

## 木材梁の曲げ載荷方法とせん断弾性係数の推定精度について

### Bending test methods and estimation accuracy of shear modulus for wood beams

○大黒屋信英\*・後藤 文彦\*\*・千田 知弘\*\*\*・薄木 征三\*\*\*\*

DAIKOKUYA Masahide GOTOU Humihiko, CHIDA Tomohiro and USUKI Seizo

\*秋田大学博士前期課程，土木環境工学専攻（〒010-8502 秋田県秋田市手形学園町 1-1）

\*\*博（工） 秋田大学助教，工学資源学部土木環境工学科

\*\*\*秋田大学博士後期課程，生産・建設工学専攻

\*\*\*\*工博 秋田大学教授，工学資源学部土木環境工学科

**ABSTRACT** ASTM(D198) propose the method to estimate the shear modulus using shear coefficient  $k$  by bending tests of wood beams. The value of  $k$  is determined by only Poisson's ratio for isotropic materials. It is not suitable to use the coefficient  $k$  for woods which can be modeled as orthotropic materials. In this study we model the wood beams as orthotropic materials by FEM solid elements and try to back-calculate the shear coefficient from the relation between load and deflection. We compare three point bending to five point bending models and discuss how much shear deformations influence the accuracy.

**Keywords** : 集成材, せん断弾性係数, せん断補正係数, 有限要素法, *CalculiX glulam*, *shear modulus*, *shear coefficient*, *FEM*, *CalculiX*

#### 1. はじめに

近頃、環境や景観への配慮など様々な面から木橋が見直されてきており、全国各地に架設されてきている。そのなかで、集成材と鋼材を用いたハイブリッド型の道路橋も多くあることは良く知られている。集成材は製材に比べて強度のばらつきが少ないので従来より適用範囲も広がってきている。しかし、集成材は曲げ剛性に比べてせん断剛性が低く、せん断変形が非常に大きい材料である点に注意が必要である。特に集成材梁に鋼板を挿入して補強したりすると、曲げ剛性は大きく改善されるが、せん断剛性はそれほど改善されないため、ハイブリッド化することによって集成材のみの場合よりもせん断変形の影響が大きくなることもある。このため、木橋の性能評価においてはせん断変形の影響を考慮することが重要であり、木部材のせん断弾性係数を正確に測定することが求められる。

せん断弾性係数を直接的に測定する一つの方法はねじり試験であるが、ねじり試験は装置が複雑になるなどの難点があるのもさることながら、ねじり試験によって測定されるせん断弾性係数は、梁断面のせん断変形に対するものであって、曲げ面内または曲げ面外のせん断変形に対するせん断弾性係数ではない。そこでアメリカ材料試験協会 (ASTM D198)<sup>1)</sup>の基準では木材梁の曲げ試験より求まる荷重とたわみの関係をティモシェンコ梁の式<sup>2)</sup>に適用することで、曲げ面内のせん断変形に対するせん断弾性係数  $G$  を推定する方法を提案している。その際、せん断補正係数  $k$  として等方性材料に対する値 (ポアソン比が 0 なら  $\frac{5}{6}$ ) を用いてよいとされているが、集成材は直交異方性材料に近い材料なので等方性材料に対する  $k$  を用いるのは正確ではない。とはいえ、直交異方性材料に対する  $k$  を 3次元弾性論から解析的に導くのは容易ではない。

そこで、文献<sup>3),4)</sup>では集成材を直交異方性材料として有限要素モデル化し、曲げ試験の数値シミュレーションから得られる荷重とたわみの関係をティモシェンコ梁の式<sup>2)</sup>に代入することで  $k$  を逆算す

ることを試みているが、十分な精度の逆算に成功しているとは言い難い。この逆算手法は、有限要素解析によるたわみと初等梁理論によるたわみとの差を利用するが、せん断変形が十分に大きくないと桁落ちが生じて誤差が大きくなってしまふ。文献<sup>3),4)</sup>では3点曲げ試験の数値シミュレーションを行っているが、本研究では、せん断変形の影響がより大きく出る5点曲げ試験を数値シミュレートすることで、逆算精度が高くなることを確かめる(この予備研究の一部は文献<sup>5)</sup>に示してある)。また、文献<sup>3),4)</sup>で用いた直方体要素はMelosh<sup>6)</sup>(1963)による要素であるが、本研究ではGPLライセンスの有限要素解析ツールCalculiX<sup>7)</sup>のアイソパラメトリック要素を用いてみる。

こうして $k$ を逆算すると、実際には梁の軸長に依存して値が変化するが、それを平均化した $k$ を用いてASTMの方法で有限要素解析の荷重とたわみの関係からせん断弾性係数 $G$ を推定すると、有限要素モデルの $G$ をどの程度の精度で推定できるかを最後に考察する。

## 2. 解析手法

### 2.1 解析モデル

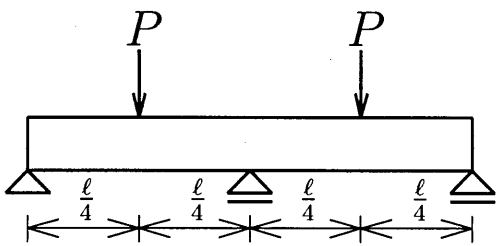


図-1 5点曲げ

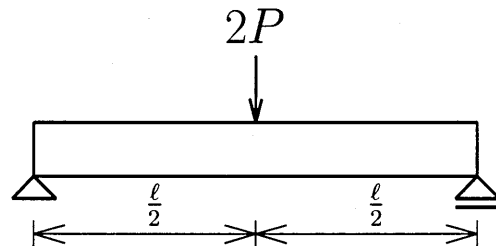


図-2 3点曲げ

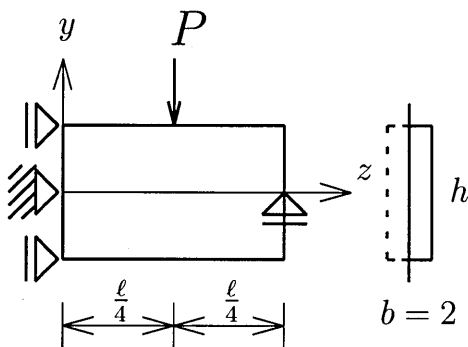


図-3 5点曲げの解析モデル

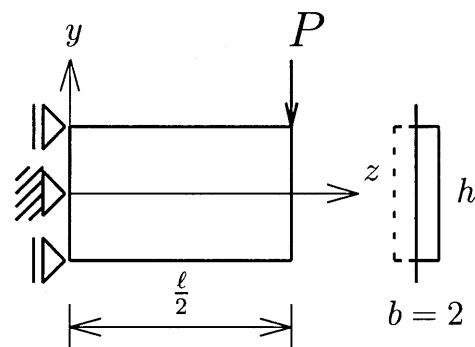


図-4 3点曲げの解析モデル

解析モデルは、図-1に示すような5点曲げ荷重の梁については対称条件から図-3のような右半分の更に奥の半分だけ分離した $\frac{1}{4}$ 解析モデルとし、図-2に示すような3点曲げ荷重の梁については対称条件から図-4のように左半分の更に奥の半分だけ分離して上下を回転させた $\frac{1}{4}$ 解析モデルとする。

### 2.2 境界条件

全体構造の左右対称面を固定端とみなすと、図-5のように固定端側の断面の図心を原点とし、幅方向に $x$ 軸、桁高方向に $y$ 軸、軸長方向に $z$ 軸をとる。前節で述べたように対称性を利用して $yz$ 面で切断された半分( $b/2$ )つまり全体構造の $\frac{1}{4}$ を解析対象とする。境界条件は、3点曲げにおいては、全体構造の左右対称面となる固定端断面( $xy$ 断面)上の節点の $z$ 方向変位と中立軸の $y$ 方向変位を拘束、全体構造の奥の対称面( $yz$ 面)上の節点の $x$ 方向変位を拘束する。5点曲げでは、さらに右端部の中立軸の $y$ 方向変位を拘束する。荷重荷重方法は、文献<sup>8)</sup>を参考に各節点に分散させて面荷重している。

### 2.3 材料定数の設定

解析に用いる材料諸元を以下に示す.  $x, y, z$  方向の圧縮・引張に対するヤング率はそれぞれ,  $E_{zz} = 10\text{GPa}$ ,  $E_{xx} = E_{yy} = 0.4\text{GPa}$ ,  $xy$  面,  $xz$  面,  $yz$  面のせん断変形に対するせん断弾性係数はそれぞれ,  $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 0.7\text{GPa}$ ,  $x$  方向の単軸圧縮・引張に対し,  $\nu_{zx} = -\frac{E_x \epsilon_x}{E_z \epsilon_z}$ ,  $\nu_{yx} = -\frac{E_y \epsilon_y}{E_x \epsilon_x}$  で定義されるポアソン比は,  $\nu_{zx} = 0.4$ ,  $\nu_{yx} = 0.016$ ,  $y$  方向の単軸圧縮・引張に対し,  $\nu_{xy} = -\frac{E_x \epsilon_x}{E_y \epsilon_y}$ ,  $\nu_{zy} = -\frac{E_z \epsilon_z}{E_y \epsilon_y}$  で定義されるポアソン比は,  $\nu_{xy} = 0.016$ ,  $\nu_{zy} = 0.4$ ,  $z$  方向の単軸圧縮・引張に対し, それぞれ  $\nu_{xz} = -\frac{E_x \epsilon_x}{E_z \epsilon_z}$ ,  $\nu_{yz} = -\frac{E_y \epsilon_y}{E_z \epsilon_z}$  で定義されるポアソン比は,  $\nu_{xz} = 0.016$ ,  $\nu_{yz} = 0.016$  である. また集成材は異等級構成断面であり, ラミナごとに異なる材料特性を有しているが, 本研究では, これを平均化した直交異方性材料として材料定数を設定している.

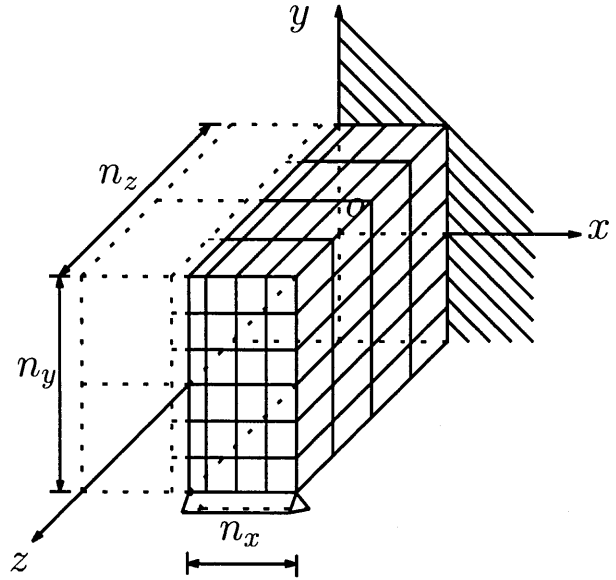


図-5 解析モデル

### 2.4 たわみの収束性

5点曲げ载荷において, 幅  $b = 2\text{cm}$ , 桁高  $h = 2\text{cm}$ , 軸長  $l = 40\text{cm}$  の梁と, 幅  $b = 2\text{cm}$ , 桁高  $h = 20\text{cm}$ , 軸長  $l = 400\text{cm}$  の梁について, 幅方向 ( $n_x$ ), 桁高方向 ( $n_y$ ), 軸方向 ( $n_z$ ) の要素分割数を変化させて, 荷重  $P = 2\text{MN}$  で5点曲げ载荷で計算した载荷点の断面図心でのたわみを表-1, 2に示す. いずれの梁の場合も, 幅方向の要素分割数は2か3でも有効数字3桁程度の精度が得られるが, 桁高方向や特に軸方向は十分な要素分割数を取らないと有効数字3桁以上の精度が得られない. 本論文での以降の計算は, 有効数字3桁程度の精度が得られる要素分割数として, 幅方向 ( $n_x = 5$ ), 桁高方向 ( $n_y = 20$ ), 軸方向 ( $n_z = 100$ ) を用いる.

## 3. 計算結果

### 3.1 ティモシェンコ梁理論

ティモシェンコ梁理論による载荷点における梁のたわみは, 5点曲げ载荷の場合図-3は次式で与えられる.

$$v_{t5} = \frac{7P\ell^3}{768EI} + \frac{73P\ell}{256GkA} \quad (1)$$

表-1 たわみの収束性 (2cm × 2cm × 40cm)

分割数 $n_x, \frac{n_y}{2}, \frac{n_z}{10}$	たわみ $v$ ( $\times 10^{-3}$ m)		
	$n_x \times 20 \times 100$	$5 \times n_y \times 100$	$5 \times 20 \times n_z$
1		9.58186	7.57345
2	9.75436	9.70014	9.09641
3	9.76225	9.73432	9.45630
4	9.76523	9.74855	9.59379
5	9.76664	9.75584	9.66175
6		9.76006	9.70108
7		9.76272	9.72638
8		9.76449	9.74393
9		9.76574	9.75679
10		9.76664	9.76664

表-2 たわみの収束性 (2cm × 20cm × 400cm)

分割数 $n_x, \frac{n_y}{2}, \frac{n_z}{10}$	たわみ $v$ ( $\times 10^{-3}$ m)		
	$n_x \times 20 \times 100$	$5 \times n_y \times 100$	$5 \times 20 \times n_z$
1		9.59106	7.57925
2	9.77531	9.70910	9.10378
3	9.77544	9.74325	9.46412
4	9.77549	9.75745	9.60185
5	9.77551	9.76473	9.66999
6		9.76894	9.70947
7		9.77159	9.73490
8		9.77336	9.75257
9		9.77460	9.76555
10		9.77551	9.77551

また、3点曲げ荷荷の場合図-4は次式で与えられる。

$$v_{t3} = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{GkA} \quad (2)$$

ここで、 $E$ はヤング率、 $I$ は断面2次モーメント、 $G$ はせん断弾性係数、 $A$ は断面積である。なお、式-1と式-2の右辺第一項は曲げによるたわみであり、第二項はせん断変形によるたわみである。つまり右辺第二項を無視すると、せん断変形の影響を含まない初等梁理論のたわみとなる。式-1の第2項/第1項の比は、 $31.3 \frac{EI}{GkAl^2}$ となるのに対して、式-2の第2項/第1項の比は、 $3 \frac{EI}{GkAl^2}$ であるから、5点曲げ荷荷の方が3点曲げ荷荷よりも10倍もせん断変形の影響が大きいことがわかる。なお、Cowper<sup>9)</sup>は3次元弾性論から、等方性材料に対するせん断補正係数として次式を導いている。

$$k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (3)$$

上式で $\nu=0$ とすると、 $k=\frac{5}{6}$ を求めることができる。

### 3.2 梁理論との比較

幅  $b = 2\text{cm}$ 、桁高  $h = 2\text{cm}$  の断面の梁の軸長  $l$  を  $2 \sim 40\text{cm}$  の範囲で  $2\text{cm}$  ずつ変化させた場合と、幅  $b = 2\text{cm}$ 、桁高  $h = 20\text{cm}$  の断面の梁の軸長  $l$  を  $20 \sim 400\text{cm}$  の範囲で  $20\text{cm}$  ずつ変化させた場合について、CalculiX のアイソパラメトリック要素を用いて有限要素解析を行い、集成材のたわみ  $v$  を求める。そして、ティモシェンコ梁理論、初等梁理論それぞれのたわみとの比較を行う。有限要素解析によるたわみの初等梁理論によるたわみに対する相対誤差を図-6に示す。 $h = 2\text{cm}$ 、 $20\text{cm}$  の断面もほぼ変わらない値を示している。3点曲げの場合は  $\frac{l}{h}$  が10を越えるとほぼ誤差はなくなり有限要素解と初等梁理論はほぼ一致する。一方、5点曲げは  $\frac{l}{h}$  が10を越えても初等梁理論との誤差は10%~30%程度残っている。つまり、3点曲げに比べてせん断変形の影響が強くていえる。有限要素解析によるたわみのティモシェンコ梁理論によるたわみに対する相対誤差を図-7に示す。なお、 $k = \frac{5}{6}$  とする。ティモシェンコ解と有限要素解を比較すると、特に5点曲げの場合  $\frac{l}{h}$  が小さい太短い梁では、ティモシェンコ梁モデルが成立しないくらい大きなせん断変形を伴うので、ティモシェンコ解と有限要素解の相対誤差が大きくなる。一方、 $\frac{l}{h}$  が大きくなるにつれて、有限要素解とティモシェンコ解との相対誤差は小さくなる。せん断変形の影響の大きい5点曲げの場合でも  $\frac{l}{h} = 10$  を越えれば有限要素解のティモシェンコ解に対する相対誤差は5%以内程度に収まる。

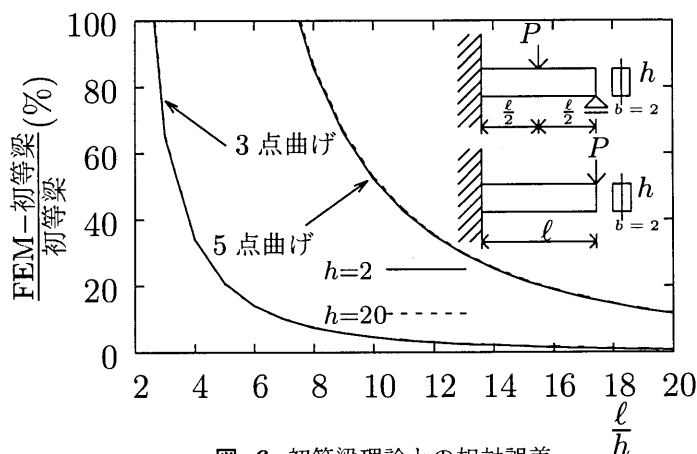


図-6 初等梁理論との相対誤差

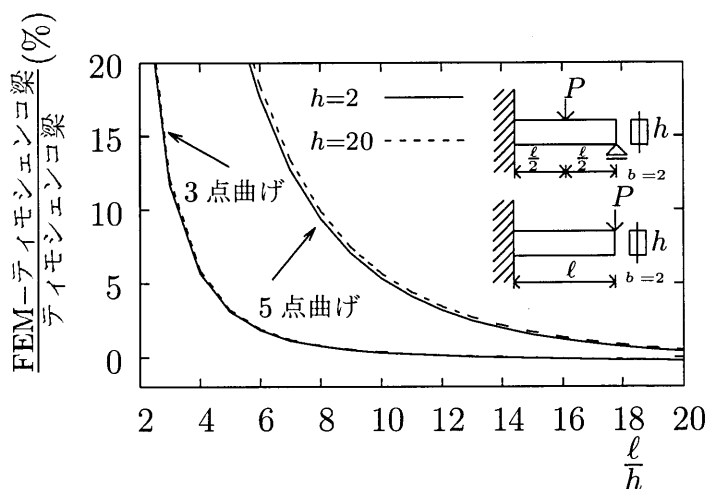


図-7 ティモシェンコ梁理論との相対誤差

### 3.3 kの逆算

前節で有限要素解析による荷重とたわみの関係が得られたので、これらを用いて文献<sup>3)</sup>の方法でせん断補正係数  $k$  を逆算することを試みる。まず、式 (1) を  $k$  について解くと、次式のようになる。

$$k = \frac{73P}{256GA} \cdot \frac{\ell}{v_t - \frac{7P\ell^3}{768EI}} \quad (4)$$

同様に式 (2) を  $k$  について解くと、次式のようになる。

$$k = \frac{P}{GA} \cdot \frac{\ell}{v_t - \frac{P\ell^3}{3EI}} \quad (5)$$

これらの式に、有限要素解析から得られる荷重  $P$  とたわみ  $v$  を式 (4)、式 (5) に代入し、 $k$  を逆算した場合について図-8 に示す。

5点曲げも3点曲げ両方において、 $\frac{\ell}{h} < 4$  と、梁が極端に太短い場合は、ティモシェンコ梁モデルも成立しなくなるような変形が生じて逆算精度が落ち、 $k$  の値が小さく出ていると思われる。一方、 $\frac{\ell}{h}$  が大きくなり細長い梁になるほど、せん断変形は小さくなり、式 (4)、式 (5) 第二項分母における有限要素解析のたわみ  $v$  と初等梁のたわみ  $\frac{7P\ell^3}{768EI}$  との値が近付いていき、桁落ちなどによる誤差が大きくなっていくために  $k$  の値の増加率が大きくなっていくと考えられる。3点曲げではこの影響が顕著に表れているが、せん断変形の大きい5点曲げでは  $k$  の増加率は特に大きくなっていない。つまり、3点曲げのデータは、梁が太短い場合にも細長い場合にも誤差が大きくなりやすく、 $k$  の逆算には適さないようだ。一方、5点曲げの場合は、ティモシェンコ梁モデルが成立しないくらいに梁が太短い場合には、3点曲げと同様に誤差が大きくなっていくようだが、梁が細長くなっても、桁落ちによる誤差はそれほど現れていないようである。そこで、5点曲げの  $k$  が比較的なだらかな分布を示す  $\frac{\ell}{h} = 10 \sim 20$  の間の  $k$  の平均値  $0.7595 (h = 2\text{cm})$ ,  $0.7529 (h = 20\text{cm})$  を次項の計算に用いる。

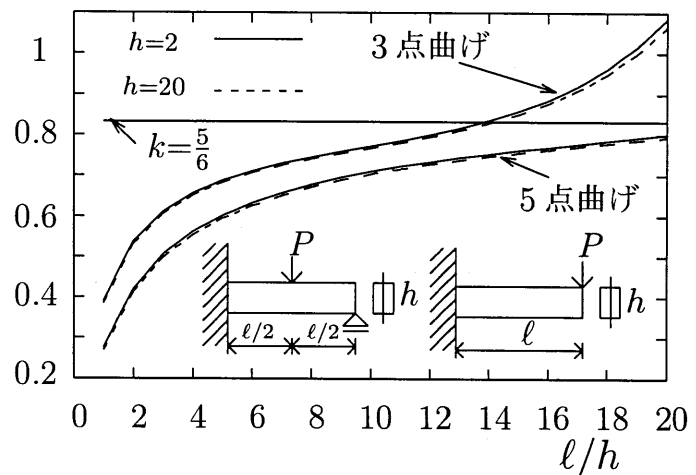


図-8 kの逆算

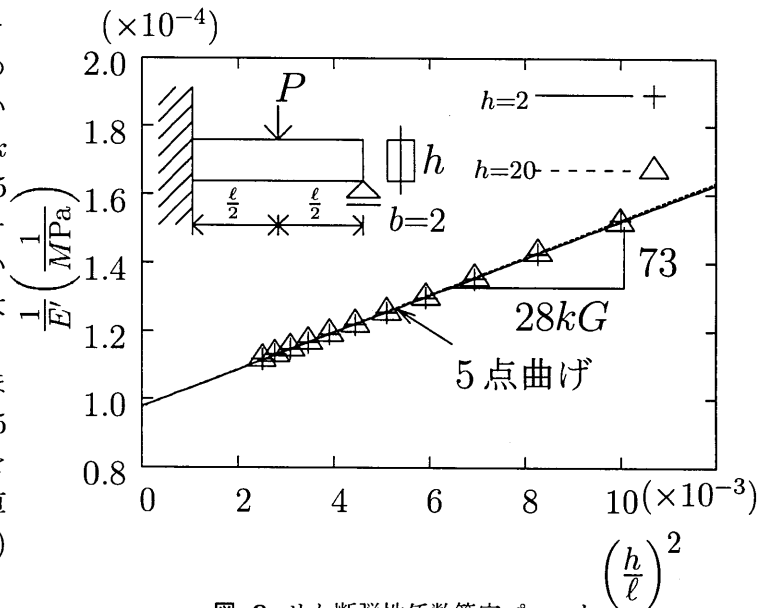


図-9 せん断弾性係数算定プロット

### 3.4 ASTMの方法による E, G の推定

前節で有限要素解析から逆算された  $k$  の値と  $k = \frac{5}{6}$  の値とを用いて、5点曲げの有限要素解析から得られる荷重とたわみの関係から有限要素モデルの  $G$  と  $E$  を推定してみる。式 (1) の第2項を無視

して、荷重とたわみの関係から求まる(せん断変形の影響が含まれている)見かけ上のヤング率(曲げヤング率)を  $E' = \frac{7Pl^3}{768Iv}$  とおくと、式(1)は、次式のようになる。

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{73}{28kG} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 \quad (6)$$

有限要素解析から得られる曲げヤング率、式-6で示すような  $\frac{1}{E'}$  と  $\left(\frac{h}{\ell}\right)^2$  の関係をプロットし、回帰直線を描いたものを図-9に示す。そして、この回帰曲線の切片と傾きから  $E$  と  $G(k=\frac{5}{6})$  を推定する。 $h = 2\text{cm}$ ,  $h = 20\text{cm}$  のそれぞれの場合について、せん断弾性係数は  $G = 576\text{MPa}(-17.7\%)$ ,  $570\text{MPa}(-18.6\%)$ , ヤング率は  $E = 10.23\text{GPa}(+2.3\%)$ ,  $10.22\text{GPa}(+2.2\%)$  となる。なお括弧内は、有限要素モデルの材料定数  $G = 700\text{MPa}$ ,  $E = 10\text{GPa}$  に対する相対誤差である。ここで  $k$  を、 $\frac{\ell}{h} = 10 \sim 20$  の平均値  $0.7595(h = 2\text{cm})$ ,  $0.7529(h = 20\text{cm})$  を使い  $G$  を逆算すると、 $G = 632\text{MPa}(-9.7\%)$ ,  $631\text{MPa}(-9.9\%)$  となる。 $G$  の推定は、 $k=\frac{5}{6}$  を使うと有限要素モデルの  $G$  より 20% 程度低い  $G$  が推定されてしまうが、有限要素解析から逆算された  $k$  の平均値を使うと有限要素モデルよりも 10% 程度低めに推定されるものの精度がある程度改善される。

#### 4. まとめ

有限要素解析による曲げ試験のシュミレーションにおいては、3点曲げ載荷よりもせん断変形の影響の大きい5点曲げ載荷の方がせん断補正係数  $k$  の逆算精度が高いことが確かめられた。5点曲げ載荷のシュミレーションから ASTM の方法でせん断弾性係数  $G$  を推定したところ、せん断補正係数  $k$  に  $\frac{5}{6}$  を用いた場合には-20%程度、有限要素解析から逆算した  $k$  を用いた場合には-10%程度の誤差で有限要素モデルの  $G$  が推定された。有限要素解析から逆算した  $k$  は、梁の軸長によって値が変化し、全体的に  $\frac{5}{6}$  よりも低めになる。これが直交異方性の影響を適切に反映した結果なのか、あるいは数値解析上の誤差が影響したものなのかについては更なる検討が必要であるが、仮に前者であるとする曲げ試験によるせん断弾性係数  $G$  の推定方法が、実際よりもやや低めの値を推定している可能性も示唆されるので、実験を行って比較することも含めて今後も更に検討していきたい。

#### 参考文献

- 1) American Society for Testing and Materials: Standard test methods of static tests of lumber in structural sizes, ASTM Standards, D198-94, 1994.
- 2) 西野文雄・長谷川彰夫: 構造物の弾性解析, 新体系土木工学 7, 技報堂, 1983.
- 3) 後藤文彦・麓貴行・薄木征三・佐々木貴信: 曲げ試験による木材梁せん断弾性係数推定の精度, 構造工学論文集, Vol.49A, 2003
- 4) GOTOU Humihiko, CHIDA Tomohiro, USUKI Seizo: Estimation of shear modulus by FEM bending simulation of wood beams, WCTE 2006, Conference Proceedings, 9th World Conference on Timber Engineering, 2006 (CD-ROM).
- 5) 大黒屋信英, 後藤文彦, 千田知弘, 薄木征三: 曲げ載荷方法とせん断弾性係数の推定精度について, 平成18年度土木学会東北支部技術研究発表会講演概要集 (CD-ROM), I-34, 2007.
- 6) Melosh, R.J.: Structural analysis of solids, J Structural Div., Proc. ASCE, Vol. 89, No. ST4, pp.205-223, 1963.
- 7) <http://www.calculix.de/>
- 8) 千田知弘・後藤文彦・薄木征三・佐々木貴信: 鋼板挿入集成材梁の有限要素弾塑性解析, 構造工学論文集, Vol.53A, 2007
- 9) Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, J. Appl. Mech., Vol. 33, pp.335-340, 1966