

## 第2編 解析法

# 解析法

宇都宮大学  
中島章典

## 要 旨

地震による構造物の弾性範囲に限らず弾塑性範囲までの動的応答を数値解析法により予測し、種々の構造物の耐震設計法に用いることが一般的に行われてきている。しかし、得られた構造物の地震応答が実構造物の挙動をどの程度再現しているのかは必ずしもはっきりしていない。

ここでは、おもに鋼構造物の耐震解析法に関する動的解析，静的解析，固有値解析および非線形解析の概説，動的解析に用いられる数値積分法，質量マトリックスおよび減衰の設定法に関する基本的事項とその留意点などを説明する。

1. 線形動的解析とモード解析法
2. 応答スペクトル法
3. 震度法と Pushover 解析
4. 耐震解析における構造物のモデル化と非線形性の考慮
  - 4.1 幾何学的非線形性
  - 4.2 材料非線形性
  - 4.3 1 自由度系モデル
  - 4.4 動的解析による耐震性の照査
  - 4.5 1 自由度系モデルの非線形挙動の例
5. ニューマークの  $\beta$  法とその誤差
6. 集中質量マトリックスと整合質量マトリックス
7. 固有値解析
  - 7.1 非減衰系の固有値解析
  - 7.2 減衰系の固有値解析
8. 減衰マトリックスの設定
  - 8.1 比例減衰の設定法
  - 8.2 非比例減衰の設定法
  - 8.3 簡易モデルを用いた減衰設定法の例題

## 1. 線形動的解析とモード解析法

地震動を受ける多自由度系の線形動的解析を行う場合の運動方程式は、一般に、以下のように表される。

$$M\ddot{D} + C\dot{D} + KD = -M\ddot{Z} \quad (1.1)$$

ここに、 $K$ は剛性マトリックス、 $M$ は質量マトリックスであり、それぞれのマトリックスは対象としている構造系が連続体あるいはばねマス系に関わらず、有限要素法の手順あるいはラグランジュの運動方程式などを適用して求められる。 $C$ は減衰マトリックスである。なお、以下に示すようにモード解析法（モーダルアナリシス法）を適用する場合には、減衰マトリックス $C$ は比例減衰マトリックスでなければならない。また、 $\ddot{D}$ 、 $\dot{D}$ 、 $D$ は、それぞれ対象としている構造物を離散化した場合に設けた節点の加速度、速度、変位を表すベクトルである。さらに、 $\ddot{Z}$ は加速度ベクトルであり、一般に地動加速度 $\ddot{z}$ および加速度分布ベクトル $L$ によって、 $\ddot{Z} = \ddot{z}L$ と表される。この加速度分布ベクトル $L$ は、地震動の作用方向にのみ単位の値をもつベクトルである。これらマトリックスおよびベクトルのサイズは、考慮するモデルの自由度に対応している。

ここで、節点の変位ベクトル $D$ を基準座標 $q$ およびモードマトリックス $\phi$ を用いてモード分解すると、

$$D = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 + \dots = \sum_j \phi_j q_j = \phi q \quad (1.2)$$

と表すことができる。なお、モードマトリックス $\phi$ の列ベクトルは各次の固有振動モードを表す。これを式(1.1)に代入して整理すると、

$$M\phi\ddot{q} + C\phi\dot{q} + K\phi q = -M\ddot{Z} \quad (1.3)$$

と表される。そして上式の両辺に $\phi^T$ を乗じると以下ようになる。

$$\phi^T M \phi \ddot{q} + \phi^T C \phi \dot{q} + \phi^T K \phi q = -\ddot{z} \phi^T M L \quad (1.4)$$

ここで、モードマトリックス $\phi$ の直交性により、質量、減衰、剛性の項がそれぞれ、

$$\phi^T M \phi = \overline{M} = \begin{bmatrix} \overline{M}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{M}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{M}_n \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\phi^T C \phi = \overline{C} = \begin{bmatrix} \overline{C}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{C}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{C}_n \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$\phi^T K \phi = \overline{K} = \begin{bmatrix} \overline{K}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{K}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{K}_n \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

と表される。ここに、 $\overline{M}$ 、 $\overline{C}$ 、 $\overline{K}$ は各振動モードの換算質量 $\overline{M}_j$ 、換算減衰係数 $\overline{C}_j$ 、換算ばね定数 $\overline{K}_j$ から構成され、これらは対角マトリックスとなる。また、右辺は換算外力と呼ぶ。以上の関係から、式(1.4)は $n$ 個の独立な1自由度系の運動方程式となるので以下のように書ける。

$$\overline{M}_j \ddot{q}_j + \overline{C}_j \dot{q}_j + \overline{K}_j q_j = \overline{F}_j \quad (1.8)$$

ここに、 $\bar{F}_j = -\ddot{z}\phi^T M L_j$  である。また、

$$\omega_j^2 = \bar{K}_j / \bar{M}_j \quad h_j = \bar{C}_j / (2\omega_j \bar{M}_j) \quad f_j = \bar{F}_j / \bar{M}_j \quad (1.9)$$

の関係を用いれば、式(1.8)は次式のように表される。

$$\ddot{q}_j + 2h_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = f_j \quad (1.10)$$

ここに、 $\omega_j$  および  $h_j$  は  $j$  次振動モードの固有円振動数および減衰定数である。ここで、 $f_j = -\beta_j \ddot{z}$  と表せば、

$$\beta_j = \phi_j^T M L_j / \bar{M}_j \quad (1.11)$$

となり、これを刺激係数と呼ぶ。したがって、式(1.10)の解は、以下のようにデュアメル積分を利用して、

$$q_j = \exp\{-h_j\omega_j t\} \{ \bar{A}_j \cos \omega_j' t + \bar{B}_j \sin \omega_j' t \} - \frac{\beta_j}{\omega_j'} \int_0^t \ddot{z}(\tau) \exp\{-h_j\omega_j(t-\tau)\} \sin \omega_j'(t-\tau) d\tau \quad (1.12)$$

と表せる。上式より、モード分解した各モードの解  $q_j$ 、 $\dot{q}_j$ 、 $\ddot{q}_j$  が求められ、式(1.2)を適用することによって各節点の時刻歴応答の正解が得られる。ここに、 $\omega_j' = \omega_j \sqrt{1-h_j^2}$  である。

式(1.12)から、刺激係数  $\beta_j$  が大きいモードほど、基準座標  $q_j$ 、つまり、そのモードの応答値が大きくなるのがわかる。一般に、刺激係数  $\beta_j$  は正あるいは負の符号をもつ。これに対して、

$$m_j = (\phi_j^T M L_j)^2 / \bar{M}_j \quad (1.13)$$

で表される値を有効質量と呼ぶ。有効質量は常に正の値をもち、全振動モードの有効質量の合計は構造系の全質量に一致する。モード解析法を用いる場合には、一般に、有効質量が全質量の90%程度になるまでの振動モードを採用すれば、良い結果が得られると言われている。

なお、加速度分布ベクトルは、地震動の作用方向のみに単位の値を配置しておく必要があるの、すべての節点と同じ座標方向を表すのであれば、

$$L^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1] \quad (1.14)$$

となり、例えば、2次元問題において、 $x$ 、 $y$  方向の地震動の作用を考えるのであれば、

$$L_x^T = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0] \quad L_y^T = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 1] \quad (1.15)$$

となるような加速度分布ベクトルを考えればよい。

## 2. 応答スペクトル法

ところで、上記のようにモード解析法を用いれば、多自由度線形系の時刻歴応答の正解が求められる。しかし、構造物の耐震設計に際しては、必ずしも時刻歴応答を求める必要はなく、その最大応答値のみが必要とされる場合が多い。

そこで、ある地震動作用に対する各モードの最大応答値をあらかじめ求めておき、これを固有周期と減衰定数に対して示したものが、地震応答スペクトルである。地震応答スペクトルには、変

位応答スペクトル  $S_D$ ，速度応答スペクトル  $S_V$ ，加速度応答スペクトル  $S_A$  があり，それぞれの間には近似的に以下の関係がある．

$$\begin{aligned} S_{Dj} &= q_{j\max} \\ S_{Vj} &= \dot{q}_{j\max} \approx \omega S_{Dj} \\ S_{Aj} &= (\ddot{q}_j + \ddot{z})_{\max} \approx \omega^2 S_{Dj} \end{aligned} \quad (2.1)$$

この関係と，式 (1.12) および式 (1.2) を用いれば，例えば，ある節点の最大応答変位  $D_m$  は，各モードの最大応答値の合計として，

$$D_m = \sum_j \phi_j \beta_j S_{Dj} \quad (2.2)$$

のように求まる．しかし，すべてのモードの応答が同時に最大になるとは考えられないために，式 (2.2) で与えられる最大応答値は，一般に過大な値を与える．そこで，統計的な考えから，以下のような各基準振動の 2 乗平均値が用いられる場合が多い．

$$D_m = \sqrt{\sum_j (\phi_j \beta_j S_{Dj})^2} \quad (2.3)$$

地震応答スペクトルとして，変位応答スペクトルではなく，速度応答スペクトルあるいは加速度応答スペクトルが与えられている場合には，式 (2.1) の関係を用いればよく，また，変位と断面力の関係を与えれば断面力応答も求めることができる．

### 3. 震度法と Pushover 解析

式 (1.1) を参考にして地震動を受ける 1 自由度系の運動方程式を表せば，以下ようになる．

$$M\ddot{D} + C\dot{D} + KD = -M\ddot{z} \quad (3.1)$$

ここに， $\ddot{z}$  は地動加速度である．この式を変形して整理すれば，

$$\ddot{D} + 2h\omega\dot{D} + \omega^2 D = -\ddot{z} \quad (3.2)$$

と表すことができる．ここに，

$$\omega^2 = K/M \quad h = C/(2\omega M) \quad (3.3)$$

である．したがって，固有円振動数  $\omega$ ，減衰定数  $h$  が同じであれば，ある地震動作用に対して，固有周期  $T (= 2\pi/\omega)$ ，減衰定数  $h$  に対して，変位応答  $D$ ，速度応答  $\dot{D}$ ，絶対加速度応答 ( $\ddot{D} + \ddot{z}$ ) は一意に求められ，応答スペクトル法の場合と同様，一般に各応答の最大値が興味の対象となる．

ここで，式 (3.1) を変形すると，以下のように表せる．

$$KD = -M(\ddot{D} + \ddot{z}) - C\dot{D} \quad (3.4)$$

上式の左辺は復元力を表し，右辺の第 1 項の絶対加速度が最大の時には，加速度に対して位相差が  $90^\circ$  の速度  $\dot{D} \approx 0$  と考えられ，右辺第 2 項の減衰力はゼロになると見なすことができる．したがって，絶対最大加速度が生じた場合に慣性力は最大になり，これを静的荷重と見なしてそれに対する変位を求めて設計を行うのが震度法の考え方である．

1 自由度系ではなく，多自由度系の場合にも，系を適切な設計振動単位に分け，各振動単位の 1 次振動モードの有効質量が 90% 程度になるような系では，以下のような手順を踏むことによって最大変位などを求めることができる．



以上の考え方は、基本振動モードが卓越する多自由度構造物にも適用できる。その手順を示せば以下のようなになる。

1. 重量分布に比例する水平力を構造物に载荷して、全水平力あるいは代表点の水平力と代表点の水平変位の関係を求める。
2. この水平力－水平変位関係上に、図 3.1 の点 C に相当する構造物の終局状態に至る点を定める。
3. 弾塑性系の水平力－水平変位関係における終局点 C までのひずみエネルギーに等価な弾性系の最大水平力  $R_L$  を算出し、この比  $R_N/R_L$  を求める。
4. 弾性状態の固有周期に基づいて、レベル 2 地震動作用時の設計水平震度を算定し、これに構造物の全重量あるいは代表点の重量を乗じて設計水平力を算定する。
5. 上記の  $R_N$  と設計水平力を比較し、前者が大きいことを確認する。

このような手順により多自由度構造物の耐震設計を行うのが保有水平耐力法である。この場合、弾塑性系の水平力－水平変位関係を非線形静的解析により求める必要があるが、これを Pushover 解析と呼んでいる。対象構造物の Pushover 解析を実施する際には、構造物を構成する材料の非線形材料特性や幾何学的非線形性を適切に考慮する必要がある。

上記のうち、弾塑性系の最大応答変位を算定する方法として、エネルギー一定則ではなく等価な 1 自由度系の動的解析を実施して最大応答変位や時刻歴応答を求める方法も提案されている(宇佐美勉ら 1999)。

#### 4. 耐震解析における構造物のモデル化と非線形性の考慮

構造物の耐震解析を行う際には、必要な情報が求められるように構造物をモデル化する必要がある。この場合、対象とする構造物あるいは求める必要がある応答に対応して、自由度の少ない質点系モデル、無限の自由度を有する連続体モデル、1次元のはり柱要素、2次元の面内板要素、3次元のシェル要素あるいはソリッドモデルなどが用いられる。1次元のはり柱要素にしても、弾塑性の考慮法によってファイバーモデルやM- $\Phi$ モデルなどが使い分けられる。

さらに、鋼製橋脚、鋼アーチ橋のアーチ部材などの鋼構造物は、同じ構造形式のコンクリート構造物に比較してスレンダーであるために、つり合い式の誘導に際して部材の変形の影響あるいは軸力がつり合いに及ぼす影響である、幾何学的非線形性の影響あるいはP- $\Delta$ 効果を考慮する必要がある。また、部材を構成する板、シェルの局部座屈現象を扱う場合にも、局部的に大きな変位が生じるために幾何学的非線形解析を用いる必要がある。

一方、構造物が大地震を受ける場合には、部材に弾性範囲を越える応力、ひずみが生じることは避けられず、材料の応力－ひずみ関係は非線形関係となる。このような材料の応力－ひずみ関係に生じる非線形性を材料非線形性と呼ぶ。

##### 4.1 幾何学的非線形性

幾何学的非線形性を考慮した解析を有限変位解析とも呼び、はり－柱部材を対象とした場合には、解析精度の観点から表 4.1 のような分類が示されている(土木学会構造工学委員会 1996)が、詳細は省略する。

##### 4.2 材料非線形性

鋼材の単調载荷時の応力－ひずみ関係に現れる材料非線形性の特徴を1次元的に説明すると、一般には、応力とひずみの関係がフックの法則に従う弾性、ひずみが増加しても応力は一定となる

表 4.1 弾性有限変位解析法の分類

弾性有限変位解析の種類 ：解析レベル	解析内容 (棒部材の場合) 注 1) ○：考慮, ×：無視				解析範囲 (数値解法) 注 2)
	ひずみによる部材軸の伸縮の有限性を考慮	部材軸の回転の有限性を考慮	曲げ変位による軸力の変化を考慮	変形後でつり合いを考慮	
有限ひずみ・有限回転の弾性有限変位解析 ：レベル	○	○	○	○	後座屈領域も含む (変位制御：変位増分法 弧長増分法など)
微小ひずみ・有限回転の弾性有限変位解析 ：レベル	×	○	○	○	
微小ひずみ・小回転の弾性有限変位解析 ：レベル	×	×	○	○	座屈点近傍まで  (荷重制御 荷重増分法など)
線形化弾性有限変位解析 ：レベル	×	×	×	○	

注 1) せん断変形, そりなどの考慮の有無によって区分される。

注 2) 荷重増分法, 変位増分法, 弧長増分法などの各増分段階における非線形解は, 接線剛性行列を用い, 反復法 (Newton-Raphson 法) による収束値として求められるのが一般的である。

降伏, さらにひずみが大きくなると再びひずみの増加に伴って応力が増加するひずみ硬化現象などがある。しかし, 地震時の構造部材のように鋼材に繰返しの応力, ひずみが生じる場合には, 降伏領域からの除荷の影響や降伏棚の減少, 弾性範囲の変化, 硬化係数の変化などを考慮しなければならない。実際には, 多軸応力状態において鋼材は降伏したり, 弾塑性挙動を示すことになるため, 材料非線形性を考慮するためには, その取り扱いにはさらに複雑になる。このような多軸の複雑な応力-ひずみ関係を表す種々の構成モデルとしては, 移動硬化則, 等方硬化則の他, 多曲面モデル (皆川勝 1988), 修正 2 曲面モデル (Shen ら 1993), 3 曲面モデル (後藤芳顯ら 1998), BMC モデル (西村宣男ら 1995) などが提案されている。

一方, 鋼材の応力-ひずみ関係に基づく材料非線形性ではなく, 断面を分割した小断面のファイバーを部材断面で積分して材料非線形性を考慮したいいわゆる  $M-\phi$  関係に基づく材料非線形性 (太田俊昭 1980) を用いた解析も行われている。逆に, 得られた  $M-\phi$  関係を調整して, 幾何学的非線形性や局部座屈の影響を考慮した  $M-\phi$  関係を作成することも可能である。また, 軸力の影響を考慮した  $N-M-\phi$  関係も作成されているが, これに軸力変動の影響を厳密に考慮することは容易ではない。

### 4.3 1 自由度系モデル

以上のように, 幾何学的非線形性や材料非線形性を考慮するためには, 鋼材の応力-ひずみ関係に基づくファイバー要素を用いた解析が望ましい。その反面, ファイバー要素を用いたはり-柱部材の解析では, 鋼部材の局部座屈の影響を考慮することは難しい。

そこで, 例えば, 実験結果に基づいて構築した単柱式橋脚の柱頂部における水平力-水平変位関係を 1 自由度系モデルに導入して解析することにより, 鋼材の材料非線形性や幾何学的非線形性に加えて, 局部座屈の影響までを考慮した非線形解析を行うことができる。このような復元力モデルとして, 2 パラメータモデル (鈴木森晶ら 1996) などが提案されており, 単柱式鋼製橋脚の構造パラメータが限定された範囲では, 非常に合理的な非線形解析を行うことができる。しかし, 橋脚において構造パラメータが限定された範囲以外の複雑な構造形式の解析には利用できない難点がある。

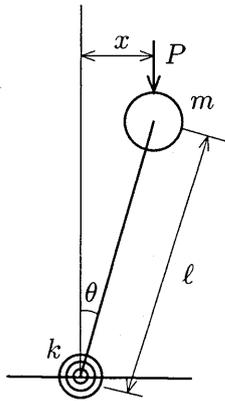


図 4.1 非線形性を有する 1 自由度系

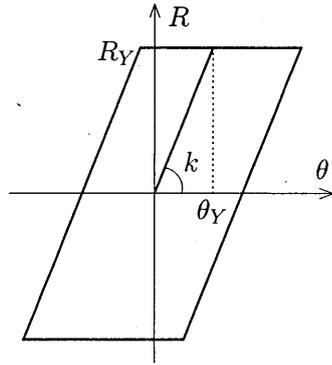


図 4.2 回転ばねのモーメント-回転角関係

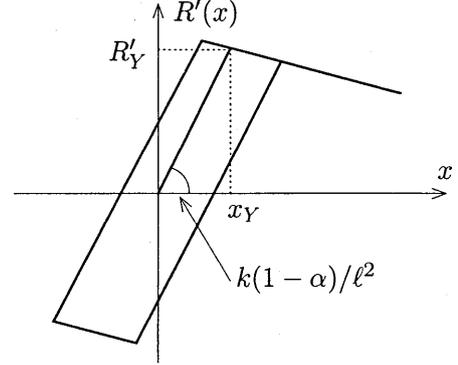


図 4.3 系としての水平力-水平変位関係

#### 4.4 動的解析による耐震性の照査

非線形動的解析を用いて、種々の形式の鋼構造物の耐震設計を行う場合には、得られた応答解析結果から構造物の耐震性能あるいは終局状態を判定しなければならない。鋼部材の板要素までを十分に要素分割して精緻にモデル化した非線形動的解析を実施する場合には、局部座屈による劣化現象も再現できるので、構造物の最大耐荷力や最大耐荷力を越えて強度が低下した終局状態を求めることができる。また、適切な水平力-水平変位関係を考慮した 1 自由度系モデルにおいても、適用可能な構造物の最大耐荷力や終局状態を算定することが可能である。しかし、ファイバー要素を用いたはり-柱部材の場合には、構造物の最大耐荷力は求められたとしても、劣化現象を再現することは容易ではない。したがって、これらのモデルを用いて得られた動的解析結果から、構造物の終局状態を求めるためには、例えば、変位あるいはひずみなどの終局状態を別途定義しておき、その値を動的解析結果と比較することが必要である。

#### 4.5 1 自由度系モデルの非線形挙動の例

ここでは、 $P-\Delta$  効果および材料非線形性を説明するために、図 4.1 に示すような鉛直方向の静的荷重が作用している質量  $m$  の質点、長さ  $l$  の剛棒、ばね定数  $k$  の回転ばねからなる 1 自由度系に地震動が作用する場合を考える。回転ばねのモーメント  $R$  と回転角  $\theta$  の関係が、図 4.2 のような完全弾塑性型であるとして、支点回りのモーメントのつり合いを考えると、その運動方程式は、

$$lm\ddot{x} + R(\theta) - Px = -lm\ddot{z} \quad (4.1)$$

と求められる。ただし、ここでは回転ばねの回転角  $\theta$  は十分小さく、近似的に  $\theta = x/l$  が成り立つものとしている。また、減衰はないものとしている。上式を水平力  $R'(x)$  と水平変位  $x$  の関係に書き直すと、

$$m\ddot{x} + \{R(\theta) - Px\}/l = -m\ddot{z} \quad (4.2)$$

と表される。上式の左辺第 2 項は水平方向復元力  $R'(x)$  を表し、回転ばねの弾塑性状態に応じて、

$$\begin{aligned} R'(x) &= k(1-\alpha)x/l^2 & x < x_Y \\ R'(x) &= R_Y/l - \alpha k/l^2 & x_Y \leq x \end{aligned} \quad (4.3)$$

と表される。ここに、 $P = \alpha k/l$  と置いている。以上の関係から、静的荷重の作用によって、弾性状態の水平力と水平変位関係を表すばね定数が静的荷重の影響により  $\alpha$  の分だけ減少し、塑性状態では、そのばね定数が負の値の劣化勾配をもつことがわかる。

以上の例から、回転ばねのモーメントと回転角の関係が材料非線形を表しており、静的荷重の存在によるばね定数の減少が  $P - \Delta$  効果（幾何学的非線形性）の影響を表している。

## 5. ニューマークの $\beta$ 法とその誤差

構造物の時刻歴応答解析を実施する場合には、ニューマークの  $\beta$  法などの数値積分法を用いるのが一般的である。しかし、そのような数値積分法は、時刻歴応答を求める際の時間刻みの大きさが十分小さくないときには、離散化誤差を含むことは良く知られている（日本建築学会 2000）、（戸川隼人 1975）。ここでは、ニューマークの  $\beta$  法を対象として、まず、数値積分法による時刻歴応答の求め方の概略および離散化誤差に関する基本事項を示す。

まず、ニューマークの  $\beta$  法の基礎式は下記のようにあり、線形動的解析では、これに式 (1.1) のような運動方程式を組み合わせることで逐次連立方程式を解くことによって、次ステップの変位、速度、加速度を求めることができる。

$$\dot{D}_{n+1} = \dot{D}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{D}_{n+1} + \ddot{D}_n) \quad (5.1)$$

$$D_{n+1} = D_n + \Delta t \dot{D}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{D}_n + \beta \Delta t^2 (\ddot{D}_{n+1} - \ddot{D}_n) \quad (5.2)$$

ここに、 $\Delta t$  は時間刻みである。上式のうち、式 (5.2) の係数  $\beta = 1/6$  とした場合が線形加速度法と呼ばれており、式 (5.2) に  $\beta = 1/6$  を代入して変形すると以下のように表される。

$$D_{n+1} = D_n + \Delta t \dot{D}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{D}_n + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\ddot{D}_{n+1} - \ddot{D}_n}{\Delta t} \quad (5.3)$$

この式はテーラー展開の 3 次項まで取ったものにほぼ相当し、時刻  $t_n$  から  $t_{n+1}$  まで、加速度の直線的な変化を仮定したことになる。これに対して、 $\beta = 1/4$  では、時刻  $t_n$  から  $t_{n+1}$  間で、加速度の平均値を仮定したことになる。いずれにしても、打ち切り誤差などの誤差が含まれ、固有周期のずれや応答の数値的発散などが生じる可能性がある。

そこで、ニューマークの  $\beta$  法における数値的発散の条件を求めるために、非減衰 1 自由度系の運動方程式

$$\ddot{D} + \omega^2 D = 0 \quad (5.4)$$

を考え、これを式 (5.1)、(5.2) に代入して整理すると以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega^2 \Delta t / 2 \\ 0 & 1 + \omega^2 \beta (\Delta t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n+1} \\ \dot{D}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega^2 \Delta t / 2 \\ \Delta t & 1 - \omega^2 (1/2 - \beta) (\Delta t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n \\ \dot{D}_n \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

ここで、 $D_{n+1} = \lambda D_n$  とし、上式に代入して整理すると、

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & \omega^2 \Delta t / 2 \\ 0 & 1 + \omega^2 \beta (\Delta t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n \\ \dot{D}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\omega^2 \Delta t / 2 \\ \Delta t & 1 - \omega^2 (1/2 - \beta) (\Delta t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n \\ \dot{D}_n \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

という状態方程式が得られる。したがって、解が発散しないためには上式の固有値  $\lambda$  の絶対値  $|\lambda| \leq 1$  でなければならない。式 (5.6) の固有値が実固有値をもつ場合には、解が発散する成分と減少する成分を有することになる。したがって、解が発散しない条件は、複素数の固有値を有する場合で、その条件は、

$$\omega^2 (\Delta t)^2 (1 - 4\beta) \leq 4 \quad (5.7)$$

となり、ニューマークの $\beta$ 法において、解が発散せずに安定して求まる。より具体的に示せば、

$$\begin{aligned} \beta &\geq 1/4 \\ \beta < 1/4 \text{ and } \omega\Delta t &\leq \frac{2}{\sqrt{1-4\beta}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

と与えられる。したがって、 $\beta = 1/6$ では、時間刻みと対象とする振動の円振動数 $\omega$ との関係で安定限界の条件が、 $\Delta t/T \leq 0.349$  ( $T = 2\pi/\omega$ ) と与えられる。これに対して、 $\beta = 1/4$ では、数値積分の安定性の問題はないが、これは必ずしも誤差のない解が得られることを意味しているわけではない。さらに、多自由度系の動的解析を実施する場合には、含まれる最低次の固有円振動数に対して式(5.8)の条件を考慮する必要があるので、一般には、 $\beta < 1/4$ の場合に上記の条件を満足させることは難しい。

## 6. 集中質量マトリックスと整合質量マトリックス

有限要素法を用いて連続体の動的応答解析を実施する場合には、要素分割した場合の節点に配置すべき適切な質量マトリックスを構成する必要がある。一般に、連続体の質量マトリックスの構成法としては、集中質量マトリックス (Lumped mass matrix) 法および整合質量マトリックス (Consistent mass matrix) 法の2通りがある(戸川隼人 1975)。いずれの質量マトリックスにも長所、短所があるので、その性質を理解して用いる必要がある。

集中質量マトリックス (Lumped mass matrix) とは、例えば、有限要素法において要素分割した質量密度が様な分布質量を、要素の節点ごとに等分に振り分けることによって構成される。この場合、節点の自由度として考慮しているすべての並進方向に対応する集中質量を配置する。また、回転の自由度を有する節点に回転慣性を配置する場合にも、1つの節点に対応する回転慣性を配置するればよい。ただし、一般に要素の回転慣性を適切に節点に振り分けるのは容易ではない。結果的に、集中質量マトリックス法によって構成された質量マトリックスは、節点の自由度の方向のみに値を配置するので対角マトリックスとなる。

これに対して、整合質量マトリックス (Consistent mass matrix) とは、有限要素法において、剛性マトリックスを誘導する場合の変位関数を用い、その変位関数に基づいて要素内の加速度分布を求め、要素の慣性力を構成して得られる質量マトリックスであり、連続体の慣性力とエネルギー的に等価な慣性力をもつように構成された質量マトリックスである。

2次元平面3角形要素を対象として、集中質量マトリックスの構成法を示す。3角形要素の全質量を $m$ とし、節点の自由度として、 $x$  (水平) 方向、 $y$  (鉛直) 方向の並進運動のみを考える。この場合、1つの要素の全節点数は3であるから、各節点に分配される質量はそれぞれ $m/3$ となる。ただし、 $x$  方向、 $y$  方向はそれぞれ独立であるので、両方向に質量を配置する必要がある。つまり、その集中質量マトリックスを、節点の自由度との対応がわかるように慣性力として示せば、

$$M\ddot{u} = \begin{bmatrix} m/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{1x} \\ \ddot{u}_{2x} \\ \ddot{u}_{3x} \\ \ddot{u}_{1y} \\ \ddot{u}_{2y} \\ \ddot{u}_{3y} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

と表され、対角マトリックスとなることがわかる。

次に、整合質量マトリックスの構成法を説明する。1つの有限要素の慣性力による仕事  $\delta V$  を仮想仕事の原理に基づいて表すと、

$$\delta V = \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (6.2)$$

となる。ここに、 $\mathbf{u}$  は有限要素内の変位ベクトル、 $\rho$  は密度である。有限要素内の変位ベクトル  $\mathbf{u}$  と要素の節点変位ベクトル  $\mathbf{u}_e$  の関係を表す形状関数  $\mathbf{N}$  を用いると、上式は、

$$\delta V = \delta \mathbf{u}_e^T \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{u}}_e \quad (6.3)$$

と表せる。したがって、1つの要素の質量マトリックス  $M$  は、

$$M = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \quad (6.4)$$

によって求められ、式 (6.1) とは異なり、非対角項にもゼロ以外の値が入った質量マトリックスとなる。

集中質量マトリックス (LM 法) と整合質量マトリックス (CM 法) の特徴をまとめると、

1. 逆行列を計算する場合など計算機の経済性の観点からは、質量が対角項にのみ配置される LM 法が有利であるが、精度の面からは一般に CM 法が好ましい。
2. 解析モデルの要素分割数が十分であれば、CM 法を用いた固有振動数は上界値を与え、LM 法を用いた固有振動数は過小評価されやすい。
3. 要素分割数が少ない場合には、例えば、対称構造の質量配置が非対称になるなど必ずしも CM 法が良いとは限らない。

## 7. 固有値解析

対象構造物の揺れ易い振動モードおよびその固有振動数あるいは構造物のモデル化の妥当性を、動的解析に先立って確認する必要がある。また、動的解析時の卓越する振動モードを把握するための情報として、刺激係数あるいは有効質量を確認し、解析結果の解釈に役立てるために固有値解析を実施するのが一般的である。さらに、レーリー減衰などの比例減衰設定時に採用する振動モードを決めるために固有値解析の結果を利用する。

### 7.1 非減衰系の固有値解析

まず、一般的な非減衰系の固有値解析の方法を説明する。

式 (1.1) を参考にすれば、非減衰自由振動の運動方程式は以下となる。

$$M\ddot{D} + KD = 0 \quad (7.1)$$

ここで、上式の変位ベクトル  $D$  の解を、 $D = \phi \exp(i\omega t)$  として式 (7.1) に代入すれば、

$$[K - \omega^2 M]\phi = 0 \quad (7.2)$$

の関係が得られる。式 (7.2) を満足する  $\phi = 0$  以外の自明でない解を求めるための条件式は、

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (7.3)$$

となる。ここに  $| \cdot |$  はマトリックスの行列式を意味する。式 (7.2) の形は固有値問題になり、 $\omega$  が固有値問題の固有値に対応する固有円振動数、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルが固有振動モードを表す。

剛性マトリックスおよび質量マトリックスのサイズ，すなわち，解析モデルの自由度が  $n$  であるとすれば，式 (7.3) は， $\omega^2$  に関する  $n$  次方程式となるので，解析モデルは結果的に  $n$  個の固有円振動数および固有振動モードを有する． $n$  個の固有円振動数のうち，最も小さいものから順に 1 次固有円振動数  $\omega_1$ ，2 次固有円振動数  $\omega_2$ ， $\dots$  と呼ぶ．また，対応する  $j$  次固有振動数  $f_j$  および固有周期  $T_j$  は，

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi} \quad T_j = \frac{2\pi}{\omega_j} \quad (7.4)$$

と表せる． $j$  次固有円振動数が決まると，式 (7.2) から，

$$[K - \omega_j^2 M] \phi_j = 0 \quad (7.5)$$

満足する未定係数ベクトル  $\phi_j$  が得られ，これを  $j$  次固有振動モードと呼ぶ．全自由度の固有振動モードを，

$$\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n] \quad (7.6)$$

のように順番に並べて構成したマトリックスが前述のモードマトリックスである．

## 7.2 減衰系の固有値解析

非比例型減衰マトリックスを有する固有値解析 (山口宏樹 1996) を考える．減衰自由振動の運動方程式は以下のように表せる．

$$M\ddot{D} + C\dot{D} + KD = 0 \quad (7.7)$$

この一般解を  $D = \phi \exp(i\omega t)$  とし，式 (7.7) に代入すると，

$$[K + i\omega C - \omega^2 M] \phi = 0 \quad (7.8)$$

となり，やはり固有値問題になることがわかる．ただし，この場合，固有ベクトル  $\phi$  の係数マトリックスは複素マトリックスであるので，固有値  $\omega$ ，固有ベクトル  $\phi$  も複素数となる．式 (7.8) に，

$$M\dot{D} - M\dot{D} = 0 \quad (7.9)$$

という式を組み合わせることによって以下のような状態方程式を構成し，複素固有値および固有ベクトルを求めることができる．

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{D} \\ \ddot{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

上式を書き直せば，より一般的な状態方程式

$$A\dot{Z} + BZ = 0 \quad (7.11)$$

が得られる．ここに，

$$A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} D \\ \dot{D} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

であり， $A$ ， $B$  は  $2n \times 2n$  の対称マトリックス， $Z$  は  $2n$  元ベクトルとなる．ここで式 (7.11) の解を， $Z = \psi \exp(\lambda t)$  と置き，一般的な固有値問題と同様の手順をたどれば，この場合の固有値，固有ベクトルが求まる．ここで， $\psi$  は変位の固有振動モード  $\phi$  を用いて以下のように表される．

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \phi \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

複素固有値解析によって得られる固有値  $\lambda$ , 固有ベクトル  $\psi$  はいずれも複素数として求められる。そこで,  $j$  次の複素固有値を  $\lambda_j$  とすれば,  $j$  次固有円振動数  $\omega_j$  と減衰定数  $\xi_j$  は,

$$\lambda_j = \lambda_{j,r} + i\lambda_{j,i} = -\xi_j\omega_j + i\omega_j\sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (7.14)$$

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_{j,r}^2 + \lambda_{j,i}^2} \quad (7.15)$$

$$\xi_j = -\frac{\lambda_{j,i}}{\omega_j} = -\frac{\lambda_{j,i}}{\sqrt{\lambda_{j,r}^2 + \lambda_{j,i}^2}} \quad (7.16)$$

と求められる。ここに,  $\lambda_{j,r}$ ,  $\lambda_{j,i}$  は複素固有値の実部と虚部を示している。

一方, 固有振動モードも以下のように複素数となるが, この物理的意味は, 各自由度の振動が互いに異なる位相差をもって減衰調和振動をすることである。

## 8. 減衰マトリックスの設定

### 8.1 比例減衰の設定法

多自由度系の線形動的解析を行う場合の運動方程式を再掲すれば, 以下のように表される。

$$M\ddot{D} + C\dot{D} + KD = F \quad (8.1)$$

ここに,  $K$  は剛性マトリックス,  $M$  は質量マトリックスである。また,  $\ddot{D}$ ,  $\dot{D}$ ,  $D$  はそれぞれ加速度ベクトル, 速度ベクトル, 変位ベクトルであり,  $F$  は外力ベクトルである。なお, 減衰マトリックス  $C$  は, 減衰力が速度に比例した形で, 一般に式 (8.1) のように与えられる。この減衰マトリックスは, 取扱いの容易さや動的解析に際してモード解析法を適用する立場から, 質量比例型, 剛性比例型あるいは両者に比例したレーリー型減衰マトリックスが用いられることが多い (日本建築学会 2000), (柴田明德 1981)。これらの減衰マトリックスは, それぞれ,

$$C = a_1 M \quad (8.2a)$$

$$C = a_2 K \quad (8.2b)$$

$$C = a_3 M + a_4 K \quad (8.2c)$$

という形で与えられる。質量比例型および剛性比例型の場合には, 任意の1つの次数 (通常は1次振動モード) の減衰定数を設定することによって, 上式の係数  $a_1$  あるいは  $a_2$  が決められる。また, レーリー減衰の場合には, 任意の2つの次数の減衰定数を設定することによって, 係数  $a_3$ ,  $a_4$  が決められる。これらの係数は,

$$a_1 = 2h_i\omega_i \quad (8.3a)$$

$$a_2 = 2h_i/\omega_i \quad (8.3b)$$

$$a_3 = 2\omega_i\omega_j(h_i\omega_j - h_j\omega_i)/(\omega_j^2 - \omega_i^2) \quad (8.3c)$$

$$a_4 = 2(h_j\omega_j - h_i\omega_i)/(\omega_j^2 - \omega_i^2) \quad (8.3d)$$

と表される。ここに,  $\omega_i$ ,  $h_i$  はそれぞれ対象としている次数の固有円振動数, 減衰定数であり, また,  $i < j$  である。以上のように各タイプの比例減衰マトリックスを構成した場合, その他の  $k$  次振動モード ( $k \neq i, j$ ) の減衰定数は以下のように, それぞれの固有円振動数  $\omega_k$  に応じて自動的に規定される。

$$h_k = a_1/2\omega_k \quad (\text{質量比例型}) \quad (8.4a)$$

$$h_k = a_2\omega_k/2 \quad (\text{剛性比例型}) \quad (8.4b)$$

$$h_k = (a_3/\omega_k + a_4\omega_k)/2 \quad (\text{レーリー型}) \quad (8.4c)$$

したがって、質量比例型の場合には、振動次数が高くなるほど減衰定数は小さくなり、剛性比例型およびレーリー型の場合には、振動次数が高くなるほど減衰定数は大きくなる。

ところで、比例減衰マトリックスを構成する場合には、着目する振動モードの減衰定数を定める必要があるが、その方法の1つにひずみエネルギー比例減衰法がある(日本建築学会 2000),(川島一彦ら 1993)。これは、構造物を構成する各構造要素ごとの減衰定数を仮定し、各振動モードの減衰定数をひずみエネルギーに比例させた形で与えるものである。つまり、

$$h_i = E_i/W_i \quad (8.5)$$

と表される。ここに、

$$E_i = \pi_i^T \mathbf{h} \pi_i \quad (8.6a)$$

$$W_i = \pi_i^T \mathbf{K} \pi_i \quad (8.6b)$$

である。ここで、 $h_i$  は  $i$  次振動モードの減衰定数、 $\pi_i$  は  $i$  次振動モードベクトル、 $\mathbf{h}$  は剛性マトリックスを構成する各要素の成分にその構造要素の減衰定数を乗じて構成した剛性マトリックスを意味する。例えば、図 8.1 のようなばね質点の振動系において、 $m_1, m_2, m_3$  は質量、 $k_1, k_2, k_3$  はばね要素のばね定数、 $h_1, h_2, h_3$  はそれぞれのばね要素の減衰定数であるとすれば、剛性マトリックス  $\mathbf{K}$  および  $\mathbf{h}$  は、それぞれ以下のように表される。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (8.7a)$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 k_1 + h_2 k_2 & -h_2 k_2 & 0 \\ -h_2 k_2 & h_2 k_2 + h_3 k_3 & -h_3 k_3 \\ 0 & -h_3 k_3 & h_3 k_3 \end{bmatrix} \quad (8.7b)$$

なお、各構造要素の減衰定数の参考値は道路橋示方書・同解説 (V 耐震設計編) に示されている(日本道路協会 2002)。

以上のようにして、各振動モードごとの減衰定数が求まるので、質量比例型あるいは剛性比例型の減衰マトリックスを用いる場合、基本的には1次振動モードの減衰定数および固有円振動数を式(8.3a)あるいは(8.3b)に代入して、それぞれ質量マトリックス、剛性マトリックスに乗じる係数を求めればよい。また、レーリー型の減衰マトリックスを用いる場合には、例えば、着目する2つの振動モードの減衰定数と固有円振動数を式(8.3c)、(8.3d)に代入して、質量マトリックスおよび剛性マトリックスに乗じる係数を求めればよい。着目する振動モードとしては、低次の振動モードあるいは刺激係数の高い振動モードを用いる場合が多い。

## 8.2 非比例減衰の設定法

例えば、ダンパーが設置されるなど、部分的な減衰要因が取り付けられた構造物の減衰は、必ずしも上記のような比例減衰マトリックスとして構成されるわけではなく、非比例減衰マトリックスとなる場合がある。このような場合には、部分的な減衰要因が配置されている要素に対応させて、構成される減衰マトリックスに対して、直接的にその減衰係数を配置すればよい。あるいは、比例減衰マトリックスに、他の減衰要因を加えればよい。このようにすることによって、結果的に非比例減衰マトリックスが構成されるので、固有値解析を行う場合には、複素固有値解析を実施する必要がある。

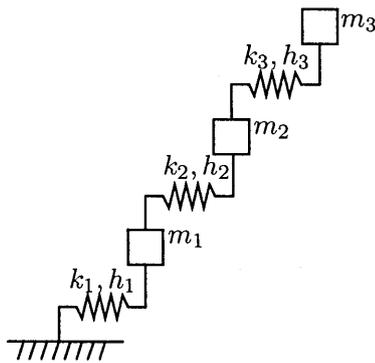


図 8.1 ひずみエネルギー比例減衰法における構造要素の減衰定数の考え方

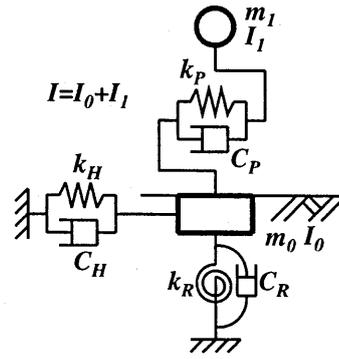


図 8.2 橋脚-基礎地盤系の3自由度モデル

ただし、種々の減衰要因の中には、例えば、摩擦減衰などもあり、必ずしも粘性的なエネルギー吸収を生じられるものばかりではない。その場合には、比例あるいは非比例減衰マトリックスを用いて動的応答を求めることはできない。

### 8.3 簡易モデルを用いた減衰設定法の例題

種々の減衰の設定法を説明したが、その具体例を示すために、図 8.2 に示すような、橋脚の水平運動、基礎の水平運動、基礎の回転運動を考えた橋脚-基礎地盤系の3自由度モデル (SR モデル) を考える。

この系の減衰自由振動の運動方程式は、以下のように表される。

$$M\ddot{D} + C\dot{D} + KD = 0 \quad (8.8)$$

ここに、剛性マトリックス  $K$ 、質量マトリックス  $M$ 、減衰マトリックス  $C$  は、以下のように表される。

$$K = \begin{bmatrix} k_P & -k_P & -k_P H \\ -k_P & k_P + k_H & k_P H \\ -k_P H & k_P H & k_P H^2 + k_R \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 + I_1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_P & -C_P & -C_P H \\ -C_P & C_P + C_H & C_P H \\ -C_P H & C_P H & C_P H^2 + C_R \end{bmatrix} \quad D = \{y_1 \quad y_0 \quad \theta\}^T \quad (8.9)$$

ここに、 $m_1$ 、 $m_0$  は上部構造、フーチングの質量、 $I_1$ 、 $I_0$  はそれぞれの回転慣性、 $k_P$ 、 $k_H$ 、 $k_R$  は、それぞれ橋脚の剛性を表す水平ばね定数、水平地盤ばね定数、回転地盤ばね定数であり、 $C_P$ 、 $C_H$ 、 $C_R$  は、それぞれ対応するダッシュポットの粘性減衰係数である。 $y_1$ 、 $y_0$ 、 $\theta$  は、それぞれ橋脚頂部の水平変位、フーチングの水平変位、フーチングの回転角を表す。なお、式 (8.9) 中の減衰マトリックスは、比例減衰を設定せずに直接粘性減衰係数を設定するときのみ用いる。数値計算に用いたそれぞれの諸量の値を表 8.1 に示し、橋脚の高さ  $H = 10\text{m}$  としている。また、非減衰時の固有振動数およびその卓越振動モードを表 8.2 に示している。

このモデルに対して、比例減衰として、質量比例型、剛性比例型、レーリー型および非比例型減衰を設定した場合の各モード減衰定数を表 8.3 にまとめる。剛性比例型および質量比例型では、橋脚の振動が卓越する1次振動モードの減衰定数を 0.02 と仮定し、前節の方法により減衰マトリッ

表 8.1 SR モデルの諸元

$m_1$	200.0t	$k_P$	10.0MN/m	$C_P$	56.39kNs/m
$m_0$	300.0t	$k_H$	2.0GN/m	$C_H$	4.911MNs/m
$I_1$	2.0tm <sup>2</sup>	$k_R$	800.0GNm	$C_R$	1.105MNms
$I_0$	40.0tm <sup>2</sup>	$H$	10.0m		

表 8.2 SR モデルの固有振動数

振動次数	卓越モード	固有振動数
1次	橋脚水平	1.122Hz
2次	基礎水平	13.03Hz
3次	基礎回転	21.98Hz

表 8.3 粘性減衰係数と減衰定数

卓越モード	要素減衰定数	質量比例	剛性比例	ひずみ比例	レーリー	非比例
橋脚水平	0.02	0.02	0.02	0.0205	0.0205	0.0198
基礎水平	0.1	0.00172	0.232	0.0996	0.0601	0.1012
基礎回転	0.1	0.00102	0.392	0.0999	0.0999	0.0957

クスを設定した。また、レーリー型減衰の時には、前節で説明したひずみエネルギー比例減衰法により、1次および3次のモード減衰定数を求め、それに基づいてレーリー減衰を設定した。この場合、各ばねの要素減衰定数は同表に記載しているように、橋脚部に対して0.02、基礎部に対して0.1とした。

さらに、橋脚-基礎地盤系モデルの各粘性減衰係数が表 8.1 に示す値をもつ非比例減衰の場合のモード減衰定数も示している。この場合、橋脚水平、基礎水平、基礎回転のそれぞれの1自由度系としての減衰定数が要素減衰定数に一致するように、各粘性減衰係数は式(3.3)を用いて決定した。

ここで用いたモデルが非常に簡易であるが、それぞれに設定した減衰特性の傾向を表していることがわかる。

## 参考文献

- Shen, C., E. Mizuno, T. Usami (1993). Development of cyclic two-surface model for structural steels with yield plateau. *NUCE Report* (No.9302).
- 宇佐美勉, 鄭沂, 葛漢彬 (1999). Pushover 解析と等価1自由度モデルによる鋼製ラーメン橋脚の耐震設計法. *土木学会論文集 No.626/I-48*, 213-240.
- 皆川勝 (1988). 構造用鋼材の弾塑性履歴挙動のモデル化とそれの構造部材への応用. 武蔵工業大学学位論文.
- 戸川隼人 (1975). 有限要素法による振動解析. サイエンス社.
- 後藤芳顯, 王慶雲, 高橋宣男, 小畑誠 (1998). 繰り返し荷重下の鋼製橋脚の有限要素法による解析と材料構成則. *土木学会論文集 No.591/I-43*, 189-206.
- 山口宏樹 (1996). 構造振動・制御. 共立出版.
- 柴田明徳 (1981). 最新耐震構造解析. 森北出版.
- 西村宣男, 小野潔, 池内智行 (1995). 単調載荷曲線を基にした繰り返し塑性履歴を受ける鋼材の構成式. *土木学会論文集 No.513/I-31*, 27-38.

- 川島一彦, 長島寛之, 岩崎秀明 (1993). エネルギー比例減衰法による免震橋のモード減衰定数の推定精度. 土木技術資料 35-5, 土木研究所.
- 太田俊昭 (1980). 構造物の非弾性解析, 新体系土木工学 8. 技報堂出版.
- 土木学会構造工学委員会 (1996). 構造工学における計算力学の基礎と応用, 構造工学シリーズ 7. 土木学会.
- 日本建築学会 (2000). 建築物の減衰. 丸善.
- 日本道路協会 (2002). 道路橋示方書・同解説 (V耐震設計編). 丸善.
- 鈴木森晶, 宇佐美勉, 寺田昌弘, 伊藤努, 才塚邦宏 (1996). 鋼製箱形断面橋脚の復元力モデルと弾塑性地震応答解析. 土木学会論文集 No.549/I-37, 191-204.