

スペクトル要素法に基づく高振動数起振による構造物の損傷同定について

Damage Identification Technique using High-Frequency Excitation based on the Spectral Element Method

古川愛子*, 松尾卓弥**, 西川晃司**
Aiko Furukawa, Takuya Matsuo, Koji Nishikawa

*京都大学大学院准教授, 工学研究科 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)
**京都大学大学院修士課程, 工学研究科 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

This paper presents a damage identification technique using high-frequency excitation based on the spectral element method for the structural health monitoring. Considering a drawback of the low-frequency-based damage identification technique, this study proposes a damage identification technique using kHz-level frequency that can detect smaller damage efficiently. It is assumed that the structure is excited with a harmonic force by a piezoelectric actuator and that the method focuses on the difference of the frequency response function (FRF) by damage. Moreover, it uses the spectral element method that is suitable for analyzing structural responses at high frequency domain. The effectiveness of the proposed method was verified by numerical simulations.

Key Words: damage identification, spectral element method, high-frequency, FRF
キーワード: 損傷同定, スペクトル要素法, 高振動数, 周波数応答関数

1. はじめに

現在わが国では、高度経済成長期に架設された橋梁の老朽化が社会問題となっており、地震多発国であるわが国において、老朽化した橋梁は常に地震による危機に曝されているといえる。このような老朽化した橋梁を撤去し新たに架設するのは莫大なコストがかかるため、建設投資が減少傾向にある昨今では、既設橋梁の新規更新は困難である。したがって、橋梁の適切な維持・管理とそのコスト削減が必須の課題である。

このような中、各国で橋梁の重大損傷事故が多発しており、わが国においても2007年に木曾川大橋や本荘大橋の斜材破断事故が発生した。いずれも高度経済成長期に建設され、供用後40～45年が経過した鋼トラス橋の事故である¹⁾。このような重大事故が発生する前に、事前に損傷を発見するのが重要である。

橋梁の維持・管理において損傷を発見する方法の中心となっているのは目視点検である。目視点検は、多くの労力と時間がかかり、さらに判定結果にもばらつきが生じる可能性があり、その信頼性の問題が指摘されている。損傷が見える範囲においては、目視は有効な手段である

といえるが、見えない、見に行けない場所の損傷を検出することはできず、また、外壁で覆われている内部の損傷を発見するには、外壁を取り除かなければならず、膨大なコストと時間がかかるという問題もある²⁾。

このような問題を解決するため、目視点検に代わる損傷による振動特性の変化を利用した損傷検出手法である構造ヘルスマモニタリングの研究が進められている。本論文では、従来の研究の問題点を踏まえ、損傷検出手法の一つを提案し、その優位性を検証することが目的である。

振動特性の変化を利用して構造物の損傷を検出するための様々な手法³⁾⁻⁵⁾が提案されている。微動計測などのHzレベルの低振動数領域の振動特性を利用するものは、小さな損傷の検出には適しておらず、構造物全体が振動するため橋梁全体にセンサを設置しなければならないという問題がある。超音波検査などのMHzレベルの高振動数領域の振動特性を利用するものは、一度に検査できる範囲が非常に狭く構造物全体を検査するのに非常に時間がかかるという問題がある。そこで本研究では、小さな損傷を効率よく検出できるkHzレベルの高振動数領域の振動特性を利用した損傷同定手法を提案する。圧電型アクチュエータでの調和外力の起振を想定し、損傷に伴

う周波数応答関数の変化に着目する。同定に高振動数領域の解析に適したスペクトル要素法⁹⁾を用いるのが特徴である。数値シミュレーションによって提案手法の有用性を検証する。

2. スペクトル要素法

スペクトル要素法についてその概要を説明するとともに、有限要素法との解析結果の比較を行う。

有限要素法 (FEM) やスペクトル要素法 (SEM) では、構造物を有限個の要素の集合体として捉え、各要素が要素上の節点で連結されているものとして考える。要素内の変位を節点変位で補間する際、FEM では多項式で補間するのに対し、SEM では振動数の関数で補間する。即ち SEM は節点変位と節点力の関係を表す動剛性行列を振動数毎に構築する周波数領域の解法である。

2.1 定式化

オイラー・ベルヌーイ梁を対象に、スペクトル要素法に基づいて要素行列を導出する。

(1) 軸方向成分

軸方向の変位を $u(x, t)$ 、要素の長さ l 、断面積 A 、ヤング率 E 、単位体積重量 ρ とすると、運動方程式は次のように表される。

$$EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

軸力 $N_t(x, t)$ は、次式の通りである。

$$N_t(x, t) = EA \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.2)$$

変位 $u(x, t)$ のフーリエ変換を $U(x, \omega)$ とすると、次の式が成り立つ。

$$U(x, \omega) = \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.3)$$

式(2.1)を周波数領域で書き表すと、

$$EA \frac{d^2 U(x, \omega)}{dx^2} + \omega^2 \rho A U(x, \omega) = 0 \quad (2.4)$$

となる。この解は、次のような形で推定される。

$$U(x, \omega) = a e^{-ik(\omega)x} \quad (2.5)$$

式(2.5)を式(2.4)に代入することにより、次の関係が得られる

$$k^2 - k_L^2 = 0 \quad (2.6)$$

ただし、 k_L は ω の関数である。

$$k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (2.7)$$

よって、式(2.6)の解は、次式で表される。

$$k_1 = -k_2 = k_L \quad (2.8)$$

この式から、式(2.5)の節点変位 $U(x, \omega)$ は次のようになる。

$$U(x, \omega) = a_1 e^{-ik_L x} + a_2 e^{+ik_L x} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (2.9)$$

ただし、

$$\mathbf{e}(x, \omega) = [e^{-ik_L x} \quad e^{+ik_L x}] \quad (2.10)$$

$$\mathbf{a} = \{a_1 \quad a_2\}^T$$

である。ここで、要素の境界条件より次の式が得られる。

$$\mathbf{d}(\omega) = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(0) \\ U(l) \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

式(2.9)を式(2.11)の右辺に代入すると、次式を得る。

$$\mathbf{d}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(0, \omega) \\ \mathbf{e}(l, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}_R(\omega) \mathbf{a} \quad (2.12)$$

ただし、

$$\mathbf{H}_R(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik_L l} & e^{+ik_L l} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

である。式(2.12)を使って式(2.9)からベクトル \mathbf{a} を消去すると、次式を得る。

$$U(x, \omega) = \mathbf{N}_R(x, \omega) \mathbf{d}(\omega) \quad (2.14)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_R(x, \omega) &= \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}_R^{-1}(\omega) = [N_{R1}(x, \omega) \quad N_{R2}(x, \omega)] \\ N_{R1}(x, \omega) &= \sin[k_L(l-x)] / \sin(k_L l) \\ N_{R2}(x, \omega) &= \sin(k_L x) / \sin(k_L l) \end{aligned} \quad (2.15)$$

である。式(2.2)の軸力を、周波数領域で表すと、次の式で表される。

$$N(x, \omega) = EA \frac{dU(x, \omega)}{dx} \quad (2.16)$$

この要素内の軸力と節点に作用する力の関係は、次式で表される。

$$\mathbf{f}_c(\omega) = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N(0) \\ +N(l) \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

式(2.14)と式(2.16)を式(2.17)の右辺に代入すると次の式が得られる。

$$\mathbf{S}_R(\omega) \mathbf{d}(\omega) = \mathbf{f}_c(\omega) \quad (2.18)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R(\omega) &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} S_{R11} & S_{R12} \\ S_{R12} & S_{R22} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_R(\omega)^T \\ S_{R11} &= S_{R22} = (k_L l) / \tan(k_L l) \\ S_{R12} &= -(k_L l) / \sin(k_L l) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$k_L = \omega \sqrt{\rho/E}$$

である。

(2) せん断・曲げ方向成分

(1)と同じように、せん断方向の変位を $v(x, t)$ と置く。

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} - \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.20)$$

せん断力と曲げモーメントは、次の通りである。

$$Q_t(x, t) = -EI \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} \quad (2.21)$$

$$M_t(x, t) = EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}$$

(1)と同様にすると、 $v(x, t)$ のフーリエ変換 $V(x, \omega)$ は、次の式で表される。

$$V(x, \omega) = a_1 e^{-ik_F x} + a_2 e^{-k_F x} + a_3 e^{+ik_F x} + a_4 e^{+k_F x} \quad (2.22)$$

ただし、 k_F は ω の関数である。

$$k_F = \sqrt{\omega^4 \frac{\rho A}{EI}} \quad (2.23)$$

これらの式から(1)と同様にして、せん断・曲げ方向の動剛性行列 $\mathbf{S}_B(\omega)$ が導出される。なお、スペクトル要素法では質量の影響は動剛性行列に含まれている。

2.2 有限要素法との比較

例として、有限要素法の軸方向の要素剛性行列を上げると次のようになる。

$$\mathbf{K}_R = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

一方、スペクトル要素法の軸方向の動剛性行列は式(2.19)より以下のようにになる。

$$\mathbf{S}_R(\omega) = \frac{EAk(\omega)}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tan k(\omega)} & -\frac{1}{\sin k(\omega)} \\ -\frac{1}{\sin k(\omega)} & \frac{1}{\tan k(\omega)} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$k(\omega) = \omega l \sqrt{\rho/E}$$

要素内の変位を節点変位で補間する際、FEMでは多項式で補間したが、SEMでは振動数の関数で補間した。高振動数で起振する場合は扱う波長が短いため、FEMでは要素分割数を多く取らなければならないので、計算時間が膨大になるという問題があると考えられる。その一方、SEMでは断面形状が変化する点や外力を与える点、応答を算出する点等を除いて要素を分割する必要がないと考えられる。本節では、要素分割数が解析結果にどのような影響を及ぼすかをFEMとSEMの比較を通して検証する。

(1) 解析ケース

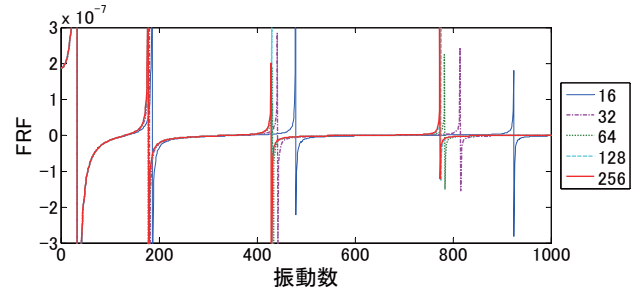
両端固定の梁を考える。この梁部材は鋼トラス橋の斜材を想定しており、物性値は部材長さ $l = 7.38[m]$ 、単位体積質量 $\rho = 7800[kg/m^3]$ 、ヤング率 $E = 2.20 \times 10^{11}[N/m^2]$ 、断面積 $A = 5.50 \times 10^{-3}[m^2]$ 、断面2次モーメント $I = 5.11 \times 10^{-5}[m^4]$ とした。減衰定数 $h = 0$ の非減衰系を仮定した。起振節点は部材の中央に固定し、起振方向は部材に対して直角として、調和外力を作用させる。起振点と同じ節点で周波数応答関数を計測する。

計測する周波数応答関数 $\mathbf{H}(\omega)$ は、有限要素法では式(2.26)、スペクトル要素法では式(2.27)で与えられる。有限要素法の質量行列は整合質量型を用いた。ここでの $\mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{S}(\omega)$ は要素行列を足し合わせた全体行列である。

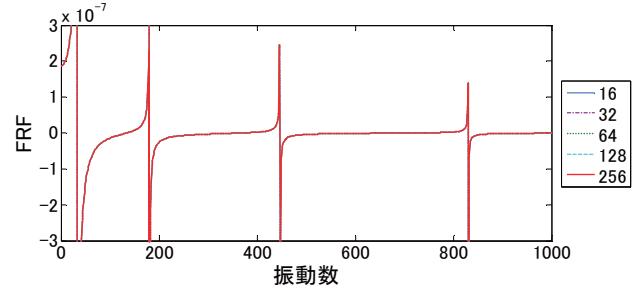
$$\mathbf{H}(\omega) = [(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})]^{-1} \quad (\text{FEM}) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = [\mathbf{S}(\omega)]^{-1} \quad (\text{SEM}) \quad (2.27)$$

起振振動数を1Hzから1000Hzまで1Hz刻みで漸増させ周波数応答関数をプロットし、要素分割数を変えてその変化を有限要素法とスペクトル要素法で比較する。分割数は16, 32, 64, 128, 256について検討する。



(a) 有限要素法



(b) スペクトル要素法

図-1 要素分割数が解析結果に及ぼす影響の比較

(2) 解析結果

結果を図-1に示す。有限要素法での結果は図-1(a)、スペクトル要素法での結果は図-1(b)である。両図とも、横軸は振動数(1~1000Hz)、縦軸は周波数応答関数(FRF)である。凡例の数字は分割数を示している。

2つの図を比較し、考察する。有限要素法では要素分割数によってFRFが異なっており、高振動数になるほど、分割数毎のFRFの差異が大きくなっていることがわかる。一方、スペクトル要素法ではどの要素分割数であってもFRFはほぼ一定となっていることがわかる。

図-1(b)のスペクトル要素法の結果において、FRFが正から負へと符号が変わる、33Hz, 180Hz, 446Hz, 830Hzはそれぞれ1次, 3次, 5次, 7次の固有振動数に対応している。起振点を部材中央としたため、偶数時の固有振動数は現れていない。図-1(a)の有限要素法の結果では、1次固有振動数の算定値はいずれの要素分割でも33Hzである。7次の固有振動数は、分割数16では924Hz、分割数256では773Hzである。分割数128と256の結果はほぼ一致していることから、約800Hzを扱う場合、有限要素法に必要な要素分割数は64個と128個の間であることがわかる。なお、スペクトル要素法と256分割の有限要素法で高振動数ほどFRF及び固有振動数に違いがあるのは、質量のモデル化が異なるためである。スペクトル要素法では振動数依存の変位関数で密度の影響を取り込んでおり(式(2.25))、振動数に応じた質量の影響を評価できるため、有限要素法における、振動数0Hzに相当する質量に $-\omega^2$ を乗じたモデル化(式(2.26))より高振動数領域を正確に表現できると考えられる。

以上より、スペクトル要素法では断面変化点や外力を与える点、応答を算出する点等を除いて要素を分割する必要がないため、有限要素法に比べて計算容量を節約で

き、高振動数領域では特に有利であることが示された。本論文の4章で提案する起振振動数毎の周波数応答関数に着目する損傷同定手法は、 ω 毎に動剛性行列を作成するスペクトル要素法と相性がよいと言える。次章からは、スペクトル要素法に基づいて解析を行うものとする。

3. 損傷が高振動数領域の振動特性に及ぼす影響

3.1 損傷のモデル化

構造物が老朽化して腐食、疲労などにより損傷すると、断面欠損が生じ断面積と断面2次モーメントが低下する。本研究では、構造物の損傷を断面積 A と断面2次モーメント I の減少として与え、動剛性行列 $S(\omega)$ を作成することにより損傷をモデル化する。

3.2 解析モデル

両端固定の梁を考え、これを等間隔に132分割する。左側の端から要素番号と節点番号をつける。部材中央の節点番号は67となる。この梁部材は鋼トラス橋の斜材を想定しており、物性値はそれぞれ、部材長さ $l = 7.38[m]$ 、単位体積重量 $\rho = 7800[kg/m^3]$ 、ヤング率 $E = 2.20 \times 10^{11}[N/m^2]$ 、断面積 $A = 5.50 \times 10^{-3}[m^2]$ 、断面2次モーメント $I = 5.11 \times 10^{-5}[m^4]$ とした。減衰定数は $h = 0$ と仮定した。起振節点は部材の中央に固定し、起振方向は部材に対して直角とする。

解析ケースを表-1に示す。損傷の与え方と損傷の位置の異なる4ケースを想定した。損傷の与え方は、断面2次モーメント I が50%低下したものと断面2次モーメント I と断面積 A がともに50%低下したものの2種類を考えた。スペクトル要素法において、質量の影響は断面積に依存するが断面2次モーメントには依存しないので、断面2次モーメントだけが50%低下するケースは損傷前で質量は不変である。断面2次モーメントと断面積がともに減少するケースは、断面欠損を想定しており、断面2次モーメントのみ減少するケースは亀裂のような損傷を想定している。損傷の位置は部材中央・部材端の2パターンを考える(図-2)。図-2の数字は要素番号を表している。部材中央とは要素番号66と67の要素の断面積と断面2次モーメントを低減させたケース(図-2(a)参照)、部材端とは要素番号131と132の要素の断面積と断面2次モーメントを低減させたケース(図-2(b)参照)である。50%という大きな損傷を仮定したのは損傷による振動特性の変化がわかりやすくなるためである。

3.3 解析内容

(1) 損傷による固有振動数の変化

起振点・計測点・それらの方向を固定し、起振振動数 ω を漸増させ、式(2.27)で与えられる周波数応答関数 $H(\omega)$ を計算すると、そのピークが現れる振動数が固有振動数となる。

表-1 解析ケース

解析 Case	損傷の大きさ	損傷箇所
1	$A \Rightarrow A$	中央
2	$I \Rightarrow I/2$	端
3	$A \Rightarrow A/2$	中央
4	$I \Rightarrow I/2$	端

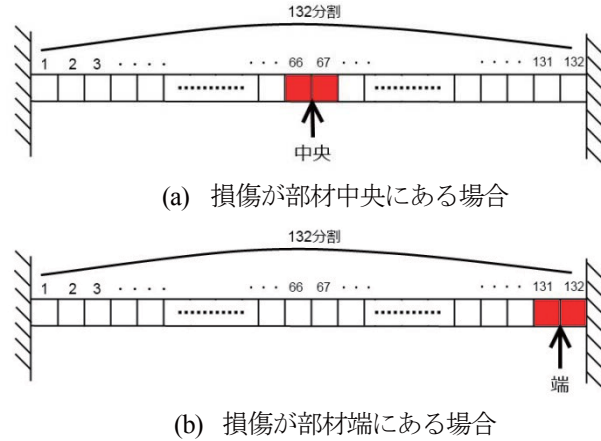


図-2 解析モデル(両端固定梁)

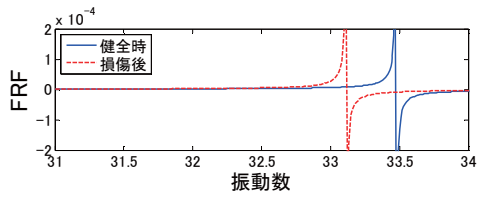
(2) 損傷による周波数応答関数の変化

起振点・起振振動数を固定し全節点における $H(\omega)$ を計算する。これを図示することにより、各振動数における部材の振動形状が分かる。つまり、損傷による周波数応答関数の変化を振動数に応じて視覚的に理解し比較することができる。

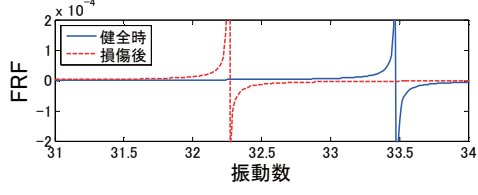
3.4 解析結果

(1) 固有振動数の変化

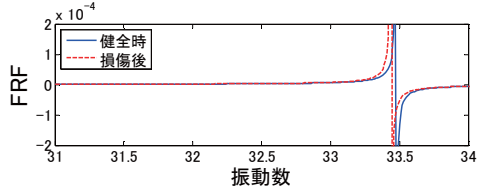
解析結果は図-3、図-4の通りである。各図の(a)~(d)はそれぞれCase1~4に対応する。横軸は振動数、縦軸は周波数応答関数(FRF)である。1次固有振動数付近(31Hz~34Hz:0.01Hz刻み)をプロットしたもの(図-3)と、9次固有振動数付近(1250Hz~1350Hz:0.1Hz刻み)をプロットしたもの(図-4)の2種類のグラフを示す。FRFの符号が正から負に変化する際の振動数が固有振動数であり、健全時と損傷時とで比較する。図-3、図-4から、損傷により固有振動数が減少するということがわかる。これは、損傷により断面積や断面2次モーメントが減少すると剛性が低下するためであると考えられる。また、高振動数で起振したほうが損傷による固有振動数の変化が大きいということがわかる。これより、高振動数のほうが損傷に対する感度が高いといえる。図-3(a)(b)と図-3(c)(d)や図-4(a)(b)と図-4(c)(d)を比較してわかることは、断面積の減少の影響によって、断面2次モーメントのみ低減した場合と比べて、固有振動数が増加するという点である。これは断面欠損による質量の減少が振動特性に影響を与えたためであると考えられる。



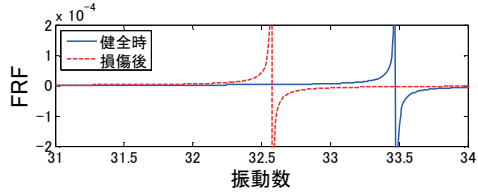
(a) Case1



(b) Case2

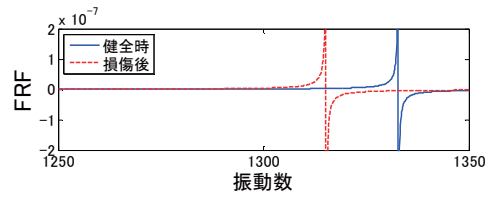


(c) Case3

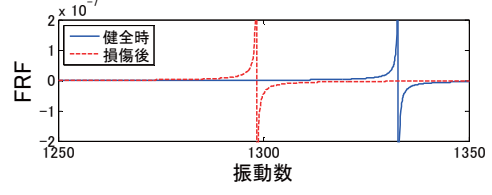


(d) Case4

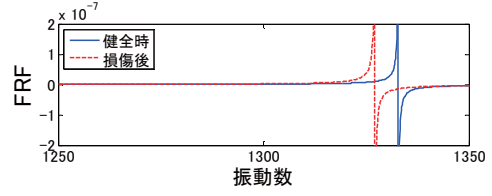
図-3 1次固有振動数



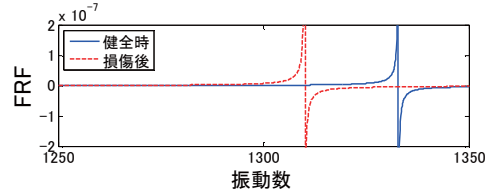
(a) Case1



(b) Case2

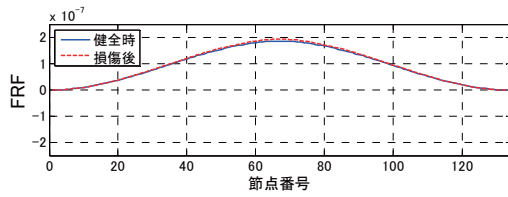


(c) Case3

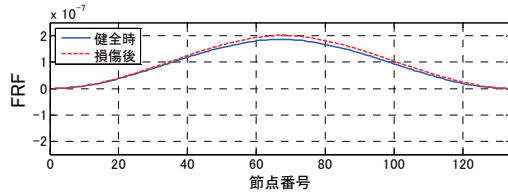


(d) Case4

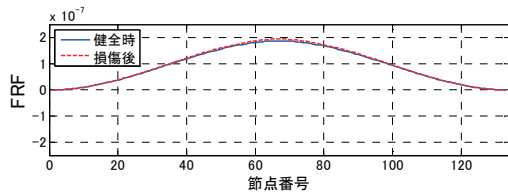
図-4 9次固有振動数



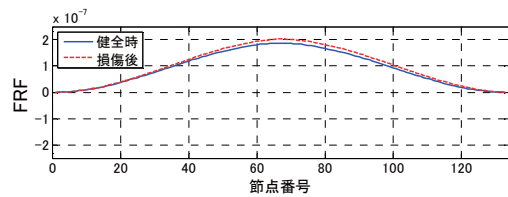
(a) Case1



(b) Case2

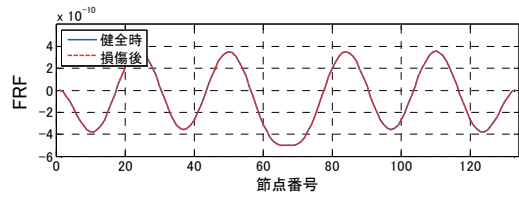


(c) Case3

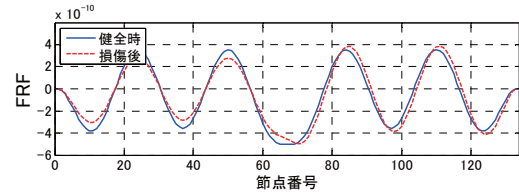


(d) Case4

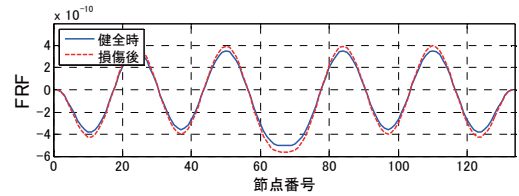
図-5 振動数 1Hz



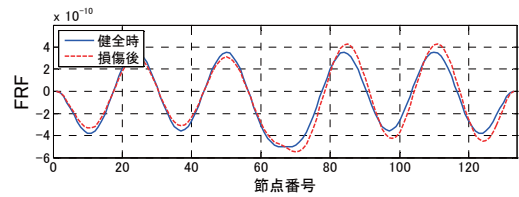
(a) Case1



(b) Case2



(c) Case3



(d) Case4

図-6 振動数 1500Hz

(2) 周波数応答関数の変化

解析結果は図-5、図-6の通りである。各図の(a)~(d)はそれぞれ Case1~4 に対応する。横軸は節点番号であり、縦軸は周波数応答関数 (FRF) である。起振振動数は低振動数の例として 1Hz と、高振動数の例として 1500Hz を選択しそれぞれを比較する。いずれも健全時において振動形状が左右対称となる振動数である。

1Hz と 1500Hz の結果を比べると、振動数の高いほうが周波数応答関数の形状の変化がより大きい傾向がみられる。また、損傷の位置が端にある (Case2, 4) ほうが周波数応答関数の形状はより大きな変化を受けるといことがわかる。1500Hz 起振時の Case1 の応答が損傷によってほとんど変化しないのは、Case1 では質量が不変であり、かつ部材中央の断面 2 次モーメントの減少は振動特性の変化に影響を与えにくいためであると考えられる。図-6(a)より、部材中央の剛性低下の影響はほとんど表れないことがわかっているため、図-6 の(a)と(c)の差は部材中央の質量変化の影響が表れたものと考えられる。部材中央に断面欠損が生じた場合、高振動数領域の FRF の変化に影響を与えるのは剛性よりもむしろ質量であるため、このような損傷を正しく捉えるには、質量の影響を考慮した損傷同定手法の構築が必要不可欠であり、これを自動で取り込めるスペクトル要素法は有限要素法に比べて勝っていると考えられる。

断面欠損により断面積が減少すると、剛性だけでなく質量も減少する。以上の検討より、固有振動数に対する剛性変化と質量変化の影響度は、損傷位置によって異なることがわかった。質量変化の影響を無視し、固有振動数の変化から損傷度を推定する試みもなされているが、断面欠損により振動数が増加するといことがわかったので、振動数の変化を指標にすると損傷を見落とす危険性があることがわかった。また、損傷位置が端に行くほど損傷による振動数の低下量が大きくなるため、同じ断面欠損でも部材中央にあるより端にあるほうが、損傷が大きく見積もられてしまうことがわかる。

4. 損傷同定手法

4.1 定式化

(1) 損傷のモデル化

構造物の損傷を断面積 A の減少及び断面 2 次モーメント I の減少として評価する。構造物全体の動剛性行列 $\mathbf{S}(\omega)$ は各要素の動剛性行列の集合体として次式のようにモデル化できる。

$$\mathbf{S}(\omega) = \sum_{e=1}^n \mathbf{S}^e(\omega) \quad (4.1)$$

ここで、 n は梁要素の総数であり、 $\mathbf{S}^e(\omega)$ は e 番目の梁要素の動剛性行列である。 e 番目の梁要素の断面積と断面 2

次モーメントが δA_e 、 δI_e 減少したとすると、 e 番目の梁要素の動剛性行列の減少分 $\delta \mathbf{S}^e(\omega)$ は、

$$\delta \mathbf{S}^e(\omega) = \delta A_e \mathbf{K}_A^e(\omega) + \delta I_e \mathbf{K}_I^e(\omega) \quad (4.2)$$

ただし、

$$\mathbf{K}_A^e(\omega) = \frac{\delta \mathbf{S}^e(\omega)}{\delta A_e}, \quad \mathbf{K}_I^e(\omega) = \frac{\delta \mathbf{S}^e(\omega)}{\delta I_e} \quad (4.3)$$

と表される。よって、全体動剛性行列の減少分は、次式で表される。

$$\delta \mathbf{S}(\omega) = \sum_{e=1}^n \delta A_e \mathbf{K}_A^e(\omega) + \sum_{e=1}^n \delta I_e \mathbf{K}_I^e(\omega) \quad (4.4)$$

(2) 損傷同定方程式の導出

損傷前の周波数領域における運動方程式は、

$$\mathbf{S}(\omega) \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (4.5)$$

である。 $\mathbf{S}(\omega)$ は動剛性であり、 $\mathbf{X}(\omega)$ と $\mathbf{F}(\omega)$ はそれぞれ変位と外力のフーリエ振幅である。変位応答 $\mathbf{X}(\omega)$ は次式の通りである。

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \quad (4.6)$$

なお、 $\mathbf{H}(\omega)$ は式(2.27)より、周波数応答関数である。次に、損傷後の運動方程式は

$$(\mathbf{S}(\omega) - \delta \mathbf{S}(\omega)) (\mathbf{X}(\omega) + \delta \mathbf{X}(\omega)) = \mathbf{F}(\omega) \quad (4.7)$$

である。 $\delta \mathbf{X}(\omega)$ は変位の増分であり、 $\delta \mathbf{S}(\omega)$ は式(4.4)より動剛性の減少分である。

式(4.7)に式(4.5)と式(4.4)を代入して、次式を得る。

$$\delta \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}_d(\omega) \delta \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \quad (4.8)$$

$\mathbf{H}_d(\omega)$ は損傷後の周波数応答関数であり、

$$\mathbf{H}_d(\omega) = [\mathbf{S}(\omega) - \delta \mathbf{S}(\omega)]^{-1} \quad (4.9)$$

と表される。式(4.4)より、変位の増分 $\delta \mathbf{X}(\omega)$ は、

$$\delta \mathbf{X}(\omega) = \sum_{e=1}^n \mathbf{H}_d(\omega) \mathbf{K}_A^e(\omega) \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \delta A_e + \sum_{e=1}^n \mathbf{H}_d(\omega) \mathbf{K}_I^e(\omega) \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \delta I_e \quad (4.10)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_A^e(\omega) &= \mathbf{H}_d(\omega) \mathbf{K}_A^e(\omega) \mathbf{H}(\omega) \\ \mathbf{U}_I^e(\omega) &= \mathbf{H}_d(\omega) \mathbf{K}_I^e(\omega) \mathbf{H}(\omega) \end{aligned} \quad (4.11)$$

と置く。式(4.6)に示した損傷前の変位 $\mathbf{X}(\omega)$ に、式(4.10)で求めた損傷による変位増分 $\delta \mathbf{X}(\omega)$ を加えることにより、損傷後の応答 $\mathbf{X}'(\omega)$ が求まる。

$$\mathbf{X}'(\omega) = \mathbf{X}(\omega) + \delta \mathbf{X}(\omega)$$

$$= \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F}(\omega) + \sum_{e=1}^n \mathbf{U}_A^e(\omega) \mathbf{F}(\omega) \delta A_e + \sum_{e=1}^n \mathbf{U}_I^e(\omega) \mathbf{F}(\omega) \delta I_e \quad (4.12)$$

周波数応答関数を、起振振動数における加速度応答のフーリエ振幅を入力である調和外力の振幅で除したものであると考える。計測点をノード i 、起振点をノード j 、起振振動数を ω としたとき、周波数応答関数 $a(i, j, \omega)$ は次式のように表される。

$$a(i, j, \omega) = \frac{-\omega^2 \mathbf{X}'(\omega)}{F(\omega)} \quad (4.13)$$

$$= -\omega^2 \left(\mathbf{H}_{ij}(\omega) + \sum_{e=1}^n \mathbf{U}_{Aij}^e(\omega) \delta A_e + \sum_{e=1}^n \mathbf{U}_{Iij}^e(\omega) \delta I_e \right)$$

上式において、 $a(i, j, \omega)$ は損傷後の周波数応答関数であり、計測により得られる値である。 $\mathbf{H}_{ij}(\omega)$ は損傷前の周波数応答関数であり、既知の値である。一方、 $\mathbf{U}_{Aij}^e(\omega)$ と $\mathbf{U}_{Iij}^e(\omega)$ は損傷前の構造データと起振振動数及び未知のパラメータ δA_e 、 δI_e から決まる値である。

式(4.13)を整理し、左辺に未知の項、右辺に既知の項を移項すると、次の式が得られる。

$$-\omega^2 \sum_{e=1}^n \mathbf{U}_{Aij}^e(\omega) \delta A_e - \omega^2 \sum_{e=1}^n \mathbf{U}_{Iij}^e(\omega) \delta I_e \quad (4.14)$$

$$= a(i, j, \omega) + \omega^2 \mathbf{H}_{ij}(\omega)$$

この式は、計測点 i 、起振点 j 、起振振動数の組み合わせごとに成り立つ方程式である。 i, j, ω の組合せを様々に変え、 m 種類の計測を行うと、次式に示すような連立方程式が成立する。

$$[\mathbf{X}(\delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{I})] \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{y}\} \quad (4.15)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{l,e}(\delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{I}) &= -\omega^2 \mathbf{U}_{Aij}^e(\omega) \\ \mathbf{X}_{l,n+e}(\delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{I}) &= -\omega^2 \mathbf{U}_{Iij}^e(\omega) \\ \{\mathbf{a}\} &= \{\delta A_1, \dots, \delta A_n, \delta I_1, \dots, \delta I_n\}^T \\ \{\mathbf{y}\} &= a(i, j, \omega) + \omega^2 \mathbf{H}_{ij}(\omega) \end{aligned} \quad (4.16)$$

である。 $l(l = 1, \dots, m)$ は異なる i, j, ω の組合せに対応する計測データ番号である。式(4.15)は未知数 $2n$ 個に対する m 個の連立方程式となり、これを損傷同定方程式と呼ぶ。この式を解くことにより、損傷個所と損傷の程度を表す $\{\mathbf{a}\}$ を求めることができる。式(4.15)はマトリクス $[\mathbf{X}(\delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{I})]$ が未知のパラメータ δA_e 、 δI_e を含むため、繰り返し計算が必要である。

4.2 解析モデル

第3章と同じ物性値の両端固定梁について考え、部材を10等分する(図-7)。部材中央は節点番号6であり、その両側の要素(要素番号5, 6)に断面積 A の低下率20%、断面2次モーメント I の低下率20%の損傷を仮定する。仮定した損傷の真値は図-8のようになる。

4.3 解析ケース

部材中央の節点(節点番号6)で起振し、両端以外の節点で計測する。起振振動数として、1Hzと2000Hzを選択し解析結果の比較を行う。2000Hzは固有振動数に近く、損傷によって周波数応答関数が増減しやすい振動数である。また、起振・計測方向を軸方向・軸直角方向で比較する。また、3%の計測ノイズを考慮する。以上の条件のもとで損傷同定解析を行う。

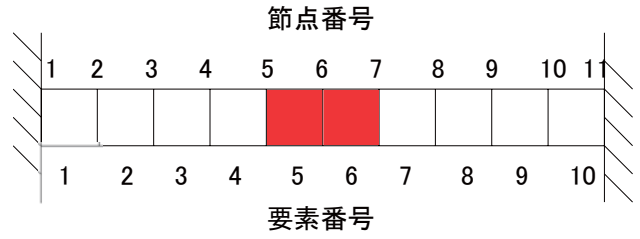
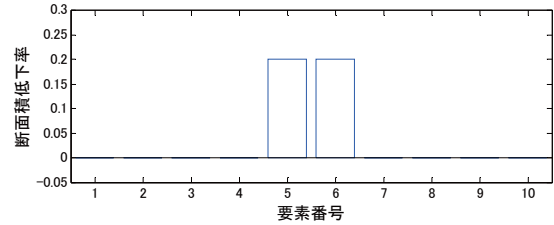
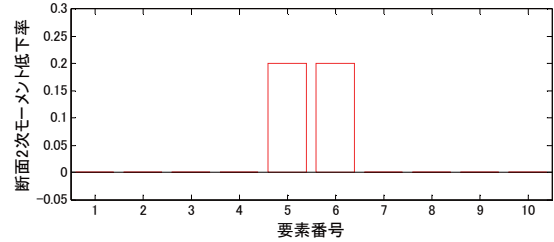


図-7 解析モデル



(a) 断面面積低下率



(b) 断面2次モーメント低下率

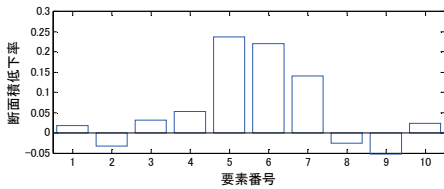
図-8 仮定した損傷真値

4.4 解析結果

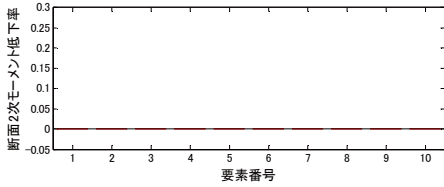
振動数1Hzの解析結果を図-9, 10に示し、振動数2000Hzの結果を図-11, 12に示す。図-9, 11は軸方向に起振した場合であり、図-10, 12は軸直角方向に起振した場合である。各図の(a)は断面面積低下率の同定結果、(b)は断面2次モーメントの同定結果を表す。

まず、起振振動数1Hzと2000Hzを比較すると、要素番号5, 6の損傷を1Hzでは検出できず、2000Hzでは検出できていることが分かる。1Hzでは3%の計測ノイズによる影響を無視できず、誤検出してしまうという結果になった。一方、2000Hzではノイズの影響は小さく、仮定した損傷を同定することができた。計測ノイズがない場合も別途解析を行っており、1Hz, 2000Hzとも同定できた。このことから、高振動数で起振するほうがノイズに強く、より有効であるといえる。

次に、起振・計測方向の違いについて検討を行うと、軸方向に起振・計測すると断面面積の同定精度が高く、軸直角方向に起振・計測すると断面2次モーメントの同定精度が高いことが分かった。軸方向に起振すると軸方向の振動が卓越し、断面面積の低下が検出されやすくなり、軸直角方向に起振すると曲げ方向の振動が卓越し、断面2次モーメントの低下が検出されやすくなったものと考えられる。

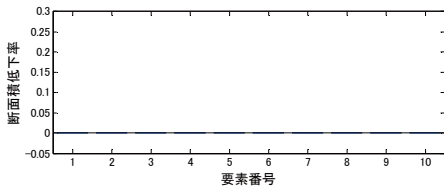


(a) 断面積低下率

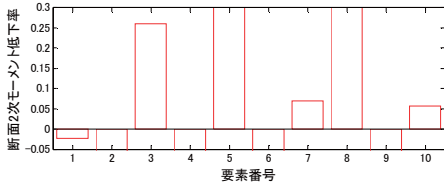


(b) 断面2次モーメント低下率

図-9 1Hzで軸方向に起振した場合

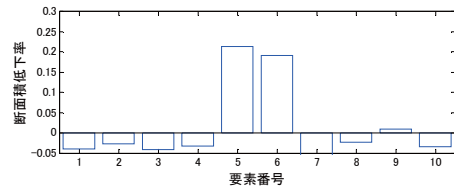


(a) 断面積低下率

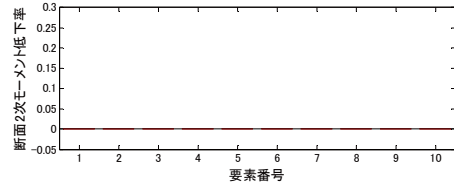


(b) 断面2次モーメント低下率

図-10 1Hzで軸直角方向に起振した場合

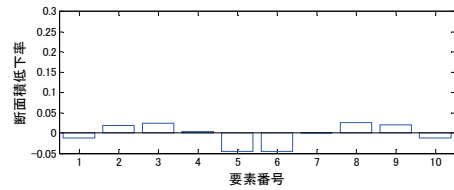


(a) 断面積低下率

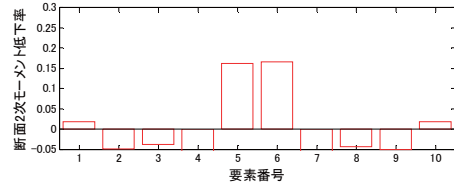


(b) 断面2次モーメント低下率

図-11 2000Hzで軸方向に起振した場合



(a) 断面積低下率



(b) 断面2次モーメント低下率

図-12 2000Hzで軸直角方向に起振した場合

5. まとめ

本研究では、高振動数領域の解析に適したスペクトル要素法に基づいて kHz レベルの高振動数で起振し、損傷による周波数応答関数の変化に着目して損傷を検出する手法の提案を行った。両端固定梁を対象とした数値シミュレーションによって提案手法の有用性を検証した。

高振動数領域における要素分割数による周波数応答関数の違いを検証した。有限要素法では要素分割数が少ないと解析結果に誤差が生じたが、スペクトル要素法では、要素分割数によらず一定となり、高振動数起振におけるスペクトル要素法の有効性が示された。

損傷による振動特性の変化に関して、低振動数に比べ、高振動数のほうが損傷に対する感度が高いことが分かった。断面欠損の有無による振動特性の変化に対する影響を調べたところ、質量の減少により固有振動数が増加することが分かり、固有振動数の変化により損傷を検出すると、誤検出の危険性があることが分かった。計測ノイズを考慮して損傷同定解析を行ったところ、高振動数のほうが低振動数に比べ、損傷同定の精度がよいことが分かった。また、軸方向に起振・計測すると断面積が同定されやすく、軸直角方向に起振・計測すると断面2次モーメントが同定されやすいことが分かった。

今後は、鋼トラス橋を対象とした数値シミュレーションを行い、局所的に小さな損傷を検出できるか検証する予定である。

参考文献

- 1) 吉岡勉・山口宏樹：鋼トラス橋を主とした振動特性変化に基づく構造ヘルスマニタリング，埼玉大学大学院理工学研究科博士論文，2010
- 2) 古川愛子・大塚久哲・梅林福太郎：構造物の損傷に伴う振動特性の変化に関する実験的考察，土木学会地震工学論文集，第28巻，No.19，2005
- 3) 中村充・安井謙：微動測定に基づく地震被災鉄骨建物の層損傷評価，日本建築学会構造系論文集，第517号，pp.61-68，1999
- 4) 吉岡勉・原田政彦・山口宏樹・伊藤信：斜材の実損傷による鋼トラス橋の振動特性変化に関する一検討，構造工学論文集 Vol.54A，pp.199-208，2007
- 5) 古川愛子・大塚久哲：高振動数領域のフーリエ振幅を用いた局所損傷同定，応用力学論文集 Vol.11，pp.27-37，2008
- 6) U. Lee：Spectral Element Method in Structural Dynamics, John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2009