

有限要素法とは  
有限要素法の基礎(弾性体力学(線形問題)を例として)  
非線形解析(材料非線形と幾何学的非線形問題)

九州工業大学

山口 栄輝

鋼構造基礎講座  
「鋼構造における有限要素法の基礎とその適用に関する講習会」

有限要素解析の基礎的事項  
～有限要素法とは、有限要素法の基礎、非線形解析～

2008年6月26日

九州工業大学 山口栄輝

有限要素法とは

[例題] 次の境界値問題を解きなさい。

$$u_{,xx} + 1 = 0 \quad (0 < x < 1) \quad (1)$$

$$u(0) = -1 \quad (2)$$

$$u_{,x}(1) = 1 \quad (3)$$

[解]

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \quad (4)$$

近似解：重み付き残差法

厳密解：(1)～(3)をすべて満たす

近似解：(1)～(3)のいずれかまたはすべてを満たさない

(2)は満たすが他は満足しない近似解

$$u_{,xx} + 1 = \varepsilon_0(x) \quad (0 < x < 1) \quad (5)$$

$$u_{,x}(1) = \varepsilon_1 \quad (6)$$

ここに、 $\varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_1$ は残差

近似解：重み付き残差法

残差に次の条件を課す：

$$-\int_0^1 (u_{,xx} + 1)w \, dx + \{u_{,x}(1) - 1\}w(1) = 0 \quad (7)$$

ここに、 $w(x)$ は重み関数

$w(x)$ は任意であるが、次の条件を満たす。  
 $w(0) = 0$  (8)

境界値問題の強形式と弱形式

式(7)を部分積分、式(8)を適用。

$$\int_0^1 u_{,x} w_{,x} \, dx - \int_0^1 w \, dx - w(1) = 0 \quad (9)$$

[強形式]

式(1)～(3)を満たす $u(x)$ を求めなさい。

[弱形式]

式(8)を満たす任意の関数 $w(x)$ に関して式(9)を成立させ、かつ式(2)を満たす $u(x)$ を求めなさい。

境界値問題の強形式と弱形式

[強形式]

$$u_{,xx} + 1 = 0 \quad (0 < x < 1) \quad (1)$$

[弱形式]

$$\int_0^1 u_{,x} w_{,x} \, dx - \int_0^1 w \, dx - w(1) = 0 \quad (9)$$

### 境界条件

[弱形式]

式(8)を満たす任意の関数 $w(x)$ に関して式(9)を成立させ、かつ式(2)を満たす $u(x)$ を求めなさい。

式(2): 基本境界条件—この境界で $w(x)=0$

式(3): 自然境界条件

### 重み付き残差法による解法

#### ① 試行関数の設定

$$u(x) = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j(x) + \sum_{j=m+1}^n \bar{a}_j \phi_j(x) \quad (10)$$

ここに、

$a_j$ : 未知定数

$\bar{a}_j$ : 既知定数

$\phi_j$ : 既知関数(基底関数)

### 重み付き残差法による解法

② 式(10)を式(9)に代入。 $a_j$ を未知数とする連立一次方程式を導く。

③ 連立一次方程式を解いて $a_j$ を求めれば近似解を得る。

### 重み関数 $w(x)$

ガラーキン法

$$w(x) = \sum_{j=1}^m b_j \phi_j(x) \quad (11)$$

ここに、

$b_j$ : 任意定数

試行関数と基底関数が同じ

### 重み付き残差法による解法例 1

試行関数:

$$u(x) = a_1 x + 1 \quad (12)$$

ガラーキン法:

$$w(x) = b_1 x \quad (13)$$

確認

基本境界条件(式(2))を満足:  $u(0) = -1$

式(8)を満足:  $w(0) = 0$

### 重み付き残差法による解法例 1

これらの式を式(9)に代入。

$$b_1 \left( a_1 - \frac{3}{2} \right) = 0$$

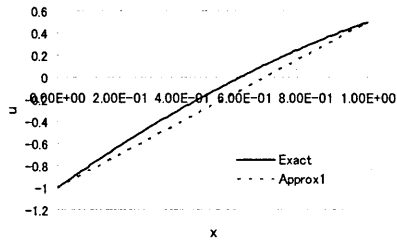
$b_1$ が任意であることから

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

よって

$$u(x) = \frac{3}{2}x - 1 \quad (14)$$

重み付き残差法による解法例 1



重み付き残差法による解法例 2

試行関数:

$$u(x) = a_1 x^2 + a_2 x - 1 \quad (15)$$

ガラーキン法:

$$w(x) = b_1 x^2 + b_2 x \quad (16)$$

確認

基本境界条件(式(2))を満足:  $u(0) = -1$

式(8)を満足:  $w(0) = 0$

重み付き残差法による解法例 2

これらの式を式(9)に代入.

$$[b_1 \quad b_2] \left( \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right) = 0$$

$b_1, b_2$ が任意であることから

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

重み付き残差法による解法例 2

式(17)を解いて次を得る.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

よって

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \quad (18)$$

式(17)の係数行列: 対称 ← ガラーキン法

有限要素法

重み付き残差法

解析領域を部分領域(要素)に分割

各要素内で試行関数を定義

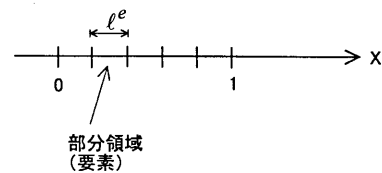
各要素内で積分

$$G = \sum_e G^e - w(1) = 0 \quad (19)$$

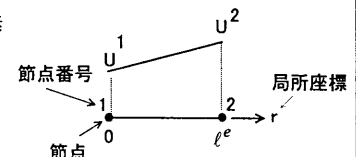
ここに

$$G^e = \int_{\ell^e} u_{,x} w_{,x} dx - \int_{\ell^e} w dx \quad (20)$$

有限要素法



要素の例: 1次要素



有限要素法: 1次要素

$$u(r) = \frac{\ell^e - r}{\ell^e} U^1 + \frac{r}{\ell^e} U^2 \quad (21)$$

ここに,  
 $U^1, U^2$ : 未知定数(節点値) \*

$\frac{\ell^e - r}{\ell^e}, \frac{r}{\ell^e}$ : 基底関数(形状関数)

\*: 基本境界条件を満たすために, 一部の節点値は既知

有限要素法による解法

解析手順

- 1) 要素の選択, 要素分割
- 2) 式(20)の積分
- 3) 式(19)により有限要素方程式(連立1次方程式)の構築
- 4) 有限要素方程式を解いて節点値

有限要素法による解法例

1) 要素の選択, 要素分割

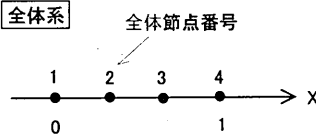
長さの等しい一次要素3個で解析 ( $\ell^e = 1/3$ )

$$u(r) = (1-3r)U^1 + 3rU^2$$

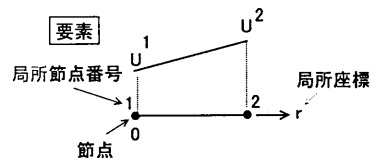
$$w(r) = (1-3r)W^1 + 3rW^2$$

有限要素法による解法例

全体系



要素



有限要素法による解法例

2) 式(20)の積分

要素①:

$$u_{,x} = u_{,r} \frac{dr}{dx} = u_{,r} = -3U^1 + 3U^2$$

$$w_{,x} = w_{,r} \frac{dr}{dx} = w_{,r} = -3W^1 + 3W^2$$

$$G^1 = \int_0^{1/3} (-3U^1 + 3U^2)(-3W^1 + 3W^2) dx - \int_0^{1/3} \{(1-3r)W^1 + 3rW^2\} dx$$

$$= [W^1 \quad W^2] \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

有限要素法による解法例

要素②:

$$G^2 = [W^2 \quad W^3] \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^2 \\ U^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

要素③:

$$G^3 = [W^3 \quad W^4] \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^3 \\ U^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

有限要素法による解法例

3) 式(19)により有限要素方程式(連立1次方程式)の構築

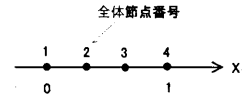
$$G = G^1 + G^2 + G^3$$

$$= \begin{bmatrix} W^1 & W^2 & W^3 & W^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix} = 0$$

有限要素法による解法例

$$u(0) = -1 \rightarrow U^1 = -1$$

$$w(0) = 0 \rightarrow W^1 = 0$$



$$G = \begin{bmatrix} W^2 & W^3 & W^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix} = 0$$

有限要素法による解法例

$W^2 \sim W^4$ が任意であることから, 次式を得る:

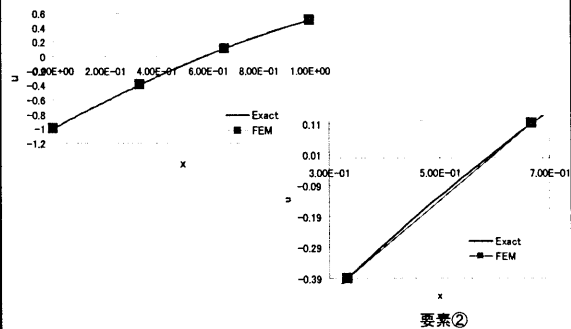
$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

有限要素法による解法例

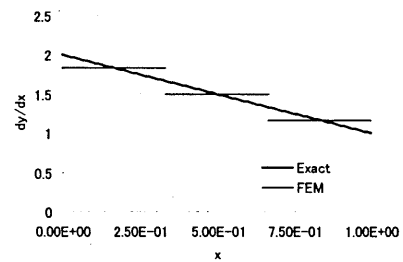
4) 有限要素方程式を解いて節点値

$$\begin{bmatrix} U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{18} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

有限要素法による解析結果  $u$



有限要素法による解析結果  $du/dx$



弾性体の解析

[強形式]

式(22)~(24)を満たす変位 $u_i$ を求めなさい。ただし、 $\sigma_i$ は式(25)、(26)により、 $u_i$ と結びつけられる

$$\sigma_{i,j} + X_i = 0 \quad \text{in } V \quad (22)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{on } S_\sigma \quad (23)$$

$$\bar{u}_i = u_i \quad \text{on } S_u \quad (24)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (25)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (26)$$

弾性体の解析

近似解:(22),(23)には残差:(24)は満たす

任意の重み関数 $w_i$ ; ただし、 $w_i = 0$  on  $S_u$  (27)

$$\int_V (\sigma_{i,j} + X_i) w_i dv + \int_{S_\sigma} (t_i - \sigma_{ij} n_j) w_i ds = 0$$

$$\downarrow \text{ガウスの定理} \quad \int_V f_{i,j} dv = \int_S f_i n_j ds$$

$$\int_V \sigma_{ij} w_{i,j} dv = \int_V X_i w_i dv + \int_{S_\sigma} t_i w_i ds \quad (28)$$

弾性体の解析

[弱形式]

式(27)を満たす任意の重み関数 $w_i$ に対して式(28)を成立させ、かつ式(24)を満足する変位 $u_i$ を求めなさい。ただし、 $\sigma_i$ は式(25)、(26)により、 $u_i$ と結びつけられる。

$$\sigma_{i,j} + X_i = 0$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (23) \quad \text{自然境界条件}$$

$$\bar{u}_i = u_i \quad (24) \quad \text{基本境界条件}$$

弾性体の解析: 仮想仕事式

$$\delta u_i = w_i$$

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$$

式(28)→

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_V X_i \delta u_i dv + \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i ds$$

仮想仕事式

$$\delta u_i : \text{仮想変位} \quad \delta \varepsilon_{ij} : \text{仮想ひずみ}$$

弾性体の有限要素解析(FEA)

式(24),(25)→式(28)

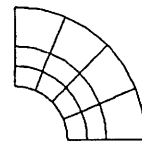
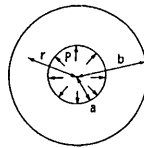
$$G = \int_V C_{ijkl} w_{i,j} u_{k,l} dv - \int_V X_i w_i dv - \int_{S_\sigma} t_i w_i ds = 0 \quad (29)$$

要素ごとに計算

$$G = \sum_e G^e = 0 \quad (30)$$

$$G^e = \int_{V^e} C_{ijkl} w_{i,j} u_{k,l} dv - \int_{V^e} X_i w_i dv - \int_{S_\sigma^e} t_i w_i ds \quad (31)$$

弾性体の有限要素解析(FEA)

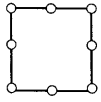


試行関数:  $u_i = \sum_{a=1}^M N^a U_i^a$   $U_i^a$ : 節点変位 ( $S_u$ 上では既知)  
 $N^a$ : 形状関数 (基底関数)

ガラーキン法:  $w_i = \sum_{a=1}^M N^a W_i^a$   $W_i^a$ : 節点重み値 ( $S_u$ 上では0)

8節点四角要素による平面応力解析

平面応力



$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

8節点四角要素

ひずみの算出

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{a=1}^8 N_{,x}^a U_x^a \\ \sum_{a=1}^8 N_{,y}^a U_y^a \\ \sum_{a=1}^8 (N_{,y}^a U_x^a + N_{,x}^a U_y^a) \end{bmatrix}$$

8節点四角要素による平面応力解析

$$G^e = W^e T (K^e U^e - F^e)$$

$K^e$ : 要素剛性マトリクス

$U^e$ : 要素節点変位ベクトル

$F^e$ : 要素等価節点力ベクトル

$B$ : ひずみ-節点変位マトリクス

$D$ : 応力-ひずみマトリクス

8節点四角要素による平面応力解析

$$W^e = [W_x^1 \ W_y^1 \ W_x^2 \ W_y^2 \ \dots \ W_x^8 \ W_y^8]^T$$

$$K^e = \int_{V^e} B^e D B^e dv$$

$$U^e = [U_x^1 \ U_y^1 \ U_x^2 \ U_y^2 \ \dots \ U_x^8 \ U_y^8]^T$$

$$F^e = \int_{V^e} N^T X dv + \int_{S_c^e} N^T T ds$$

8節点四角要素による平面応力解析

$$B = \begin{bmatrix} N_{,x}^1 & 0 & N_{,x}^2 & 0 & \dots & N_{,x}^8 & 0 \\ 0 & N_{,y}^1 & 0 & N_{,y}^2 & \dots & 0 & N_{,y}^8 \\ N_{,y}^1 & N_{,x}^1 & N_{,y}^2 & N_{,x}^2 & \dots & N_{,y}^8 & N_{,x}^8 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & N^2 & 0 & \dots & N^8 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & N^2 & \dots & 0 & N^8 \end{bmatrix}$$

$$X = [X_x \ X_y] \quad T = [T_x \ T_y]$$

有限要素解析の手順

- 1) 要素の選択, 要素分割
- 2) 計算式(31)の積分
- 3) 式(30)により有限要素方程式(連立1次方程式)の構築
- 4) 有限要素方程式を解いて節点変位
- 5) 応力算定

$$G^e \rightarrow G = \sum_e G^e = 0 \rightarrow KU = F$$

$K$ : 剛性マトリクス  
 $U$ : 節点変位ベクトル  
 $F$ : 等価節点力ベクトル

有限要素解析: 有限要素方程式の解法

$$KU = F$$

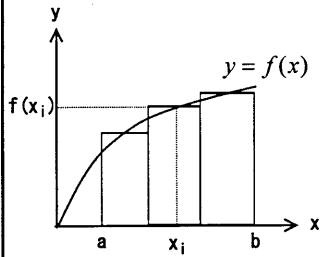
有限要素方程式の解法: 多大な計算時間  
 多くの工夫

$$U = K^{-1}F$$

逆行列よさうなら  
 伊理, 藤野: 数値計算の常識, 共立出版(1985)



有限要素解析: 数値積分



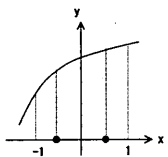
$$I = \int_a^b y dx = \sum_{i=1}^n W_i f(x_i)$$

有限要素解析: ガウスの積分公式

$n$	$r_i$	$w_i$
1	0	2
2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$	1 1
.	.	.
.	.	.
.	.	.

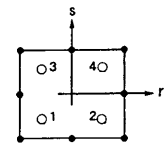
$n$ 点積分公式  
( $2n-1$ )次多項式まで  
厳密解

有限要素解析: ガウスの積分公式



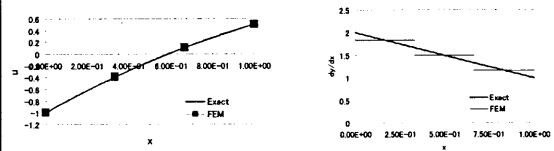
$$\int_{-1}^1 r^2 dr = \sum_{i=1}^2 W_i f(r_i) = W_1 f(r_1) + W_2 f(r_2)$$

$$= 1 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$



$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r^2 s^2 dr ds = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j f(r_i, s_j) = \frac{4}{9}$$

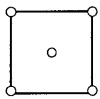
有限要素解析の精度



精度の良い点  
変位: 節点あるいはその近傍  
応力(ひずみ): 要素内部

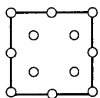
(参考)  
山口: 有限要素法の基礎と地盤工学への応用 3. 一次元問題の有限要素解析, 地盤工学会「土と基礎」, Vol.49, No.5, Sr.No.520, pp.39-44, 2001年.  
山口: 有限要素法の基礎と地盤工学への応用 4. 多次元問題の有限要素解析, 地盤工学会「土と基礎」, Vol.49, No.6, Sr.No.521, pp.41-46, 2001年.

有限要素解析の精度: 応力算定最適点



ガウスの積分点(1x1積分公式)

4節点四角形アイソパラメトリック要素



ガウスの積分点(2x2積分公式)

8節点四角形アイソパラメトリック要素

(参考)  
Barlow, J.: Optimal stress locations in finite element models, IJNME, Vol.10, pp.243-251, 1976

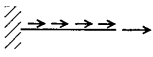
有限要素解析の精度: 応力算定

精度の良い点での応力を用いて補間  
応力プロジェクション法  
単純補間法

(参考)  
山口他: 有限要素解析における応力算定法に関する一研究, 構造工学論文集, Vol.44A, 土木学会, pp.21-28, 1998年.

### 有限要素解析の精度

最大誤差の上限値  
 変位：要素の大きさの2乗に比例  
 応力(ひずみ)：要素の大きさに比例


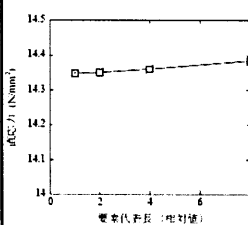


要素数	要素長	変位の最大誤差	ひずみの最大誤差
1	1.0	0.125	0.5
2	0.5	0.03125	0.25
3	0.333	0.01389	0.1667

(参考)  
 山口:有限要素法の基礎と地盤工学への応用 3. 一次問題の有限要素解析, 地盤工学会「土と基礎」, Vol.49, No.5, Sr.No.520, pp.39-44, 2001年.

### 有限要素解析の精度

	幅方向	ウエブ高さ方向	軸方向
N1	4	16	400
N2	8	32	800
N3	16	64	1600
N4	32	128	3200

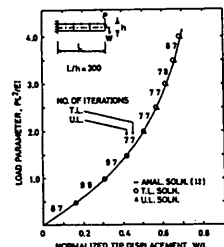
Multimesh Extrapolation法

(参考)  
 Cook R.D. et al.: Concepts and applications of finite element analysis, 3rd Edition, John Wiley & Sons, 1989  
 山口他:鋼桁橋の変形挙動に関する基礎的考察, 構造工学論文集, Vol. 54A, pp.634-641, 2008.

### 非線形有限要素解析

代表的な非線形要因  
 幾何学的非線形: 変形による形状変化が無視できない  
 材料非線形: 応力-ひずみ関係が非線形

$K(U) = F$



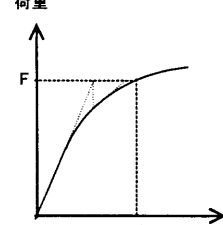
### 非線形有限要素解析：ニュートンラプソン法

非線形化方程式： $K(U) = F$

線形化  
 繰り返し計算

$$K_T(U^{(m)})\Delta U = F - K(U^{(m)})$$

$$U^{(m+1)} = U^{(m)} + \Delta U$$

$$K_T = \frac{\partial K}{\partial U}$$


### ニュートンラプソン法

$$U^4 + 2U^3 = 2$$

$$U = ?$$

$$K(U) = F$$

ここに,

$$K(U) = U^4 + 2U^3$$

$$F = 2$$

### ニュートンラプソン法

$$K_T(U^{(m)})\Delta U = F - K(U^{(m)})$$

ここに,

$$K_T(U) = \frac{dK(U)}{dU} = 4U^3 + 6U^2$$

$$U^{(m+1)} = U^{(m)} + \Delta U$$

$$= U^{(m)} + \frac{2 - (U^{(m)})^4 + 2(U^{(m)})^3}{4(U^{(m)})^3 + 6(U^{(m)})^2}$$

ニュートンラプソン法

$$U^4 + 2U^3 = 2$$

$$U = ?$$

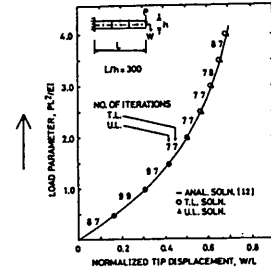
m	U(m)
0	1 (初期値)
1	0.9
2	0.8853266
3	0.8850336
4	0.8850335
5	0.8850335

非線形有限要素解析：つり合い経路

荷重制御

荷重係数  $f$  を与え、  
変位を求め

$$K(U) = f F$$

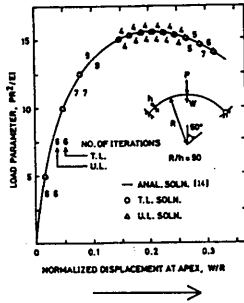


非線形有限要素解析：つり合い経路

変位制御

変位を与え、荷重係数  $f$  と  
残りの変位を求め

$$K(U) = f F$$



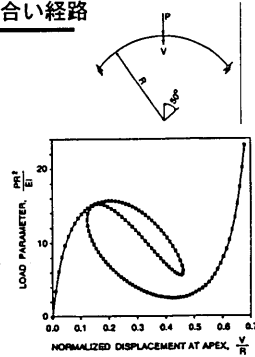
非線形有限要素解析：つり合い経路

弧長制御

収束点(解)と収束点(解)の  
距離を指定(制御)  
荷重係数  $f$  と変位  $U$  を求め

$$K(U) = f F$$

$$(\Delta S_{(p+1)})^2 = \sum (\alpha_i)^2 (U_i - U_{i(p)})^2 + \sum (\alpha_f)^2 (f - f_{(p)})^2$$



(参考)  
山口池: スカイライン法を用いた弧長法について, 構造工学論文集, Vol.39A, 土木学会, pp.333-342, 1993年.

まとめ

有限要素法とは、有限要素法の基礎

- 境界値問題の近似解法
- 重み付き残差法
- 小領域(要素)ごとに試行関数
- 変位は節点あるいはその近傍で精度がよい
- 応力(ひずみ)は要素内部で精度がよい
- 変位の誤差は要素の大きさの2乗に比例
- 応力(ひずみ)の誤差は要素の大きさに比例

非線形解析

- ニュートンラプソン法
- 荷重制御
- 変位制御
- 弧長制御

課題：鋼橋設計への適用

- 解析モデルの構築
- 要素分割
- 局所応力
- ...

(参考)  
3次元FEM解析の鋼橋設計への適用に関する研究小委員会報告書, 土木学会鋼構造委員会, 2007.