

せん断変形を伴う梁の横ねじれ座屈

Lateral-torsional buckling of beams with shear deformation

○千田 知弘*・後藤 文彦**・平間 匠***・橋本 崇史****・薄木 征三†

CHIDA Tomohiro, GOTOU Humihiko, HIRAMA Takumi, HASHIMOTO Takafumi, USUKI Seizo

*秋田大学大学院 工学資源学研究科 (〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1)

**博 (工) 秋田大学 工学資源学部土木環境工学科

***渋谷建設株式会社 (〒990-2423 山形市東青田一番五号)

****秋田大学大学院 工学資源学研究科 (〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1)

†工博 工学資源学部土木環境工学科

ABSTRACT Glue-laminated wood beams are used in various forms like slender long-span beams with recent progress of hybrid structures utilizing steel plates and so on. In such members lateral-torsional buckling may govern strength. Since shear modulus of glulam beams is very small, we investigate influences of shearing deformation on the buckling. Firstly, we simulate beam bending of wood beams by rectangular solid finite elements and try to back-calculate the shear coefficient of the beams from the relation between load and deflection. Secondary we analyze lateral-torsional buckling of glulam beams utilizing a large-displacement finite beam element formulation with Timoshenko's beam theory. We show some numerical examples and discuss influences of shearing deformation on lateral-torsional buckling.

Keywords : 集成材, 横ねじれ座屈, せん断補正係数

glue-laminated wood beams, lateral-torsional buckling, shear coefficient

1. はじめに

近年, 集成材を鋼板や PC 鋼棒などで補強したハイブリッド型の道路橋なども作られるようになってきており, 集成材が比較のスレンダーで長スパンの部材としても用いられる機会が増えてきた. 集成材梁の軸まわりのねじれ変形に対するせん断弾性係数は面外曲げヤング率の $1/10 \sim 1/15$ 程度^{1),2),3),4)}であり, (等方性材料と見なした場合のヤング率の大きさから予想されるよりは) ねじれ剛性がかなり小さいので, 集成材梁は横ねじれ座屈の危険性の高い部材とみなすこともできる. 更に, 集成材梁では, 面内曲げや面外曲げのせん断変形に対するせん断弾性係数も, 同程度に小さく (面外曲げヤング率の $1/12 \sim 1/16$ 程度⁵⁾), 曲げを受けた場合のせん断変形の影響が大きい. 横ねじれ座屈は細長い部材に生じるので, 一般にせん断変形の影響は小さいと考えられるが, せん断弾性係数の小さい集成材梁では, 梁長/桁高が 10 程度のじゅうぶんな細長さでも, たわみにせん断変形の影響が数 % も現れることもあるので⁶⁾, せん断変形が横ねじれ座屈に及ぼす影響を確かめておくことは重要である. 集成材梁や木材梁の横ねじれ座屈に対する実験もいくつか行われているが^{1),5),7),8)}, 座屈前の面内たわみやせん断変形の影響については特に確かめられていない.

本研究では, まず直方体要素の有限要素法を用いた線形曲げ解析により, 集成材梁のせん断変形の程度およびせん断補正係数のオーダーについて考察する. それらの考察に基づいて, 梁要素の弾性有限変位・有限要素モデルを用いて, せん断弾性係数やせん断補正係数を, 等方性材料では想定しない範囲も含め変化させて非線型座屈解析を行い, 集成材のような材料のねじれ剛性やせん断剛性の極端な低さが, 座屈荷重にどのような影響を及ぼすかを確かめる.

2. 直方体要素モデルによる曲げ解析

2.1 せん断補正係数 k

自由端に鉛直荷重を受ける片持ち梁の先端のたわみ v は、ティモシェンコ梁理論では、次式のように表される^{6),9),10)}.

$$v = \frac{P\ell^3}{3EI} + \frac{P\ell}{GkA} \quad (1)$$

ここに P は端部荷重, ℓ は梁の軸長, E はヤング率, I は強軸回りの断面二次モーメント, A は断面積, G はせん断弾性係数, k はせん断補正係数である. 必ずしも式 (1) に対して導かれている訳ではないが, せん断補正係数 k として, 長方形断面の場合, Timoshenko¹¹⁾ は最大せん断応力と平均せん断応力の比から $2/3$ を, 西野と長谷川⁹⁾ はせん断流の分布を考慮してせん断応力による補仮想仕事から $5/6$ を, Cowper¹²⁾ は 3次元弾性論から, 次式を与えている.

$$k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (2)$$

なお, この Cowper の式で, $\nu = 0$ とおくと, $k = 5/6 (\simeq 0.83)$ が得られる. 一般にせん断変形を考慮した長方形断面の梁の曲げ解析では, せん断補正係数の値としてこの $5/6$ (k の逆数をせん断補正係数の定義に用いている場合⁵⁾ は, 1.2) が用いられることが多い. 木材や集成材のようにばらつきのある材料の場合, 異方性やポアソン比の影響が材料のばらつきほど大きくはないと見なせるならば, $k = 5/6$ を便宜的に用いておいて特に問題はないと思うが, ここでは異方性の影響をもう少し考察してみる.

長方形断面の等方性材料であれば, 式 (2) に

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (3)$$

を代入して次式が成り立つ.

$$k = \frac{10E}{11E+2G} \quad (4)$$

$G = E/15$ となるような集成材などの材料は, この G を式 (3) に代入してみれば分かるように, $0 \leq \nu \leq 0.5$ または $0 \leq \nu < 1$ を満たすような等方性材料として扱うことはできない. 等方性材料の場合, 式 (4) の G が E に比べて小さくなるほど, つまり, ν が大きくなるほど k は大きくなる (ν の最大値を 0.5 とすれば, k の最大値は約 0.86 , ν の最大値を 1 とすれば, k の最大値は約 0.87). このことから類推すると, せん断剛性が低くせん断変形の大きい材料ほど, せん断補正係数は大きくなり, 式 (1) の第 2 項の増加に寄与しない (せん断補正係数の小ささよりもせん断弾性係数自体の小ささの方が大きく寄与する) ことが予想される.

2.2 曲げ解析によるせん断補正係数の推定

等方性材料については, Cowper が式 (2) を導いているものの, 集成材を異方性材料と見なしてせん断補正係数を解析的に導くことは難しいので, ここでは集成材を $E = 10\text{GPa}$, $G = 0.7\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ の若干の異方性を有する材料でモデル化し, 8 節点 24 自由度の直方体要素を用いた曲げ解析からせん断補正係数を推定してみる⁶⁾. 梁の断面形状は, 幅 $b \times$ 桁高 h の長方形断面, 梁長は ℓ とする. 図-1 に示すように, 片持ち梁の固定端側の断面の図心を原点とし, 梁軸方向に z 軸, 幅厚方向に x 軸, 桁高方向に y 軸をとる. 曲げを受ける片持ち梁の対称性を考慮し, 図-1 のように, yz 面で二分割された梁の半分を解析対称とする. 幅 $b/2$ の梁の x, y, z 軸方向をそれぞれ, n_x, n_y, n_z 分割する. 文献⁶⁾での精度の考察を参考に, $n_x \times n_y \times n_z$ を $6 \times 10 \times 100$ に要素分割する. 境界条件は, 固定端断面 (xy 面) 上にある節点の z 方向変位

を拘束，固定端 x 軸上にある節点の y 方向変位を拘束，対称面 (yz 面) 上にある節点の x 方向変位を拘束する．荷重は，荷重を自由端面の各節点に等分布に分散させて載荷する．具体的には載荷荷重を P とすると，隣接要素のない節点には $p = \frac{P}{4n_x n_y}$ を，隣接要素が2つある節点には $2p$ を，隣接要素が4つある節点には $4p$ を，それぞれ y 方向に載荷する． $b \times h \times \ell$ が， $5\text{cm} \times 25\text{cm} \times 50\text{cm} \sim 2.5\text{m}$ の梁について， $P = 1000\text{N}$ を載荷し，得られた端部図心のたわみを，式(1)の第2項を無視したたわみ，第2項の k を $5/6$ としたたわみ，第2項の k を式(2)から求めたたわみ，のそれぞれに対する相対誤差で図-2 に示す．

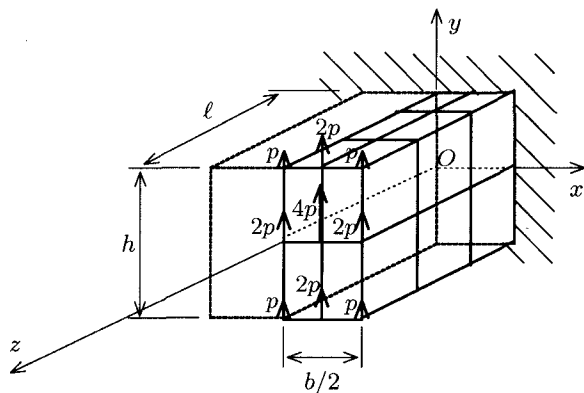


図-1 解析モデル

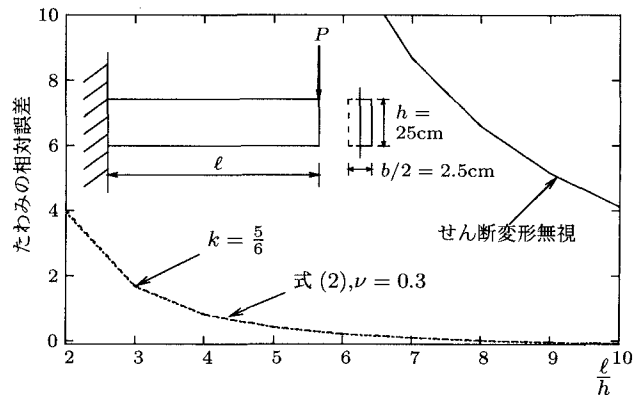


図-2 各種梁理論に対するたわみの相対誤差

G が E の $1/14$ 程度となるこの梁では，せん断変形の影響が非常に大きく，梁の軸長と桁高の比 l/h が 10 程度の梁でも，せん断変形を無視したたわみに対してせん断変形によるたわみが，4% 程度もあることが分かる．式(1)の第2項の k を $5/6$ としたたわみに対する有限要素解の相対誤差は，式(1)の第2項の k を式(2)で求めたたわみに対する相対誤差よりも 0.1% 程度低めになるが，グラフ中では重なって見える．有限要素解は， l/h が 4 以上であれば，式(1)と 1% 以内の誤差に収まる．なお，本有限要素モデルで $\nu = 0$ として，同様の解析を行ってみたが， $\nu = 0.3$ の解析と比べてたわみが約 0.1% 大きくなる程度で，結果はほぼ変わらない．

さて，式(1)を k について解くと次式が得られる．

$$k = \frac{P}{GA} \cdot \frac{\ell}{v - \frac{P\ell^3}{3EI}} \quad (5)$$

有限要素解で得られる荷重とたわみを上式に代入することで，異方性材料であっても数値的にせん断補正係数 k を逆算することができるが，この手法による逆算の精度はあまりよくはないので⁶⁾，要素分割と梁の軸長/桁高比 (l/h) の関係を図示して考察してみる．ここでは，幅 $b/2$ の梁の x, y, z 軸方向をそれぞれ， $6 \times 10 \times 50$ 分割， $6 \times 5 \times 100$ 分割， $6 \times 10 \times 100$ 分割， $1 \times 10 \times 100$ 分割， $1 \times 40 \times 100$ 分割， $1 \times 10 \times 370$ 分割した場合の k の逆算値を図-3 に示す．

いずれの要素分割の場合も，梁の軸長/桁高比が大きくなるほど， k の逆算値は大きくなる傾向にあるが，これは，梁が細長くなるほど，せん断変形によるたわみが小さくなるため，逆算に用いるたわみのオーダーが小さくなり，相対的に誤差が大きくなるためではないか

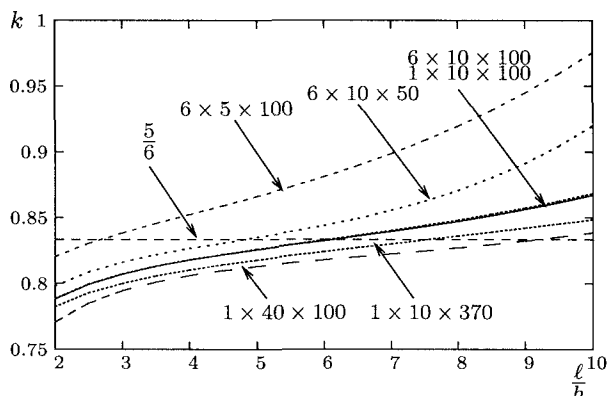


図-3 荷重-たわみ関係から逆算した k

と考えられる。6 × 10 × 100 の要素分割は、ここで用いた有限要素プログラムで扱えるほぼ上限なので、 x, y, z 方向のいずれかの要素分割を、粗くした場合に、逆算の精度がどの程度落ちるかを確認するために、6 × 5 × 100 分割、6 × 10 × 50 分割、1 × 10 × 100 分割の結果を比較してみる。 y 方向 (桁高方向) や z 方向 (軸方向) の要素分割を半分にすると、 k の逆算値は、5~10% 程度大きめの値となり、特に軸長/桁高比が大きくなるほどその差は広がっていく。一方、 x 方向 (幅方向) の要素分割は、6 分割でも 1 分割でも、結果にほとんど差は出ず、グラフ上では、どちらの結果も重なって見える。そこで、 x 方向を 1 分割として、そのぶん y 方向または z 方向の分割数を増やして 1 × 40 × 100 分割、1 × 10 × 370 分割として計算した結果と比較してみると、いずれも、6 × 10 × 100 分割の結果よりは、1~2% 程度低めなものほぼ同じ様な分布となった。 l/h が大きくなるにつれて、 k は大きくなるものの、 $2 < l/h < 10$ の範囲では、 $5/6 \approx 0.83$ の $\pm 3\%$ 程度の間には収まっている。但し、この手法による k の逆算の精度はそれほどよくはないので、 k が仮にもっと極端な値を取ったとした場合も含めて、せん断変形が座屈解などに与える影響について次節で試算してみる。

3. 梁要素モデルによる座屈解析

3.1 Timoshenko 梁の剛性方程式

2 節点 14 自由度の梁要素に対する有限変位を考慮した剛性方程式^{13),14),15)}は、以下のように表せる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \mathbf{r} \quad (6)$$

ここに \mathbf{f} は節点外力ベクトル、 \mathbf{R} は回転と変形を表す変換行列、 \mathbf{K} は 2 節点 14 自由度の梁要素の線形剛性行列 (幾何剛性行列を含まない)、 \mathbf{T} は座標変換行列、 \mathbf{r} は回転成分にオイラー角を含む^{13),14),15)} 節点相対変位ベクトル、 \mathbf{Q} は x, y, z 軸回り回転角成分をオイラー角成分に変換する行列で、節点外力ベクトル \mathbf{f} と節点相対変位ベクトル \mathbf{r} は以下のように表される。

$$\mathbf{f} \equiv [\mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_2^T]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{f}_i \equiv [F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi} \ M_{\lambda i}]^T \quad (i = 1, 2)$$

ここに、 F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} はそれぞれ x, y, z 軸方向の節点外力、 M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} はそれぞれ x, y, z 軸右ねじ回りの節点外力モーメント、 $M_{\lambda i}$ は節点の外力そりモーメントである。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\equiv [\mathbf{r}_1^T \ \mathbf{r}_2^T]^T \\ \mathbf{r}_1 &\equiv [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \lambda_1]^T \\ \mathbf{r}_2 &\equiv \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left[\begin{array}{c} u_2 - u_1 - \ell \cos \alpha_1 \sin \gamma_1 \\ v_2 - v_1 - \ell \sin \alpha_1 \\ w_2 - w_1 - \ell (\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 - 1) \\ \left[\begin{array}{ccc} -\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} & 0 & \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ 0 & 1 & \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ -\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} & 0 & \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 - \alpha_1 \\ \gamma_2 - \gamma_1 \\ \phi_2 - \phi_1 \end{array} \right\} \\ \lambda_2 \end{array} \right]$$

ここに u_i, v_i, w_i は x, y, z 軸方向の並進変位、 $\alpha_i, \gamma_i, \phi_i$ はオイラー角^{13),14),15)}、 λ_i は断面のねじれ率である。なお、 \mathbf{r}_2 の回転角 3 成分は、オイラー角成分を x, y, z 軸回りの回転角成分に

変換するための変換マトリクスがかけられている。式 (6) の変位についての増分式として、接線剛性方程式が次式で与えられる^{13),15)}。

$$\Delta f = \left[\frac{\partial Q^T}{\partial d} R^T K T_o^T r Q + Q^T \left[\frac{\partial R^T}{\partial d} K T_o^T r + R^T K R \right] Q \right] \Delta \bar{d} \equiv K_1 \Delta \bar{d} \quad (9)$$

ここに、 \bar{d} は、回転角成分が x, y, z 軸回りの成分で与えられる節点変位ベクトルで、次式で表される。

$$\begin{aligned} \bar{d} &\equiv [\bar{d}_1^T \ \bar{d}_2^T]^T \\ \bar{d}_i &\equiv [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ \lambda_i]^T \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (10)$$

ここに $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ は、 x, y, z 軸回りの回転角成分で、増分式における微小成分としてのみ用いられる。

座屈解析の場合は、式 (6) と式 (9) とを用いた弧長増分法によるくり返し収束計算において、式 (9) の接線剛性行列 K_1 の負の固有値の数が、弧長増分法における弧長の増加に伴い、0 個から 1 個に変化した荷重段階を座屈荷重とする。

集成材梁は曲げに対するせん断変形が比較的大きい材料なので⁶⁾、式 (6) の中の剛性行列 K を 3 次元ティモシェンコ梁の剛性行列^{16),17)} に置き換えて、2 軸曲げに対するせん断変形の影響を考慮できるようにする。具体的には、 14×14 の剛性行列 K の $K_{2,2}, K_{4,2}, K_{11,2}$ 成分を $\frac{1}{1+12\phi_{yz}}$ 倍、 $K_{1,1}, K_{5,1}, K_{12,1}$ 成分を $\frac{1}{1+12\phi_{xz}}$ 倍、 $K_{4,4}$ 成分を $\frac{1+3\phi_{yz}}{1+12\phi_{yz}}$ 倍、 $K_{11,4}$ 成分を $\frac{1-6\phi_{yz}}{1+12\phi_{yz}}$ 倍、 $K_{5,5}$ 成分を $\frac{1+3\phi_{xz}}{1+12\phi_{xz}}$ 倍、 $K_{12,5}$ 成分を $\frac{1-6\phi_{xz}}{1+12\phi_{xz}}$ 倍し、対称成分も同様とする。ここに、 ϕ_{xz}, ϕ_{yz} は、それぞれ y 軸回り、 x 軸回りの曲げによる xz 面、 yz 面のせん断変形のしやすさを表すパラメータで、次式で与えられる^{16),17)}。

$$\phi_{xz} = \frac{EI_y}{Gk_{xz}Al^2}, \quad \phi_{yz} = \frac{EI_x}{Gk_{yz}Al^2} \quad (11)$$

ここに、 I_y, I_x は、それぞれ y 軸、 x 軸回りの断面二次モーメントである。 k_{xz}, k_{yz} は、それぞれ xz 面、 yz 面のせん断変形に対するせん断補正係数であり、本解析では $k_{xz} = k_{yz} = k$ とする。

なお、桁幅 $b \times$ 桁高 h の集成材梁のねじり定数 J ¹⁸⁾ とそりねじり定数 I_ω は次式で求める。

$$J = \frac{hb^3}{3} \left(1 - \frac{192b}{\pi^5 h} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi h}{2b} \right) \quad (12)$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA \quad (13)$$

ここに ω は長方形断面の正規化そり関数で、次式¹⁹⁾ で与えられる。

$$\omega = \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{b}}{\cosh \frac{n\pi h}{2b}} \sin \frac{n\pi x}{b} + xy \quad (14)$$

3.2 k を変化させた場合

2. 章で直方体要素により試算した $E = 10\text{GPa}$, $G = 0.7\text{GPa}$, $\nu = 0.3$, $b = 5\text{cm}$, $h = 25\text{cm}$ の片持ち梁に対して、3.1 節で示した梁要素モデルによる有限変位・有限要素法により座屈解析を行う。荷重は、自由端に面内曲げ方向の鉛直荷重を与えるものとする。2. 章での試算から、 G が E に比べて等方性を満たさない程度に小さいような材料であっても、長方形断面に対するせん断補正係数 k は、一般に用いられる $5/6$ に比べてオーダー的にそれほど異なる値を取るといったことはないであろうと考察したが、本節では、確認のため、 k に通常範囲の値として $5/6$ 、極端に小さい値として $5/60$ 、極端に大きい値として $5/6 \times 10^{10}$ (以下、無限大と表現) を与え

て、比較してみる。梁の軸長を 1m~10m まで変化させた場合の無次元化座屈荷重 $\frac{P\ell^2}{\sqrt{EI_y GJ}}$ を図-4 に示す。面内曲げ剛性 EI_x を 10^{10} 倍 (以下、無限大と表現) して座屈前の面内たわみが発生しないようにした結果および次式で与えられる Trahair²⁰⁾ の解も併記する。

$$P_{cr}^T = \frac{\sqrt{EI_y GJ}}{\ell^2} \left(3.95 + 3.52 \sqrt{\frac{\pi^2 EI_\omega}{GJ\ell^2}} \right) \quad (15)$$

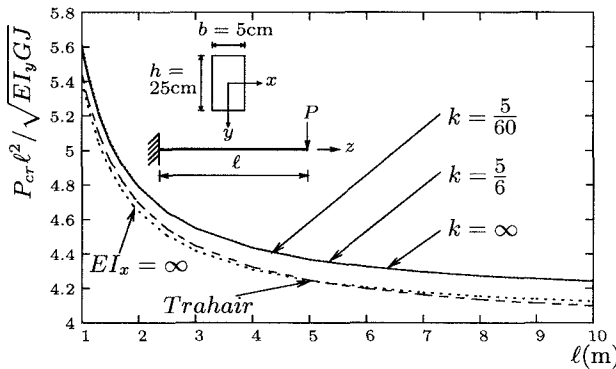


図-4 横ねじれ座屈荷重 ($k = \frac{5}{60}, \frac{5}{6}, \infty$)

表-1 横ねじれ座屈荷重 ($k = \frac{5}{60}, \frac{5}{6}, \infty$)

ℓ	$k = \frac{5}{60}$	$k = \frac{5}{6}$	$k = \infty$
1	5.611	5.586	5.584
2	4.790	4.786	4.785
3	4.547	4.546	4.640
4	4.434	4.433	4.433
5	4.368	4.367	4.367
6	4.325	4.325	4.325

$k = 5/60, 5/6, \infty$ としたそれぞれの解析では、グラフ中ではほとんど重なっているため、表-1 に数値を示す。

k が小さくなるほどせん断変形によるたわみのぶんだけ座屈前の面内たわみが大きくなるため、座屈荷重は若干大きくなるが、せいぜい 1% 未満の差しか現れず、その差も軸長が長くなるほど微小となる。 $EI_x = \infty$ として面内にたわまなくした梁に対する数値解は、Trahair の解と近い値を取っている。Trahair の解は、式 (15) 中に EI_x の項がないことから分かるように、座屈前の面内たわみを無視した解であり、面内たわみを考慮した数値解よりも 3% 程度低めの解となっている。つまり、せん断補正係数 k の大小よりも、座屈前の面内たわみを考慮

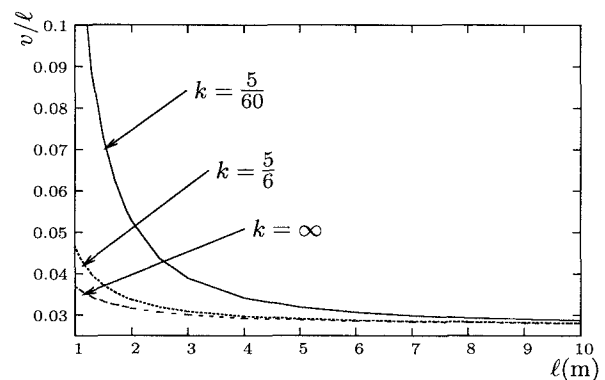


図-5 座屈時の面内たわみ ($k = \frac{5}{60}, \frac{5}{6}, \infty$)

するかどうかの方が、座屈荷重に大きく影響することが分かる。さて、 $k = 5/60, 5/6, \infty$ としたそれぞれの座屈荷重にはほとんど差がないことが分かったが、座屈時のたわみに k の大小の影響が現れていないのかどうかを見るため、座屈時の片持ち梁先端のたわみを図-5 に示す。座屈荷重には 1% 未満の差しか現れなくとも、座屈時の面内たわみは、 l/h が小さい領域では、 k の小ささに応じて、 $k = \infty$ としてせん断変形を無視したたわみに対して数%~数十%も大きくなっている。つまり、 k が小さいほど、座屈前の面内たわみは、せん断変形の影響で (特に l/h が小さい領域では) じゅうぶんに大きくなり得るが、その場合でも座屈荷重は、せん断変形を無視した場合と大差はないということになる。

3.3 G を変化させた場合

3.2 節では、 k を変化させて片持ち梁の横ねじれ座屈を解析し、 k の値が極端な範囲で変化したとしても座屈荷重にはほとんど影響を与えないことが分かった。3.2 節では、 G が E に対し

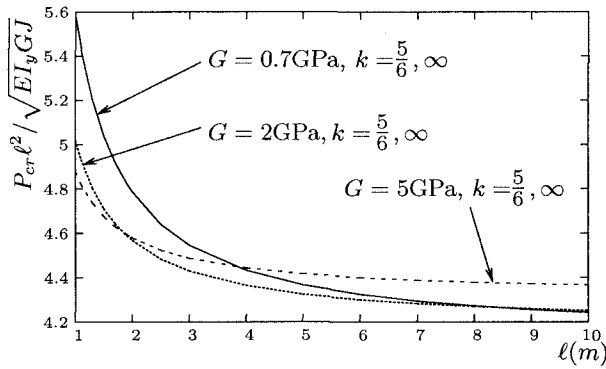


図-6 横ねじれ座屈荷重 ($G = 0.7, 2, 5\text{GPa}$)

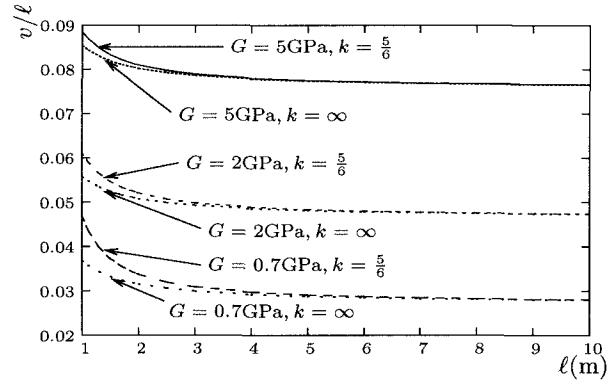


図-7 座屈時の面内たわみ ($G = 0.7, 2, 5\text{GPa}$)

て集成材程度にかなり小さい $G = 0.7\text{GPa}$ の場合について解析を行ったが、横ねじれ座屈荷重の大小は、式 (15) から推察されるように、一般にねじれ剛性 GJ の大小に対応しているため、 G が小さい場合には座屈荷重自体も小さくなってしまふ。同じ曲げ荷重を受ける場合には G が小さい方が、せん断変形の影響が大きいことは確かだが、 G の小ささに伴って座屈荷重自体も小さくなっているため、 G が小さいほど座屈時のせん断変形の影響が大きいのかどうかは一概に判断できない。そこで本節では、せん断弾性係数 G を変化させ、 G の大きさによって座屈時のせん断変形の影響の受けやすさに違いがあるかどうかを調べてみる。3.2 節で解析したのと同じ諸元の片持ち梁に対して、 $G = 0.7, 2, 5\text{GPa}$ とした場合の無次元化座屈荷重を図-6 に示す。 $G = 0.7, 2, 5\text{GPa}$ としたそれぞれの解析において、 $k = 5/6$ としたか無限大としたかでは、ほとんど差が出ていない。 G が変化しても 3.2 節の解析と同様に k の大小はほとんど座屈荷重に影響していない。ただ、 G が小さいほど、 l/h が小さい領域での傾きは急になっており、 G が小さいほど、せん断変形の影響を強く受けていることがうかがえる。

そこで、3.2 節と同様に座屈時のたわみを図-7 に図示してみる。 $G = 0.7, 2, 5\text{GPa}$ としたそれぞれの解析において、 $k = 5/6$ とした結果の方が、 $k = \infty$ としたせん断変形を無視した結果に比べて l/h が小さい領域でやや大きくなっており、せん断変形の影響が現れているのが分かる。また、 $G = 5\text{GPa}$ の結果よりは $G = 2\text{GPa}$ の結果の方が、更には、 $G = 0.7\text{GPa}$ の結果の方が、せん断変形を考慮した場合と無視した場合の開きが大きくなっており、 G が小さくなるほど、せん断変形の影響を受けやすいことが分かる。とはいえ、 $G = E/15$ 程度の集成材のような部材においては、たとえ座屈前の面内たわみがせん断変形によって大きくなったとしても、座屈荷重はせん断変形を無視した解と大差がない。

4. まとめ

- せん断変形を考慮した集成材梁の曲げ解析などにおいては、ポアソン比 0 の等方性材料の長方形断面梁に対するせん断補正係数 $5/6$ が便宜的に用いられている。せん断弾性係数がヤング率に比べてかなり小さい異方性材料に対して、直方体要素による曲げ解析を行い、その荷重とたわみの関係からせん断補正係数を逆算してみたところ、梁の軸長/桁高が 2~10 の範囲では、せん断補正係数が $5/6 \pm 3\%$ 程度の間にとまった。せん断変形によるたわみは全たわみの数 % 程度なので、その $\pm 3\%$ の違いが仮にあったとしても、それほど大きいものではない。この逆算手法の精度自体はそれほどよくはないものの、集成材のようなばらつきのある大きい材料では、せん断補正係数として $5/6$ を便宜的に用いるのはじゅうぶんに妥当であろう。

- せん断弾性係数が小さくなるほどせん断変形は大きくなるし、せん断補正係数が小さくなるほどせん断変形は大きくなるが、せん断弾性係数が小さい材料ほどせん断補正係数が小さくなる訳ではない。等方性材料では、せん断弾性係数が小さいほどせん断補正係数は大きくなる (ポア

ソン比の最大値を 0.5 とすれば, せん断補正係数の最大値は 0.86 程度である).

- ・せん断弾性係数が同じ材料の場合, せん断補正係数が小さい方が (梁の軸長/桁高が小さい領域で) 横ねじれ座屈時の面内たわみは大きくなる. しかし, 座屈荷重にはほとんど差が出ない.
- ・せん断変形の影響を考慮したか無視したかの違いでは横ねじれ座屈荷重にほとんど差が出ないが, 座屈前の面内変位を考慮したか無視したかの違いは, 横ねじれ座屈荷重に一定の差を与える.
- ・せん断弾性係数の小さい梁の方が, 横ねじれ座屈時の面内たわみにおいてせん断変形の影響を受けやすい. 但し, 座屈荷重にはせん断変形を考慮したか無視したかの差はほとんど現れない.

参考文献

- 1) 小野 徹郎, 井戸田 秀樹, 加藤 征宏: 集成材はりの横座屈耐力に関する考察, 日本建築学会構造系論文集 第 547 号, pp.121-128, 2001.
- 2) 大島 宗憲, 井戸田 秀樹, 佐藤 英二: 集成材はりのねじり剛性評価-その 1 ねじり理論および実験方法, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 III, pp.35-36, 2001.
- 3) 佐藤 英二, 井戸田 秀樹: 集成材はりのねじり剛性評価-その 2 有限要素法解析およびねじり剛性評価, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 III, pp.37-38, 2001.
- 4) 日本建築学会: 木構造計算基準・同解説, 丸善, 1988.
- 5) 長谷部薫・薄木征三: 集成木材はりの横座屈解析と実験, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp.963-970, 1992.
- 6) 後藤文彦, 麓 貴行, 薄木征三, 佐々木貴信: 曲げ試験による木材梁せん断弾性係数推定の精度, 構造工学論文集, Vol.49A, pp.875-880, 2003.
- 7) 辻野 哲司: 木質材料の応力と変形解析, 岩手大学教育学部研究年報 第 41 巻第 1 号, pp.77-107, 1981.
- 8) 山本 宏, 松本 勝彦: 木質梁の横安定性について (第 1 報), 北海道林産試験場研究報告, 第 62 号, pp.1-29, 1974.
- 9) 西野文雄・長谷川彰夫: 構造物の弾性解析, 新体系土木工学 7, 技報堂, 1983.
- 10) American Society for Testing and Materials: Standard test methods of static tests of lumber in structural sizes, ASTM Standards, D198-94, 1994.
- 11) チモシェンコ, S. P. (鶴戸口英善・国尾武 共訳): 材料力学 上巻, 東京図書, 1957.
- 12) Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, J. Appl. Mech., Vol.33, pp.335-340, 1966.
- 13) 後藤文彦, 小林 裕, 齊木 功, 岩熊哲夫: 空間固定三軸回りの回転自由度を用いた空間梁解析, 応用力学論文集, Vol. 1, 319-327, 1998.
- 14) 後藤文彦, 小林裕, 岩熊哲夫: オイラー角を用いた簡潔な有限変位解析手法, 構造工学論文集, Vol. 43A, 333-338, 1997.
- 15) H. Gotou, T. Kuwataka, T. Nishihara and T. Iwakuma: Finite Displacement Analysis Using Rotational Degrees of Freedom about Three Right-angled Axes, Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol. 4, No. 2, pp.319-328, 2003.
- 16) 土木学会: 構造工学シリーズ 7 構造工学における計算力学の基礎と応用, 社団法人土木学会, 1996.
- 17) 千田 知弘, 後藤 文彦, 長谷部 薫, 薄木 征三: 集成材梁の横ねじれ座屈耐荷力, 構造工学論文集, Vol. 51A, pp.1187-1192, 2005.
- 18) S.P. ティモシェンコ, J.N. グーディア著, 金多 潔 監訳: 弾性論, コロナ社, 1973.
- 19) 下関正義, 藤沼平一, 茅野寛奈: 反りを考慮した長方形断面アイソパラメトリック要素, ばね論文集, 第 39 号, p.33-39, 1994.
- 20) Trahair, N. S.: Flexural-Torsional buckling of structures, E & FN Spon, Chapman and Hall, London, England. 1993.