

座屈解析
座屈現象とその解析法

首都大学東京

野上 邦栄

鋼構造基礎講座
「鋼構造における有限要素法の基礎とその適用に関する講習会」

座屈解析 ～座屈現象とその解析法～

2008年6月26日

首都大学東京 野上邦栄

目次

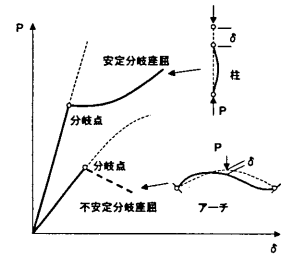
1. 構造物の不安定現象と不完全構造
2. 座屈解析と耐荷力解析
3. 柱の座屈・耐荷力
4. 平板・補剛板の座屈・耐荷力
5. 鋼桁の座屈・耐荷力
6. 最近の話題
 - 既設構造部材(腐食部材)の耐荷力

1

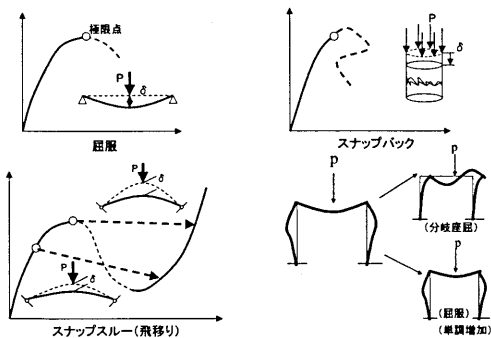
構造物の不安定現象 と不完全構造

構造物の不安定現象

- 安定な釣り合い経路
- 不安定な釣り合い経路
- 分岐点は、初期変形様式から別な変形様式に分岐する点 (分岐荷重、あるいは座屈荷重)
- 分岐座屈は、初期変形様式から別な変形様式に急激に移行する現象 (単に座屈とも呼ぶ)
- 座屈は、分岐、屈服および飛移りなどの弾性挙動を総称する場合が多い。
- 分岐点、極限点は、数学的には特異点の挙動

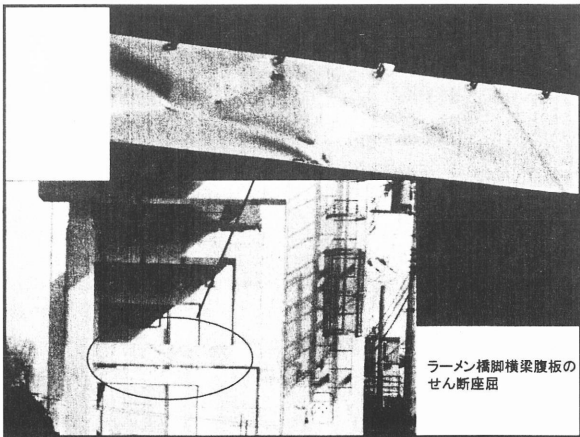
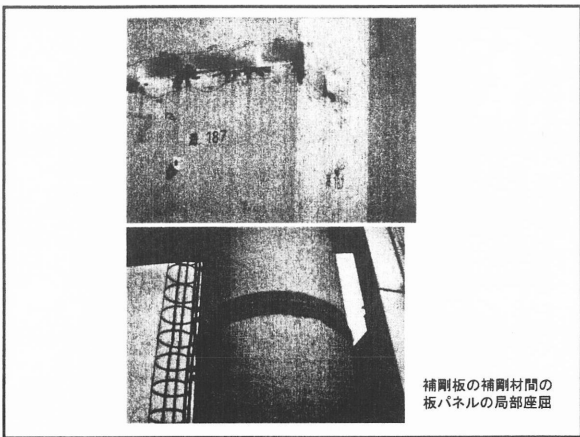
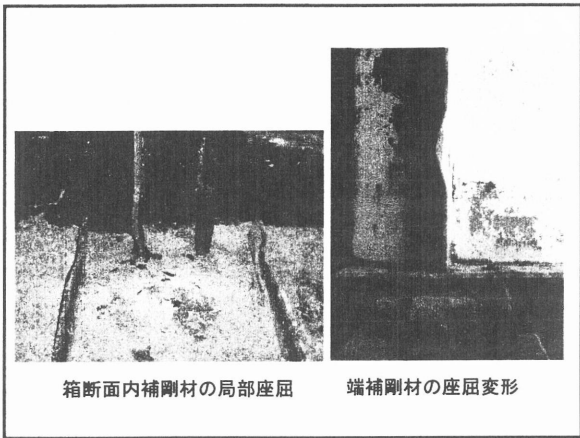
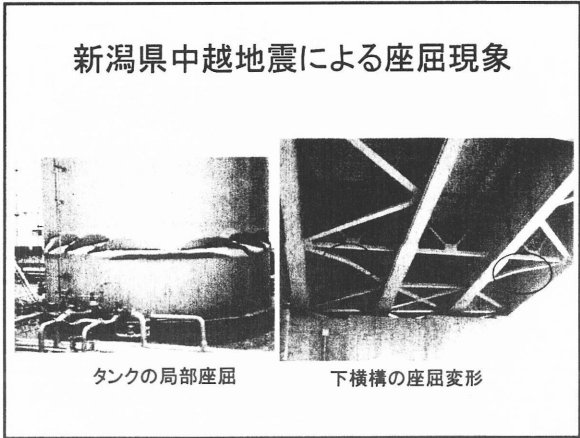
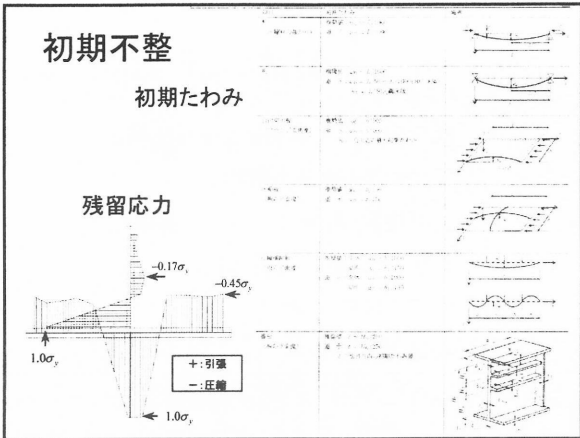


弾性状態における不安定現象例



完全系・不完全系

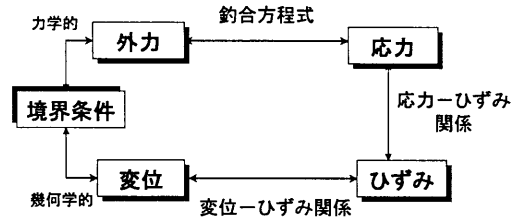
- 分岐は、理想化された系の数学的な概念であり、
- 実際の系は、荷重の偏心や部材の曲がりなどの完全状態からの狂い量である初期不整を持っているために、分岐は発生しない。
- 初期不整がない系を「完全系」、初期不整を持つ系を「不完全系」と呼ぶ
- 理想化されたモデルである完全系の分岐挙動と実現象に対応する不完全系の非分岐挙動をともに理解することが重要



2

座屈解析と耐荷力解析

力学的基本事項



非線形解析レベル

| 解析レベル | 釣合式 | 応力-ひずみ | 変位-ひずみ | 釣合状態 | その他 |
|-----------|-----|--------|--------|------|---------|
| 微小変位解析 | 線形 | 線形 | 線形 | 変形前 | |
| 弾性有限変位解析 | 非線形 | 線形 | 非線形 | 変形後 | 幾何学的非線形 |
| 弾塑性解析 | 線形 | 非線形 | 線形 | 変形後 | 材料非線形 |
| 弾塑性有限変位解析 | 非線形 | 非線形 | 非線形 | 変形後 | 複合非線形 |

座屈解析

- 座屈・分岐問題は、ある非線形釣合方程式の解を求める問題の一種
- 構造物の静的解析における不安定挙動は、分岐点挙動と極限点挙動(屈服)に分けられる
- 分岐挙動は、完全系において表れる …… 座屈解析
- 座屈解析は、線形固有値解析により分岐荷重や極限点荷重を求める
- 線形固有値解析は、変形が十分に小さいことを前提に座屈前の変形を無視

釣合方程式

- 全ポテンシャル
 $\Pi = (\text{内部エネルギー}) + (\text{外力ポテンシャルエネルギー})$

$$\square = \square(\mathbf{d}, \mathbf{f})$$

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$$

- 非線形釣合方程式

全ポテンシャルエネルギーの停留原理

$$\phi_i = \frac{\partial \square(\mathbf{d}, \mathbf{f})}{\partial d_i} = 0$$

$$\square(\mathbf{d}, \mathbf{f}) = \mathbf{K}(\mathbf{d})\mathbf{d} + \mathbf{f} = 0$$

特異点

- 釣合方程式 $\square(\mathbf{d}, \mathbf{f}) = 0$ を満たす解 (\mathbf{d}, \mathbf{f}) と、その近傍の別の解 $(\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}, \mathbf{f} + \delta\mathbf{f})$ を考える

$$\square(\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}, \mathbf{f} + \delta\mathbf{f}) = \square(\mathbf{d}, \mathbf{f}) + \frac{\partial \square}{\partial \mathbf{d}} \delta\mathbf{d} + \frac{\partial \square}{\partial \mathbf{f}} \delta\mathbf{f} + \text{高次項} = 0$$

$$\mathbf{J} \delta\mathbf{d} = -\frac{\partial \square}{\partial \mathbf{f}} \delta\mathbf{f} - \text{高次項} \quad \mathbf{J} = \frac{\partial \square}{\partial \mathbf{d}} \quad \begin{array}{l} \text{Jacobi行列} \\ \text{接線線性行列} \end{array}$$

- 特異点 $(\mathbf{d}_c, \mathbf{f}_c)$ は、 $\square(\mathbf{d}, \mathbf{f}) = 0$ と特異性条件式を満足する

$$\det \mathbf{J}(\mathbf{d}_c, \mathbf{f}_c) = 0$$

特異性条件式(弾性座屈解析)

- 特異点における荷重が、座屈荷重 f_c である
- 工学上重要な基本径路上の最初の特異点の荷重を最小座屈荷重と呼ぶ
- 一般化固有値問題
AとBは、対称行列で正定値のとき、次式を満足するfとdを求める問題

$$J(f)d = (A + fB)d = 0$$

$$|K_E + fK_G(N)| = 0$$

K_E : 微小変位理論による剛性行列

K_G : 幾何剛性行列

N : 軸力

$f = fN$

線形固有値解析手法

- 小規模マトリックス
べき乗法
逆反復法
- 中規模マトリックス
スツルム法
二分法(バイセクション法)
- 大規模マトリックス
サブスペース法

座屈解析のモデル化と設計上の適用

- 骨組構造・板構造の解析モデル
 - 基本は、一般構造の応力解析と同様にモデル化
 - 要素分割数は、構造形式と荷重条件とから座屈モードを想定して決定
 - 板要素形状の縦横比は、座屈変形を支配する領域で1:2以下とし、それ以外の部分で1:3程度
 - 境界条件は、現実の構造を観察して、6自由度を適切に拘束
- 座屈解析の適用例
 - 設計上構造物の不安定挙動が生じる理由を理解する手段
 - 有効座屈長の算定
 - 座屈モードに基づき初期たわみ形状の決定など

弾性有限変位解析による特異点探索法

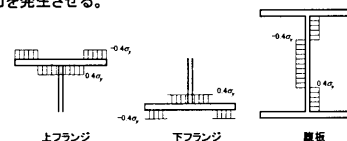
- 非線形固有値解析
 - 座屈前の変形が無視できない場合
 - 弾性有限変位解析により釣合径路を追跡計算しながら、接線剛性行列の値がゼロになる点として特異点を特定する
- 摂動(微小初期たわみ)を考慮した弾性有限変位解析による特異点探索…………… 6. で紹介

耐荷力解析

- 極限点挙動は、初期不整のある実際の不完全系構造物の終局挙動に表れることが多い
……………耐荷力解析(弾塑性有限変位解析)
- 耐荷力解析は、終局状態を含む変形挙動を直接予測追跡するもの
 - 初期不整(初期たわみ、荷重偏心、残留応力)
 - 構成則の非線形
 - 釣合式の非線形

残留応力の導入

- 骨組解析:
 - 断面内のセグメントに初期応力(これまでに実績のある残留応力分布値、あるいは実験実測値など)を入力する。
- 板構造解析:
 - 溶接部に正負の初期応力(これまでに実績のある残留応力分布値、あるいは実験実測値など)を与えて全体構造解析をし、溶接部に残留応力を発生させる。

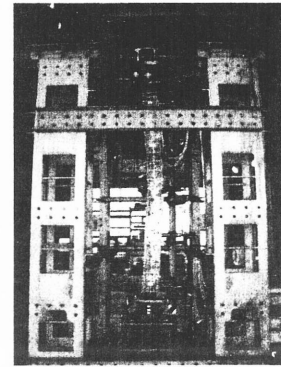


非線形数値計算法

- 反復法
- 増分法
 - 荷重増分法
 - 変位増分法
 - 弧長増分法

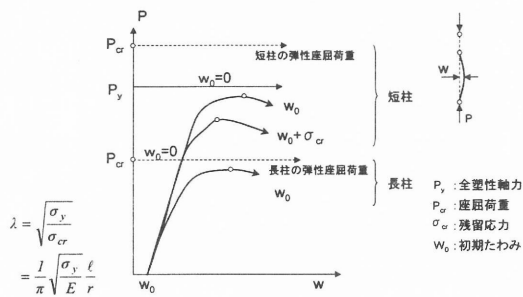
3

柱の座屈・耐荷力



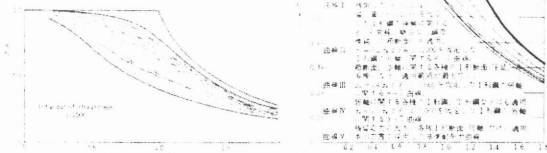
既設部材の圧縮耐荷力実験

柱の座屈・非弾性挙動の概要



基準耐荷力曲線

- 鋼種、材料強度
- 製作法(圧延、溶接)
- 断面形(H型、I型、箱型、パイプなど)
- 座屈軸方向(強軸、弱軸)
- 初期たわみ量のばらつき
- 残留応力の大きさと分布形状



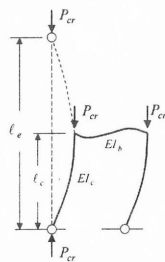
弾性座屈解析(全体構造系)による有効座屈長の評価

$$\ell_e = \beta \ell_c$$

$$\beta = \frac{\pi}{\ell_c} \sqrt{\frac{E_c I_c}{P_{cr}}}$$

P_{cr} : 座屈荷重 ($P_{cr} = N_{cr} = f_{cr} N_c$)
 f_{cr} : 固有値
 N_c : 軸力

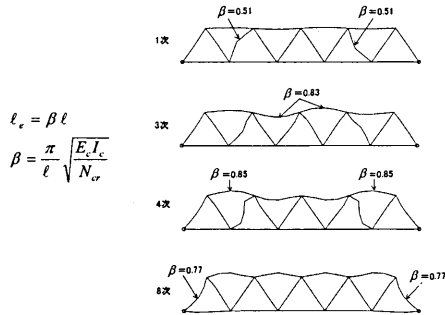
- 分岐座屈荷重に相当する固有値は、構造系に一つ存在
- 全体座屈強度と全部材の座屈強度がほぼ等しい構造に対して精度が良い



設計上の対策

- 曲げ部材として断面設計
- 適切な数値による有効座屈長の頭切り
- 変断面部材を一様断面に換算した圧縮部材として断面設計
- 変化する軸圧縮力を一様軸圧縮力に換算した圧縮部材として断面設計
- 高次固有値あるいは固有モードの適用

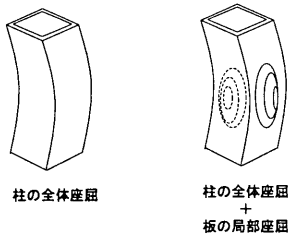
高次固有値の適用例



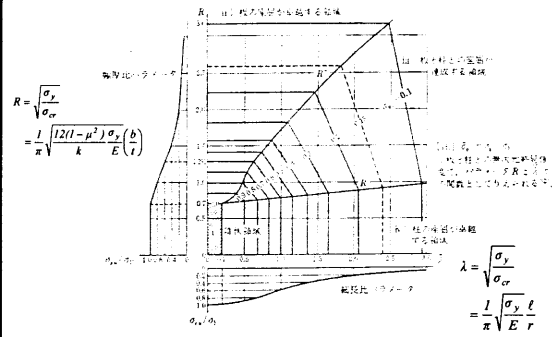
4

平板・補剛板の 座屈・耐荷力

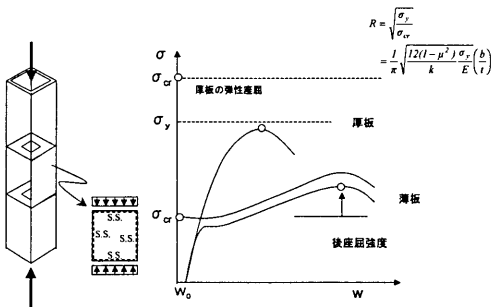
柱と構成板パネルとの 連成座屈



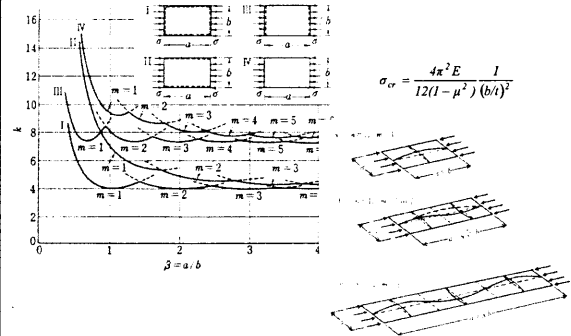
柱, 板, および連成座屈の区分



圧縮平板の座屈・非弾性挙動の概要



境界条件と座屈係数(固有値解析)



種々の応力を受ける板の座屈係数

| 応力 | 形状 | 座屈係数 | 補剛係数 |
|-------------|----|---------|---------|
| 単軸引張力 | | $k = 4$ | $R = 4$ |
| 単軸圧縮力 | | $k = 4$ | $R = 4$ |
| 単軸引張力・単軸圧縮力 | | $k = 4$ | $R = 4$ |
| 単軸引張力・単軸圧縮力 | | $k = 4$ | $R = 4$ |

補剛板の座屈係数 k_R

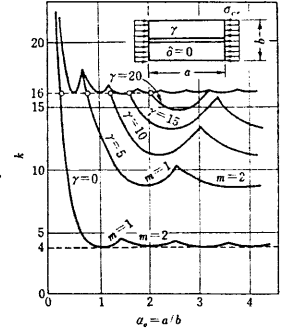
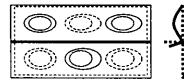
- 平板の座屈

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)(b/t)^2}$$

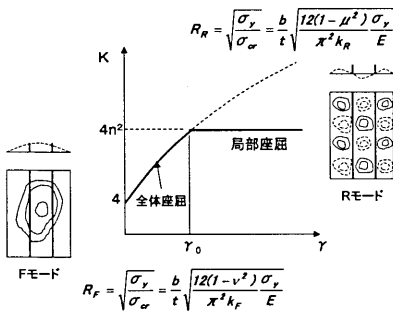
- 補剛材間の局部座屈

$$R_R = \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)\sigma_y}{\pi^2 k_R E}}$$

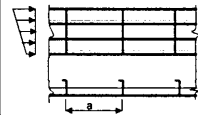
$$k_R = 4n^2, \quad n: \text{パネル数}$$



剛比と補剛板の座屈係数



補剛板の全体座屈



$$\alpha \leq \sqrt{1+n\gamma}, \quad k_F = \frac{(1+\alpha^2) + n\gamma}{\alpha^2(1+n\delta)}$$

$$\alpha > \sqrt{1+n\gamma}, \quad k_F = \frac{2(1+\sqrt{1+n\gamma})}{1+n\delta}$$

$$\gamma_r = \frac{I_r}{bt^3 \sqrt{2(1-\nu^2)}} = \frac{I_r}{bt^3 \sqrt{11}}$$

$$\gamma_r = \frac{I_r}{bt^3 \sqrt{2(1-\nu^2)}} = \frac{I_r}{bt^3 \sqrt{11}}$$

$$\delta_r = \frac{A_r}{bt}$$

$$\alpha = a/b$$

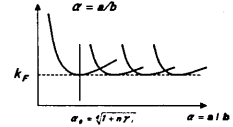
$$k_F = \frac{1}{1+n\delta_r} \left[\left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2 + \left(\frac{m}{\alpha} \right)^2 n\gamma_r + \frac{\alpha}{m^2} \gamma_r \right]$$

$$k_{Fmin} = \frac{2}{1+n\delta_r} \left(1 + \sqrt{(1+n\gamma_r) \left(1 + m \frac{\gamma_r}{\alpha} \right)} \right)$$

m: 横補剛材で区切られるパネル数

- 横補剛材の所要剛度

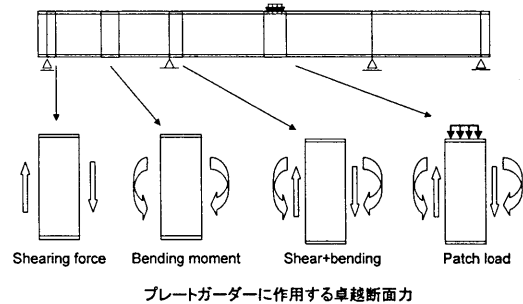
$$\gamma_r = \frac{1+n\gamma_r}{4\alpha^2}$$



5.

鋼げたの座屈・耐荷力

実橋における作用断面力

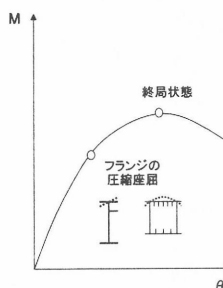


鋼げたの崩壊形式

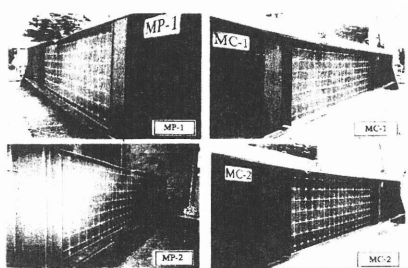
- 桁の曲げによる圧縮フランジの側方への座屈
 - 横倒れ座屈への対処
- 桁の曲げによる圧縮フランジのねじれ座屈
 - 純圧縮を受ける板要素(他端自由)の局部座屈への対処
- 桁の曲げによる圧縮フランジの垂直座屈
 - 圧縮フランジのかなり薄い腹板へのくい込みへの対処
- 曲げとせん断による腹板の座屈



曲げモーメントを受ける鋼桁の終局状態に至るまでの挙動



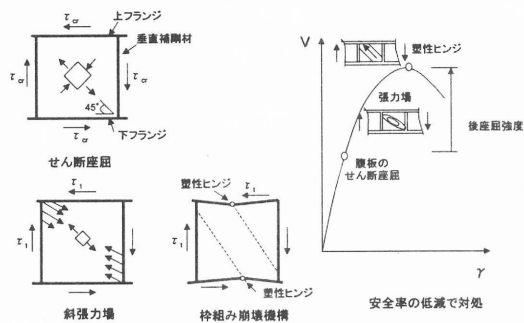
曲げ座屈



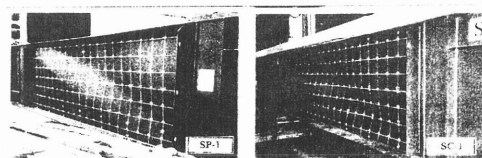
-steel girder-

-composite girder-

せん断を受ける鋼桁の3つの限界状態



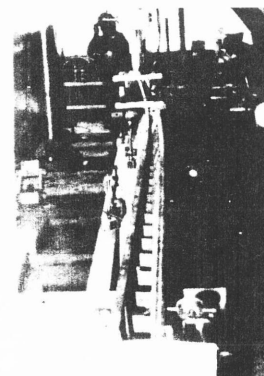
せん断座屈



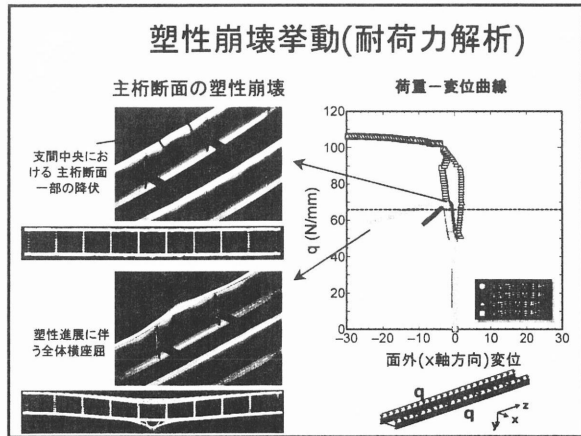
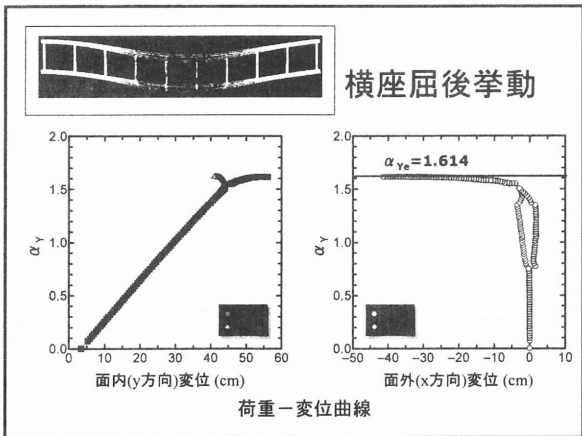
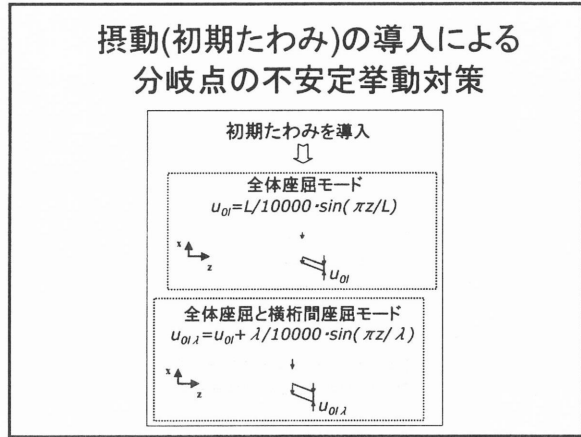
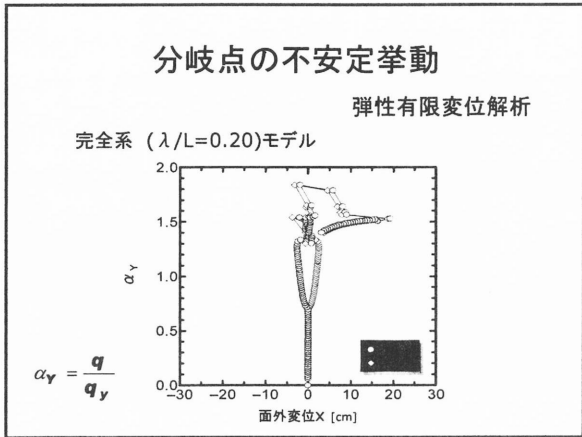
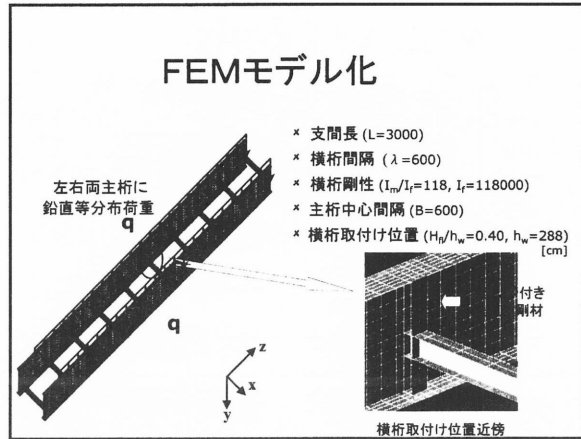
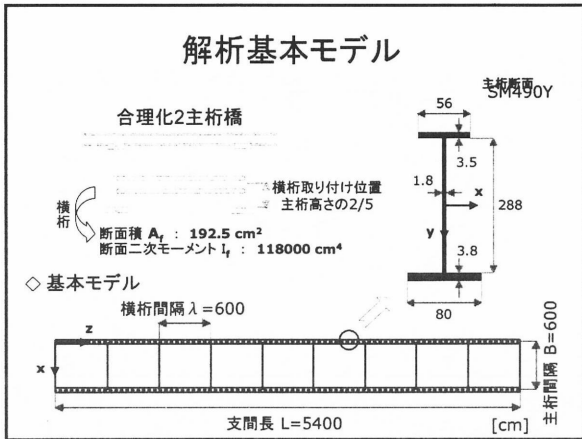
-steel girder-

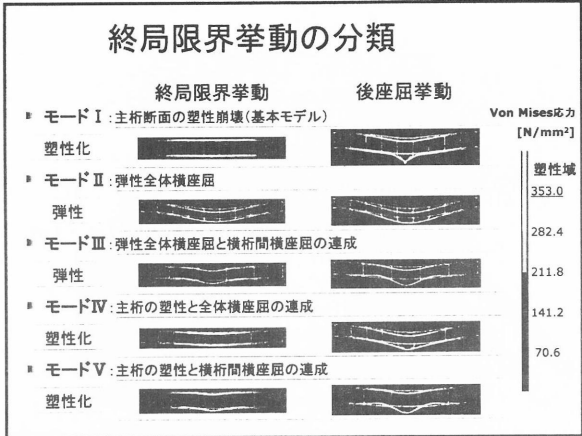
-composite girder-

全体横倒れ座屈



下路プレートガーダ橋の横座屈実験

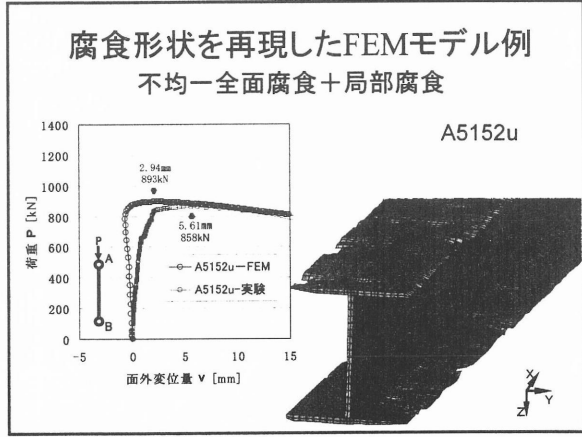
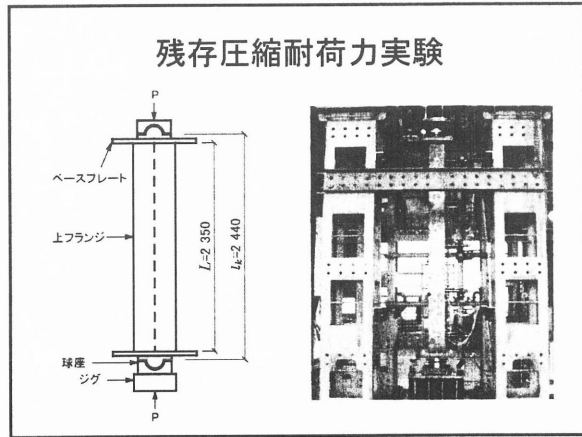




6

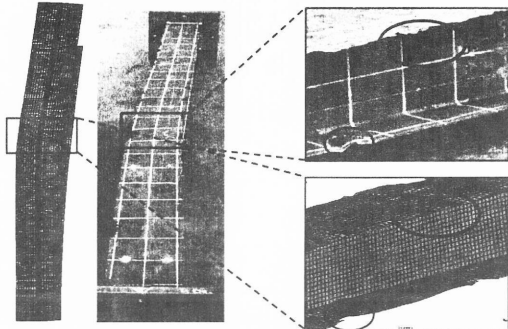
最近の話題

- 既設構造部材の耐荷力

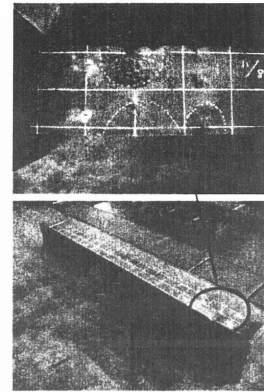
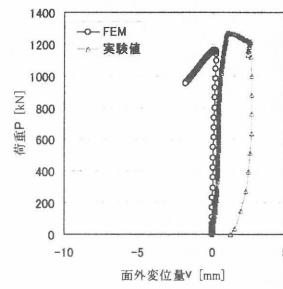


崩壊時挙動 A5152u

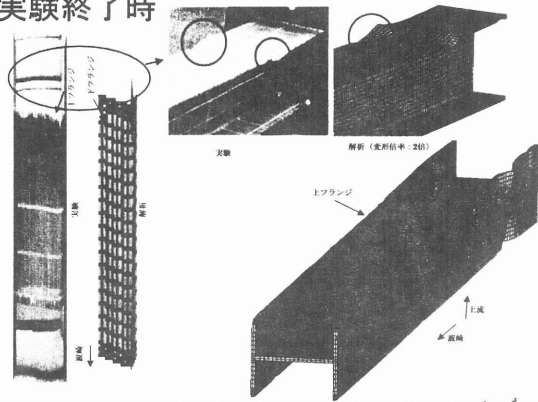
局部変形と全体変形の連成



局部腐食 C5655d



実験終了時



ご静聴ありがとうございました。