較的容易な加速度応答から変位を推計する手法を開発することも有用であると考えられる。また、本研究では数値シミュレーションにより作成した時系列のみの検討であったために、当然のことながら、今後、実構造物で計測した時系列応答に適用し、その有効性を明らかにしていく必要がある。

## 参考文献

- 1) Walter Zucchini and Iain L. MacDonald: *Hidden Markov Models for Time Series An Introduction Using R*, CRC Press, 2009.
- 2) 山西健司: 情報論的学習理論, 共立出版, 2010.
- 3) Fryba, L.: *Vibration of Solid and Structures under Moving load*, Noordhoff International, 1972.
- 4) 松浦章夫: 高速鉄道における橋桁の動的挙動に関する研究, 土木学会論文集, 第 256 号, pp.35-47, 1976.
- 5) 長山智則, 阿部雅人, 藤野陽三, 池田憲二: 常時微動計測に基づく非比例減衰系の非反復構造逆解析と長大橋の動特性の理解, 土木学会論文集, No.745/I-65, pp.155-169, 2003.
- 6) 小国健二, 堀宗朗: 無線センサネットワークによる構造物塑性化検知のための計測・解析手法の提案, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 67, No. 1, pp. 13-24, 2011.
- 7) Y. B. Yang, C. W. Ling and J. D. Yau: Extracting bridge frequency from the dynamic response of a passing vehicle, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.272, pp.471-493, 2004.
- 8) 吉本剛生, 片岡健司, 駒谷喜代俊: 特開 2002-37070 「車両位置検出装置および車両速度検出装置」, 2002.
- 9) 岡林隆敏, 中忠資, 奥松俊博: 多次元 AR モデルを用いた常時微動による橋梁振動特性推定法と推定精度の検討, 土木学会論文集 A, Vol.64, No.2, pp.474-487, 2008.
- 10) N. G. Mankiw, D. Romer and D. N. Weil: A Contribution to the Empirics of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, Vol.107, pp.407-437, 1992.
- 11) K. Ohtani, S. Kakimoto and K. Abe: A Gradual Switching Regression Model with a Flexible Transition Path,

Economics Letters, Vol.32, pp.43–48,1990.

12)K. Yamanishi and J. Takeuchi: A unifying framework for detecting outliers and change-points from nonstationary time series data, Proceeding of the Ninth ACM SIGKDD, ACM Press, pp.676–681, 2003.

13)K. Yamanishi and Y. Murayama: Dynamic model selection with with its applications to novelty detection, IEEE Transactions on Information Theory, No.53(6), pp.2180–2189, 2007.