

第13章 パイプ・シェル

13.1 概 説

構造部材としてのパイプは海洋作業台、送電鉄塔、あるいはアーチ橋弦材などの構造物において使用されており、また、水圧鉄管およびパイプラインなど各種輸送管として使用される場合にも、一面では横造強度部材としての役割を果たし、各種の荷重による作用を受ける。パイプに比較してやや大きな半径と板厚の比（以下、 R/t ：半径対板厚比と言う）を有する鋼製円筒橋脚のような構造物は、通常、円筒シェルと言われ、 $R/t \geq 400$ のような半径対板厚比の大きい円筒シェルは特に薄肉円筒シェルと呼ばれ、ほとんどの場合軸方向、周方向あるいは両方向に補剛して用いられる。円筒シェルは穀物貯蔵庫、液体貯蔵庫、压力容器、潜水艦、航空機胴体、ロケット、屋根構造、あるいは建設工事におけるケーソンなどに用いられる。この他にも化学反応容器や冷却塔などの多くの構造物が、円筒または楕円筒、球形シェル、楕円形シェル、円錐形シェル、双曲線回転体シェルなどの薄肉および厚肉シェルより構成されている。これらのシェルは軸圧縮、曲げ、ねじり、せん断あるいは内外圧などの作用を受け、それらのどの一つの作用によっても、またはどの組合せによっても座屈破壊が生じ得る（図 13.1.1 参照）。パイプ・シェルにおける座屈の特徴は、一般に後座屈強度の低下および種々の初期不整に対する敏感性にあると言えるが、この点は薄肉シェルの場合に特に顕著であり、設計に際しては座屈問題の検討が重要となる。

座屈発生時の応力レベルから見れば、軸圧縮・曲げ・せん断座屈に対して、おおよそ、 $400 \leq R/t$ の薄肉円筒シェルでは弾性領域、 $50 \leq R/t \leq 400$ では弾性から塑性への遷移領域、 $R/t \leq 50$ では塑性領域にあり、特に、 $R/t \leq 10$ のような場合は座屈よりも圧壊が生じる領域である。

従来、円筒シェルの座屈については、航空機関係を中心に膨大な量の研究が行われてきたが、実施された座屈試験は小型で機械仕上げにより精密に仕上げられたアルミ合金模型に、軸圧縮あるいは純曲げを荷重した場合が

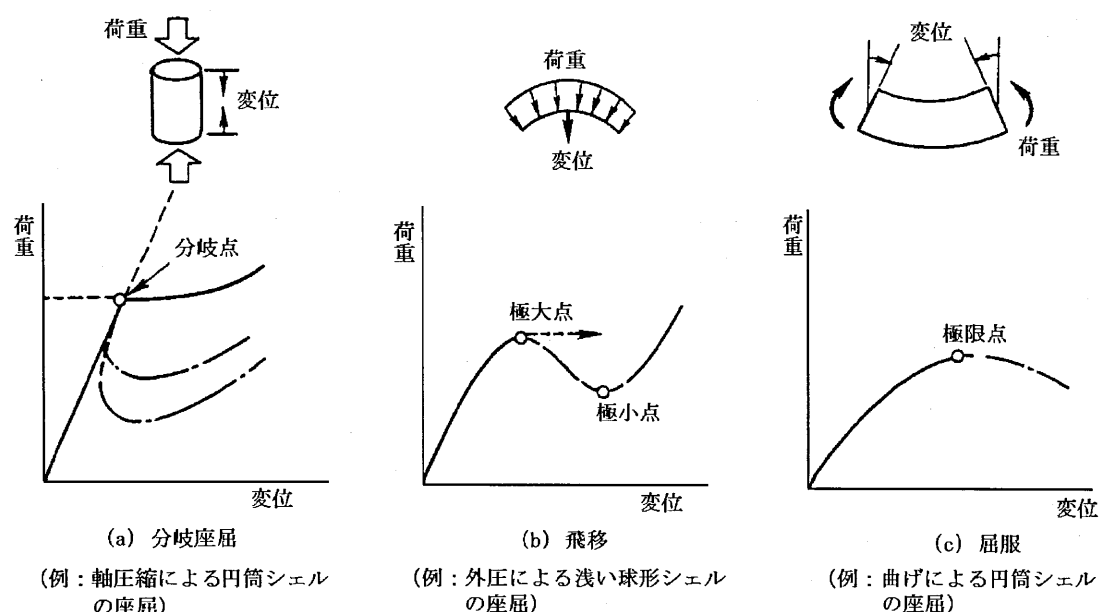


図 13.1.1 シェル座屈様式の種類[林, 1966]

多く、薄肉弾性座屈領域のものが主であった。昭和 50 年代には北海油田関連など海洋構造物の分野で、従来よりはやや厚肉の溶接施工による大型鋼製模型を用いた座屈試験が数多く行われ、実体に近い状態で座屈評価する努力がなされた。また、 $R/t = 50$ よりはやや薄肉側での円筒殻の曲げ座屈耐力に関しては、Sherman による一連の実験結果 [Sherman, 1986] がある。これらのシェル座屈に関する総論としての報告 [林, 1961, 1966] などもあり、前者には 1960 年頃までの研究成果が詳細にまとめられている。また、Handbook of Structural Stability [C.R.C., 1971] には 1970 年頃までの研究成果を含めて、各種シェルの各種荷重下での座屈強度が詳しく図表にまとめられている。さらに、その後の成果を含めて主として米国の研究成果に基づき、より具体的な設計を念頭においてシェルの座屈を論じた文献 [Johnston, 1976] がある。また、欧州における同様の成果をまとめた文献 [ECCS, 1983] が発表されており、これらには補剛円筒シェルに関する研究成果が収録されている。以上はシェルの座屈に関して論じた膨大な資料の一部であるが、代表的なものとして取り上げた。続いて、1980 年代後半から 1990 年代にかけては、高速増殖炉容器の耐震座屈設計法の確立を目的として、地震荷重下の弾塑性せん断曲げ座屈を解明するための研究が、我が国およびフランスにおいてなされた [秋山ら, 1994]。動的効果を考慮した円筒シェルの座屈耐力評価という観点でみると、弾塑性せん断曲げ座屈を対象としたこの時期の研究は先駆的であり、その後、阪神淡路大震災における被災経験を経て、数多くの動的座屈に関わる実験的・解析的検討がなされて今日に至っている [中村, 1996; 萩原ら, 1998]。

本章においては、最も広く使用されているパイプおよび円筒シェルの座屈を主な対象として、軸圧縮、曲げ、せん断、捩り、内外圧など各種荷重作用下における弾塑性座屈強度について述べ、曲面板、曲り管、補剛円筒シェルの座屈などについても触れるが、土木鋼構造物に用いられているパイプおよび円筒シェルは $R/t \leq 100$ の場合が圧倒的に多く、弾塑性座屈がほとんどである。ここでは、過去の研究経緯を踏まえて、弾性座屈理論、実験データ、座屈の基本評価式、塑性修正などの設計に結びつく解説を中心に記述する。

なお、特に円筒シェルの座屈実験は高度な実験技術を要し、また、動的座屈の場合、地震波の特性もパラメータとして加わるので、静的実験の場合よりケース数が多くなる。したがって、座屈評価における数値解析技術の重要性は高く、シェル要素を用いた静的・動的弾塑性大変形解析を十分な精度を保持しつつ実施するためのガイドラインは重要である。数値解析を座屈実験に代わる方法という位置づけで、その適用にあたっての留意事項を最後に取りまとめて示すことにする。

13.2 パイプおよび円筒シェルの静的座屈

13.2.1 円筒座屈挙動の総論、および記号

薄肉壁を有するパイプおよびシェル部材の座屈は前述したように幾つかの異なる様式で生じ得る。したがって、それぞれの座屈様式において座屈に至るまでの過程や座屈後の挙動を知ることが座屈設計を行う上で重要である。たとえば、円筒シェルが軸圧縮作用を受ける場合、形状寸法比および両端縁支持条件によっては軸方向ならびに周方向に幾つかの異なる波長を有するいわゆるダイヤモンド形の座屈波形 (図 13.2.2 参照) が生じ得る。また薄肉シェルは一般に補剛されて使用されるので、補剛材の寸法、間隔、位置などが新たなパラメータとなる。作用荷重の種類・組合せも重要な因子である。本章では、まず始めに弾性座屈を扱うが、厚肉シェルや高温下の材料を取り扱う場合など実際問題としては材料の非弾性特性が座屈強度に大きな影響を及ぼす場合も少なくない。さらに、局部座屈と全体座屈の連成の可能性も考慮に入れておかなければならない。

以上の因子については、それらの座屈強度へ及ぼす影響は比較的明らかであり、設計に反映させることも可能である場合が多い。したがって、初期不整にそれほど敏感ではない厚肉パイプ部材の場合、比較的高い信頼性を有する座屈設計公式を得ることができる。反面、薄肉シェルの座屈強度に及ぼす初期不整の影響は、初期

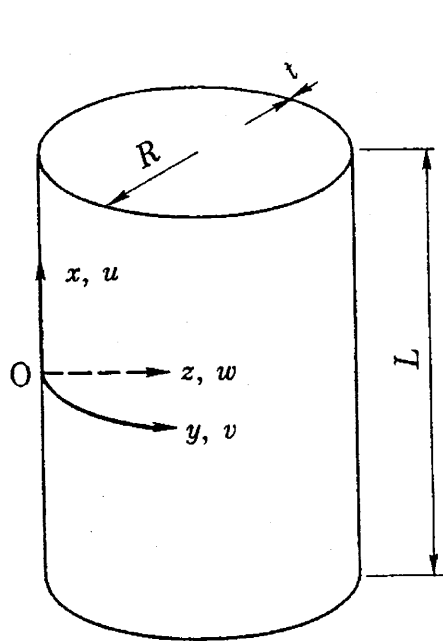


図 13.2.1 記号の規約

E	: 縦弾性係数
ν	: ポアソン比
$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	: 板の曲げ剛性
L	: 円筒の長さ
R	: 円筒半径 (板厚中心まで)
t	: 板厚
x, y, z	: 軸, 周, 半径方向座標
u, v, w	: x, y, z 座標に関する座屈時増分変位
m	: 軸方向座屈波数 $\times 2$ (半波数)
n	: 周方向座屈波数
Σ	: 座屈応力の古典理論座屈応力に対する比
μ	: 周方向座屈波数の古典理論周方向座屈波数に対する比
$\sigma_{cl} = \left(1/\sqrt{3(1-\nu^2)}\right) \cdot Et/R$	: 古典理論による軸圧縮座屈強度
$Z = \sqrt{1-\nu^2} \cdot L^2/Rt = \sqrt{1-\nu^2} \cdot (R/t)/(R/L)^2$	: 形状係数 (Batdorf パラメータ)
$R_t = \sqrt{3(1-\nu^2)}(\sigma_y/E)(R/t) = 1.65(\sigma_y/E)(R/t)$	: 径厚比パラメータ (σ_y : 降伏応力)

表 13.2.1 対象とする縁端境界条件 (図 13.2.1 参照)

分類 記号	面外拘束条件	面内拘束条件		分類 記号	面外拘束条件	面内拘束条件	
		軸方向	周方向			軸方向	周方向
C1	$w = \partial w / \partial x = 0$	$u = 0$	$v = 0$	S1	$w = 0, \partial w / \partial x$: 自由	$u = 0$	$v = 0$
C2	"	u : 自由	"	S2	"	u : 自由	"
C3	"	$u = 0$	v : 自由	S3	"	$u = 0$	v : 自由
C4	"	u : 自由	"	S4	"	u : 自由	"
F1	$w, \partial w / \partial x$: 自由	$u = 0$	v : 自由	注) 記号 C, S, F は各々, 面外拘束条件が固定, 単純支持, 自由であることを表す			
F2	"	u : 自由	"				

不整が現実の構造物には不可避でありかつその影響が大きいにもかかわらず、現実の複雑な初期不整の定量的な評価の難しさもあって、必ずしも明確にはされていない。このため、薄肉シェル構造物に対する合理的な座屈強度設計公式の確立が難しい状況を生み出している。

本節では、まず初期不整のない完全円筒形状のパイプおよびシェルについて述べた後、多くの実験値との比較と、実験値に基づいた座屈設計のための基本評価式について述べる。本節における記号の規約は図 13.2.1 に示す通りである。また、ここで対象とする端部境界条件は表 13.2.1 に示す通りであり、 u, v, w はそれぞれ、座屈時における x, y, z 座標軸方向の変位である。

なお、円筒シェルの座屈解析における支配方程式としては、Donnell の式 [Donnell, 1976] と Flugge の式 [Flügge, 1973] が用いられる場合が多い [八巻ら, 1971, 1972]。前者は取り扱いが簡単であるが、浅いシェルの近似に基づいたわみが面内変位成分に比し十分大きいことを前提としているため、円筒シェルが細長くかつ周方向波数が少ない場合には大きな誤差を伴う。これに対して後者は比較的厳密であり、より広い範囲にわたる形状係数 $Z = \sqrt{1-\nu^2} \cdot L^2/Rt$ に対して適用可能である。形状係数 Z は、 $(L/R)^2$ と (R/t) の積に比例し、Batdorf の曲率パラメータと呼ばれる。

13.2.2 軸圧縮力による座屈

薄肉シェル横造物の座屈強度評価上、最も基本的な弾性完全円筒パイプおよびシェルの軸圧縮力による座屈強度は表 13.2.1 の境界条件の下で八巻ら [八巻ら, 1972] により明らかにされており、その結果は座屈強度、座屈波数—形状係数曲線として図 13.2.3 のようにまとめられている。ここに、 Σ および μ はそれぞれ座屈強度 σ_{scr} 、および周方向座屈波数 n_{cr} の、対応する古典理論値 σ_{cl}, n_{cl} に対する比である。古典理論値 [Timoshenko, 1961] は、微小変位理論に基づき、また座屈前における変形を無視して、表 13.2.1 における S2 の境界条件の下で求められ、径長比によらず、半径対板厚比のみによって次式のように与えられる (図 13.2.1 参照)。

$$\sigma_{cl} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{Et}{R} = 0.605 \frac{Et}{R} \quad (13.2.1a)$$

$$n_{cl} = \sqrt[4]{(3/4)(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{R}{t}} \quad (13.2.1b)$$

これらの結果を基に、以下、若干の説明を加える。

(1) 柱としての弾性座屈

形状係数 Z が各境界条件ごとに定まるある値 Z_u (表 13.2.3 参照) より大きな長い円筒シェルにおいては座屈様式は急に Flügge 形 (径長比 R/L の減少と共に円周方向座屈波数 n および座屈強度 σ_{scr} の減少を伴う座屈様式) に移行し、座屈強度比 Σ の値は $\Lambda = \sqrt{Z} \cdot t/R$ の増加と共に波状の変化を繰り返しながら減少し、同時に座屈波数 n (一般に 4 より小) も逐次減少して 1 に至るが、 $n=1$ の場合の座屈強度は両端固定、または単純支持の長柱の座屈強度に一致する。すなわち、極端に長い円筒シェルは座屈に際して境界における周方向変位を拘束する場合には両端固定の長柱として、拘束しない場合には両端単純支持の長柱として座屈する。これらの関係の適用範囲は前者では $Z \geq 64\sqrt{1-\nu^2}(R/t)^2$ 、後者では $Z \geq 16\sqrt{1-\nu^2}(R/t)^2$ としてよい。

なお、非弾性座屈を考える場合には、円形パイプの柱座屈に対する有効長さを L_k とし、無次元化細長比 $\lambda = (L_k/R) \cdot (1/\pi) \cdot \sqrt{\sigma_y/E}$ を用いて、前述の柱の章で述べた方法により評価する。

(2) シェルとしての弾性座屈

「シェルとしての座屈」または「局部座屈」は主として断面の形状変化を伴う座屈をいうが、その現れ方には図 13.2.2 に示すように非常に多くの様式がある。短い円筒シェルの座屈強度は L/R および R/t の双方に影響されるが、長いシェルの場合は R/t のみに支配される。図 13.2.3 は Flügge 形の式に基づく結果であるが、各境界条件に対し、 Z の値が表 13.2.2 中に示す Z_p の値より小さい領域では、Donnell 形の式による結果とほぼ一致する。 Z が十分大きい領域での境界条件の影響は、S2, S4 の場合、すなわち面外単

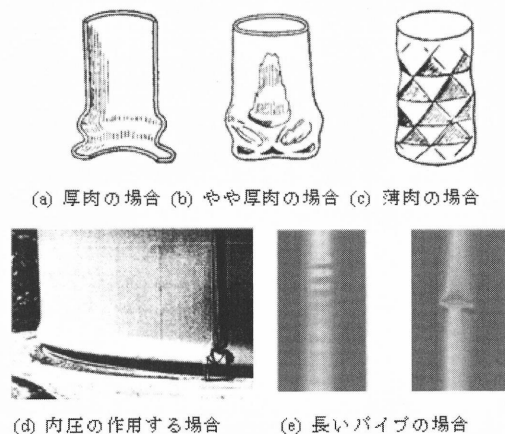


図 13.2.2 軸圧縮によるシェルとしての種々の座屈波形 [林, 1961]

純支持、かつ座屈時の面内変位増分に関し軸方向変位自由の条件の下では座屈強度が式 (13.2.1a) の古典理論値に比し約 50 % となる。その他の境界条件の場合には古典理論値に対し概ね 0.83~0.93 の間のそれぞれほぼ一定の座屈強度となる。この領域すなわち Z が表 13.2.3 中の Z_l と Z_u に関して $Z_l < Z < Z_u$ の間にある比較的長い円筒シェルにおいては、座屈波形は荷重端より約 $15\sqrt{Rt}$ の狭い範囲内で急激な変化を示し、それより中心側においてはほぼ一定となるか、またはほとんど生じないことが計算結果からわかっている。各境界条件に対する Z_l および Z_u の値と共に Σ の収束値を表 13.2.3 に示す。

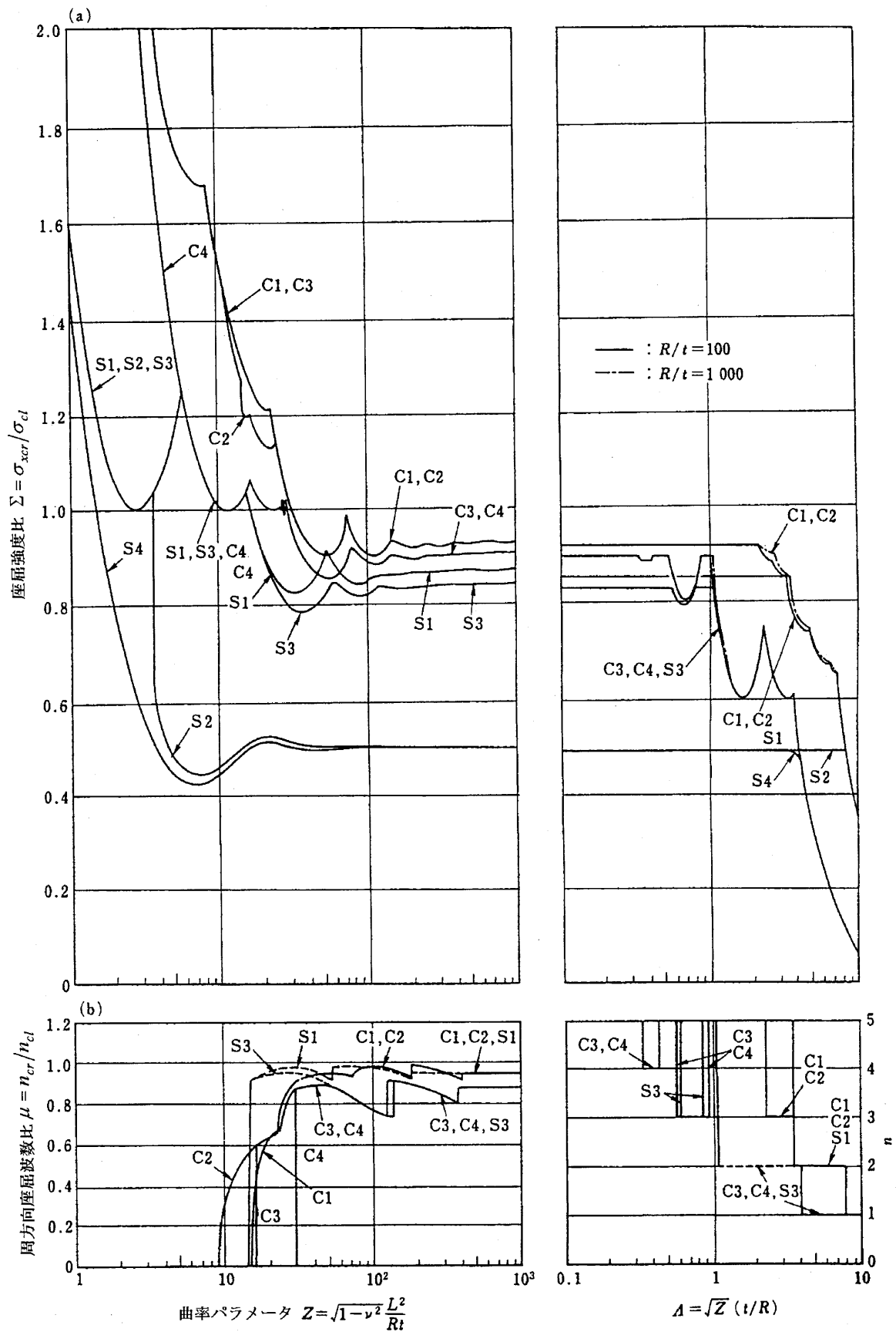


図 13.2.3 軸圧縮による円筒シェルの弾性座屈強度（理論値）[八巻ら,1972]

表 13.2.2 Donnell 式と Flugge 式による結果が一致する Z 値の上限値 Z_p [八巻ら, 1971]

境界条件	C1	C2	C3	C4	S1	S2	S3	S4
$\frac{Z_p}{\sqrt{1-\nu^2}}$	100	32	32	10	10	30	2.6	30

表 13.2.3 各境界条件下での座屈強度比 Σ の収束値およびその収束域 [八巻ら, 1972]

境界条件	Σ	Z_l	$Z_u(t/R)^2$
C1, C2	0.92	400.	4.0
C3, C4	0.90	400.	0.1
S1	0.85	400.	10.
S2	0.50	40.	60.
S3	0.83	400.	0.32
S4	0.50	40.	15.

ここで, $Z_l < Z < Z_u$; $\nu = 0.3$

$$\Sigma = \sigma_{xcr} / \sigma_{cl}$$

σ_{xcr} : 座屈強度

(3) 実験値に基づいて定めた弾塑性座屈評価式

以上の通り, 純粋に解析理論的立場からは, 座屈前の有限変形を考慮した場合において, 円筒の長さ L が極端に短い場合を除いて, 座屈発生応力は古典理論値に対して S2, S4 で約 1/2, 他の境界条件で約 9/10 となることがわかる. しかしながら, 過去における膨大な数の実験値は, 実験条件が明確で不整影響の小さい条件下におけるケースを選別してもなお, さらに小さいことから, 理論的, 実験的に多くの座屈研究が行われてきた. 実験値と理論値の差異を解明し, 合理的な座屈設計法を確立するという観点からの代表的な研究例に Weingarten ら [Weingarten et al., 1965], Miller ら [Miller et al., 1977] の研究が挙げられるが, 米国 NASA の SP.8007 に定められた基準座屈応力は Weingarten の研究を基にしている. 一方, Miller らによる提案は, ASME Boiler and Pressure Vessel Code Case N - 284 等の評価法の基礎を与えている.

図 13.2.4 は Weingarten による検討結果の例であるが, 縦軸は座屈係数 C で $C = 0.605$ が古典理論値であり, 実験値がいかに低い値であることを示している. また, 過去の座屈研究の多くが $R/t \geq 400$ のようなダイヤモンド型の座屈変形を生じる弾性座屈領域で行われており, 土木・建築分野におけるように $R/t \leq 100$ の提灯型の変形を生じる弾塑性座屈領域における検討例が少ないことも示している.

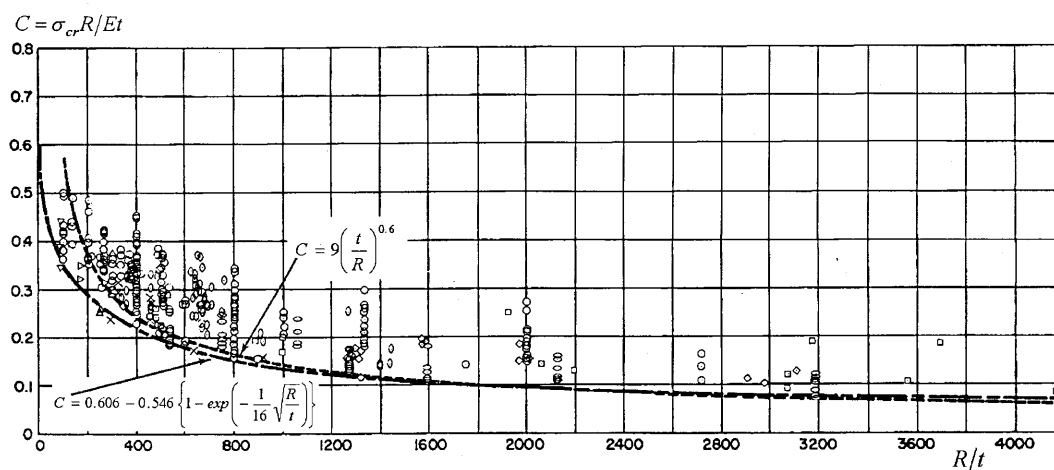


図 13.2.4 軸圧縮を受ける円筒シェルの座屈強度 (実験値) [Weingarten et al., 1965]

図 13.2.4 中、点線は次式 (13.2.2) に示す定評の高い NASA の弾性軸圧縮座屈評価式である [Weingarten et al., 1965].

$$\sigma_{a,cr}^e = 0.6 \left[1 - 0.901 \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{1}{16} \sqrt{\frac{R}{t}} \right) \right\} \right] \frac{Et}{R} \quad \left(100 \leq \frac{R}{t} \leq 4000, \quad 0.5 \leq \frac{L}{R} \leq 5.0 \right) \quad (13.2.2)$$

塑性の影響による座屈荷重の低減効果を考慮する方法（塑性修正法）に関しては幾つかの考え方がある。各国の設計基準ごとに採用されている塑性修正法は異なり、実務上重要であるが、理論的な優劣はつけ難いので、以下に列挙する。これらは、軸圧縮、曲げ、せん断座屈などの座屈形態にかかわることなく用いられている。

a) 2乗の相互作用則を用いる方法

$$\left(\frac{X_{cr}}{X_e} \right)^2 + \left(\frac{X_{cr}}{X_p} \right)^2 = 1 \quad (13.2.3)$$

ここで、 X_e は弾性座屈応力、 X_{cr} は塑性座屈応力、 X_p は塑性応力（全塑性荷重に対応する応力で、軸圧縮の場合であれば $X_p = \sigma_y$ （降伏応力））である。

b) 塑性2次、弾性1次の相互作用則を用いる方法

次式により塑性修正を行う。記号の意味は上記 a) の場合と同じである。

$$\left(\frac{X_{cr}}{X_e} \right) + \left(\frac{X_{cr}}{X_p} \right)^2 = 1 \quad (13.2.4)$$

c) 弾性座屈応力の式に係数 η （ η は塑性リダクションファクター）を乗じて考慮する方法

ASME Code Case N-284 におけるように、塑性座屈試験データの下限と弾性座屈評価式の値から η を定める方法、あるいは材料の接線剛性と割線剛性を用いて η を定める方法などがある。

以上の方法の中で、b) の方法は弾性の影響の強い薄肉側から、塑性の影響の強い厚肉側まで実験値との整合も良く、滑らかに接合して、なおかつ簡単である。そこで、NASA の SP.8007 では、軸圧縮座屈に対する塑性修正の式を明確に与えていないが、弾性1次、塑性2次の塑性修正を行うとすれば、設計時の弾塑性軸圧縮座屈応力 $\sigma_{a,cr}^p$ は次式で求められる。

$$\frac{\sigma_{a,cr}^p}{\sigma_{a,cr}^e} + \left(\frac{\sigma_{a,cr}^p}{S_y} \right)^2 = 1 \quad (13.2.5)$$

ここで、 S_y は設計降伏応力（必ずしも実部材の材料試験に基づく降伏応力ということではなく、設計時に用いる降伏応力）である。

弾塑性座屈時の部材力は、次式で求めればよい。

$$F_{cr} = \sigma_{a,cr}^p \cdot 2\pi R t \quad (13.2.6)$$

なお、 R/t が 150 程度以下の鋼管に対して、鋼構造物設計指針 [土木学会鋼構造委員会, 1987, 1997] において強度評価式が与えられており、道路橋示方書 [日本道路協会, 1996] および諸外国の設計基準において許容応力度算定式が与えられている。これらは基本的に、短鋼管のシェル座屈を想定した実験結果に基づいて定められたものであり [宇佐美ら, 1990; 土木学会鋼構造委員会, 1994], 起源は 1940 年代の Plantema の式にまで遡ることができる [Plantema, 1946], 鋼構造物設計指針における強度評価式は次式の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{a,cr}^p &= \sigma_y & (R/t \leq 0.119) \\ \sigma_{a,cr}^p &= \left(0.723 + \frac{0.0330}{R/t} \right) \sigma_y & (0.119 < R/t \leq 0.355) \end{aligned} \right\} \quad (13.2.7)$$

ここで, $R_t = 1.65(\sigma_y/E) \cdot (R/t)$ (径厚比パラメータ)

また, 土木建築分野で用いられる相対的に厚肉の円筒シェルについて, 座屈発生メカニズムに関する研究例は少ないが, 少なくとも軸圧縮力が作用する場合については塑性分岐問題としての検討から, 座屈モードの局所化により提灯座屈が生じることや, 提灯座屈 (1 次塑性分岐) から 2 次塑性分岐によりダイヤモンド座屈へ座屈モードが遷移するメカニズムなどについて, 後藤らが明らかにしている [後藤ら, 1996, 1998b].

13.2.3 曲げモーメントによる座屈

(1) 屈服

極端には短くない円筒の場合, 純曲げを受けたときに断面が楕円形に変形することにより曲げ剛性が減少し, 曲率が增大して扁平化が進み, ついには曲げモーメントが極大値 M_{ku} に達することがある. M_{ku} すなわち屈服強度は次式で与えられる.

$$M_{ku} = \beta \cdot \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot R t^2 \quad (13.2.8)$$

ここで, $\beta = (2\sqrt{2}\pi)/9 = 0.99$ である. なお, β の値の実験値としては, 平均値 1.14, 最小値 0.72 が示されているが [Brazier, 1927], 参考となる値であろう.

軸方向と周方向で直交異方性を有する場合, 式 (13.2.8) は次のようになる.

$$M_{ku} = \frac{4\sqrt{6}\pi}{9} \cdot R \sqrt{D_2 \alpha_1} \quad (13.2.9)$$

ここで, $D_2 = E_y \cdot t^3 / 12(1 - \nu^2)$, $\alpha_1 = E_x \cdot t / (1 - \nu^2)$ (E_x, E_y は軸方向, 周方向弾性係数) で, 各々, 周方向曲げ剛性, および軸方向引張剛性である.

(2) 局部座屈

実際には扁平化による屈服が生じる前に, 圧縮側に局部座屈が生じることが多い. 両端単純支持の薄肉円筒シェルが軸方向に一樣な曲げモーメントを受ける時, 座屈直前まで断面の平面保持が成立つものとして周方向フーリエ級数展開で求めた座屈応力度 [津下, 1965] と Lundquist, Donnell の実験値 [Lundquist, 1935; Donnell, 1976] との比較を図 13.2.5 に示す.

Donnell の線形理論による解析結果によれば, 曲げ座屈の座屈荷重係数 k_{bcr} は, 軸圧縮の座屈荷重係数 k_{xcr} に対して, ほぼ, $k_{bcr} \cong 1.3k_{xcr}$ の関係にあることが明らかになっている. これに関連して, 図 13.2.6 に軸圧縮との比較において曲げ座屈の実験結果および評価式の例を示すが, 図中の式は ECCS の Recommendation であり, 後述の NASA の曲げ座屈に対する式にはほぼ一致する.

NASA の弾性曲げ座屈評価式は次の通りである.

$$\sigma_{b,cr}^e = 0.6 \left[1 - 0.731 \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{1}{16} \sqrt{\frac{R}{t}} \right) \right\} \right] \frac{Et}{R} \quad (13.2.10)$$

前述の弾性 1 次, 塑性 2 次の修正を行うとすれば設計における弾塑性曲げ座屈応力 $\sigma_{b,cr}^p$ は次式で求められる.

$$\frac{\sigma_{b,cr}^p}{\sigma_{b,cr}^e} + \left(\frac{\sigma_{b,cr}^p}{1.27 S_y} \right)^2 = 1 \quad (13.2.11)$$

ここで, S_y は設計降伏応力, 1.27 は円筒の形状係数である.

設計時の弾塑性座屈時の部材力としては, 弾性ばりとしての応力状態を仮定して,

$$M_{cr} = \sigma_{b,cr}^p \cdot \pi R^2 t \quad (13.2.12)$$

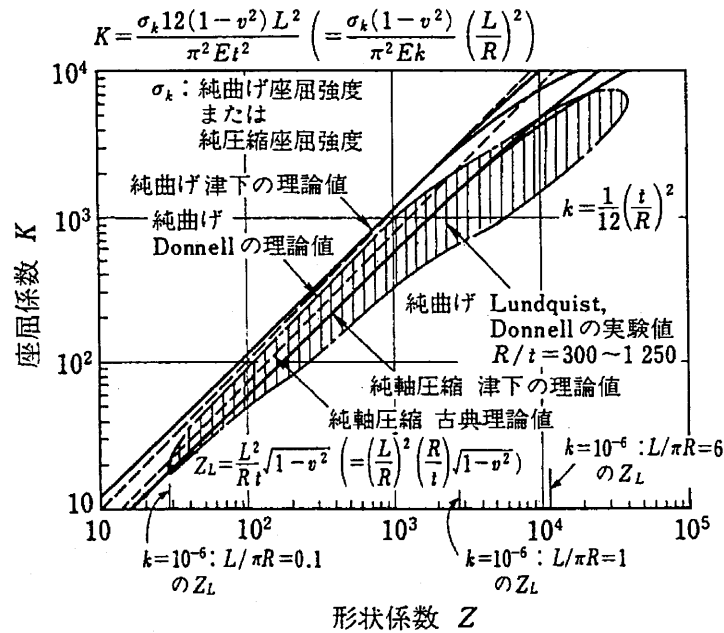


図 13.2.5 純曲げ座屈理論値と実験値の比較[津下, 1965; Lundquist, 1935; Donnell, 1976]

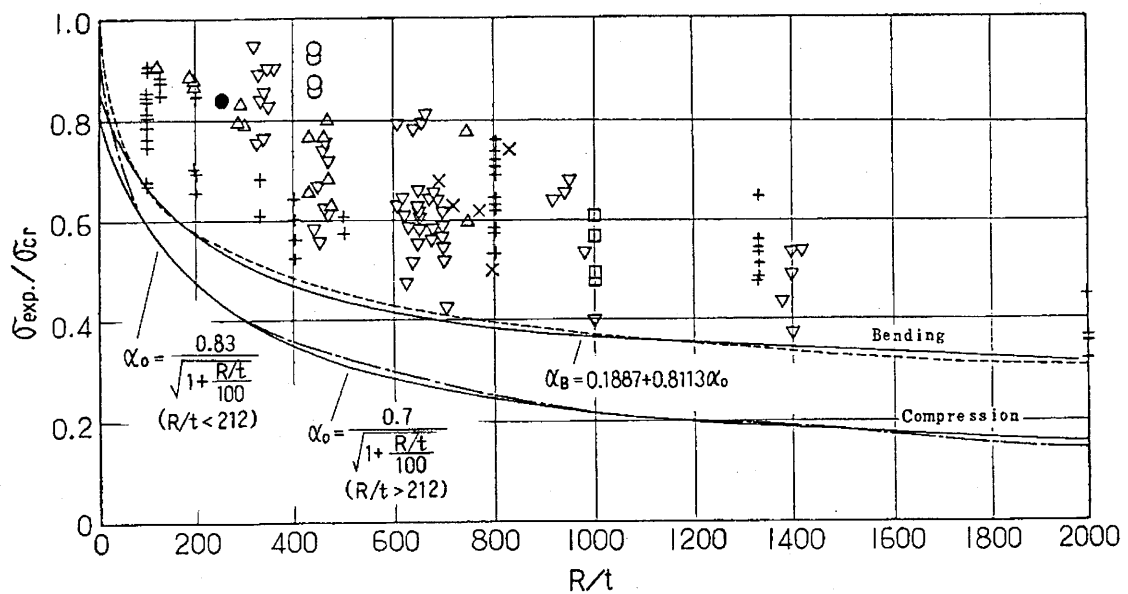


図 13.2.6 曲げを受ける円筒シェルの座屈強度 (実験値) [Esslinger et al., 1980]

を用いればよい。

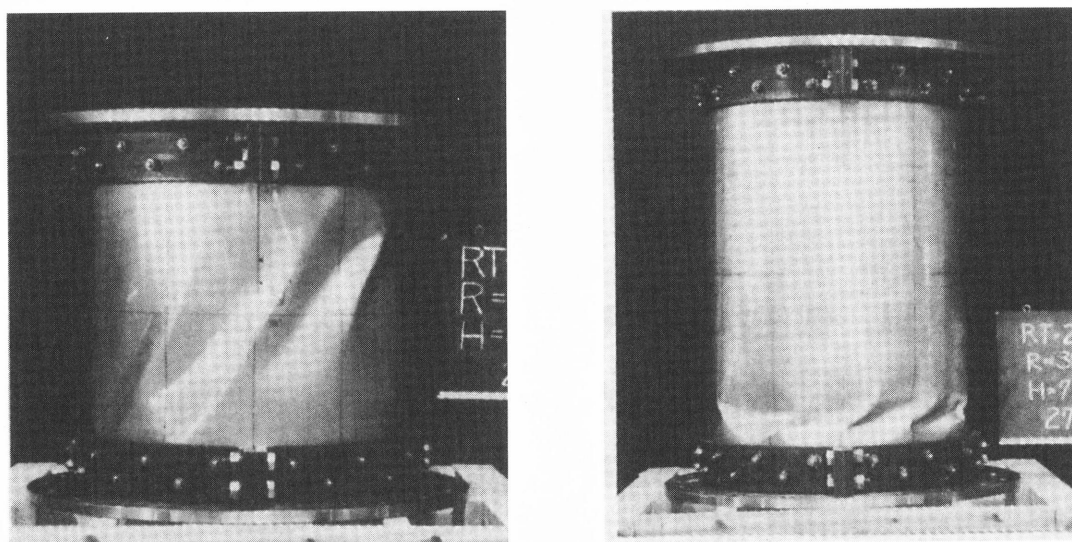
なお、軸圧縮の場合と同様、 R/t が 150 程度以下の鋼管の曲げ座屈に対しては、鋼構造物設計指針 [土木学会鋼構造委員会, 1997] において強度評価式が次のように与えられている。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{a,cr} &= 1.20\sigma_y & (R/t \leq 0.099) \\ \sigma_{a,cr} &= \left(0.867 + \frac{0.0330}{R/t} \right) \sigma_y & (0.099 < R/t \leq 0.279) \end{aligned} \right\} \quad (13.2.13)$$

ここで、 $R_t = 1.65(\sigma_y/E) \cdot (R/t)$ は径厚比パラメータである。

13.2.4 セン断力による座屈

前記の軸圧縮座屈、曲げ座屈に対して、横方向せん断力を受ける円筒シェルのせん断座屈に関する研究成果は量的に非常に少ないが、せん断座屈の研究については、Lundquist (ただし、弾性座屈のみ) [Lundquist, 1935], Galletry ら [Galletry et al., 1985], 秋山ら [秋山ら, 1987] により、鋼製あるいはアルミニウム合金製供試体を用いた実験的検討がなされた。Galletry らの少数の実験が高速増殖炉 (FBR) の炉構造を対象としているのに対して、他の実験供試体の形状パラメータは若干薄肉側にある。続いて、1990 年代は電力業界を中心に世界的に高速増殖炉の開発機運が高まり、特に地震の多い我が国では炉容器の耐震座屈設計が重要課題としてクローズアップされたため、欧米よりも若干厚肉側で、 $R/t = 100 \sim 200$ を中心とした短円筒シェルのせん断-曲げ座屈に関する検討がなされた (図 13.2.7, 図 13.2.8 参照)。本検討の特徴としては材料が SUS-304, SUS-316 であり、座屈荷重と同時に座屈後耐力の検討に重点が置かれたことである。



a) セン断座屈変形

b) 曲げ座屈変形

図 13.2.7 円筒シェルのせん断座屈と曲げ座屈[松浦ら, 1994]

せん断座屈の評価法について見ると、円筒シェルの弾性ねじり座屈式が Timoshenko により、また八巻によって半理論的に与えられており [Timoshenko, 1961; Yamaki, 1984], ASME Code Case N - 284 におけるせん断 (ねじり) 座屈の評価式の一部や Galletry らによるせん断-曲げ座屈試験結果の整理に用いられている。Timoshenko と八巻の式を以下に示す。

$$\text{(Timoshenko)} \quad \tau_{cr}^e = \frac{4.82}{\left(\frac{L}{\sqrt{Rt}}\right)^2} \sqrt{1 + 0.0239 \left(\frac{L}{\sqrt{Rt}}\right)^3} \frac{Et}{R} \quad (13.2.14)$$

$$\text{(八巻)} \quad \tau_{cr}^e = 0.74E \cdot \left(\frac{R}{L}\right)^{0.5} \left(\frac{t}{R}\right)^{1.25} \quad (13.2.15)$$

両式の値は、 R/t が大きく、 L/R が小さいほど近づき、逆は離れる傾向にあるが、その差はわずかであり、

$R/t = 200, L/R = 1$ で、約 0.74%,

$R/t = 100, L/R = 1$ で、約 2.1%

程度である。

式(13.2.14), (13.2.15)のねじり座屈の式に対して, 横方向力による純せん断座屈応力の式をどのように設定すべきかの検討は, 古くはLundquistによりなされている. Lundquistのせん断曲げ座屈試験データを整理すると, 曲げの影響が小さいと考えられる曲げせん断応力比が2以下のデータについては, いずれもねじり座屈に対するTimoshenkoの座屈係数を上回っている. Lundquistはこれらの結果から, 純せん断の座屈係数としてTimoshenkoの座屈係数の1.25倍を提案している. いずれにしても, ねじり座屈応力よりも, 純せん断座屈応力の方が解析的検討で1.1~1.2倍高くなり, 実験データによれば1.25倍程度高くなるということである.

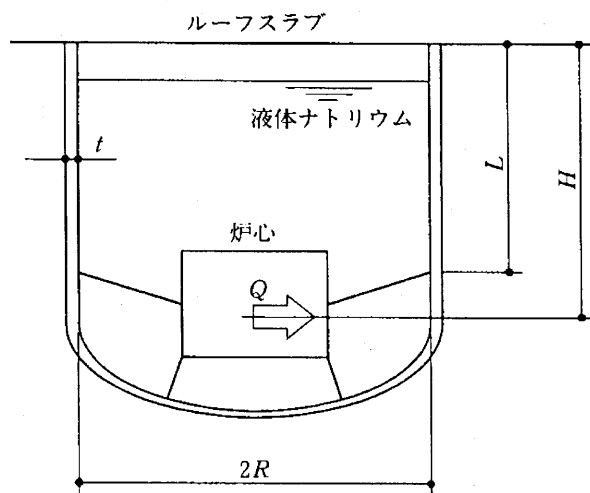


図13.2.8 タンク型高速増殖炉の概念図

次に, 半理論的な式(13.2.14), (13.2.15)による値と実験値との比較を試みると, 秋山らのせん断曲げ座屈試験データ, Gallettyらのデータ, 高速増殖炉関連のデータを整理すれば, ねじり座屈式に係数0.8を乗じることで, 種々の材料の弾性座屈から弾塑性座屈に対して, 下限を与えることが明らかになっている. したがって, 松浦・中村らは, 弾性せん断座屈応力 τ_{cr}^e の評価式として次式を与えている[松浦ら, 1994].

$$\tau_{cr}^e = 0.8 \cdot \frac{4.82}{\left(\frac{L}{\sqrt{Rt}}\right)^2} \sqrt{1 + 0.0239 \left(\frac{L}{\sqrt{Rt}}\right)^3} \frac{Et}{R} \quad (13.2.16)$$

塑性領域の座屈については, 幾つかの考え方がある. ここでも, 弾性1次, 塑性2次の修正を行うとすれば, 設計における弾塑性せん断座屈応力 τ_{cr}^p は次式で求められる.

$$\frac{\tau_{cr}^p}{\tau_{cr}^e} + \left(\frac{\sqrt{3}\tau_{cr}^p}{1.27S_y} \right)^2 = 1 \quad (13.2.17)$$

ここで, S_y は設計降伏応力であり, 1.27は円筒の形状係数である.

弾塑性せん断座屈時の部材力としては, せん断応力分布を弾性はりと同様に仮定すれば,

$$Q_{cr} = \tau_{cr}^p \cdot \pi R t \quad (13.2.18)$$

となる.

なお, 軸圧縮座屈, 曲げ座屈の場合と同様, R/t が150程度以下の鋼管のせん断座屈に対しては, 鋼構造物設計指針[土木学会鋼構造委員会, 1997]において, 強度評価式が次のように与えられている.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{cr}^p &= \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} & (R_\tau \leq 0.682) \\ \tau_{cr}^p &= \frac{0.57}{R_\tau^{1.25}} \tau_y = \frac{0.57}{R_\tau^{1.25}} \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} & (0.682 < R_\tau \leq 1.50) \end{aligned} \right\} \quad (13.2.19)$$

ここで, $R_\tau = 2.63(\sigma_y/\sqrt{3E})^{0.8} \cdot (R/t)$ は径厚比パラメータである.

13.2.5 ねじりモーメントによる座屈

円筒シェルにねじりが作用する場合には、一般に座屈後大幅に強度が低下するようなことはなく、初期不整の影響もあまり大きくはない。表 13.2.1 に示した境界条件のうち、F1, F2 を除く 8 種類の境界条件の下での座屈強度が、八巻らにより図 13.2.9 のように与えられている [八巻, 1971]。境界条件 C2, C3 および S2, S3 に対する曲線は、それぞれ C1 と C4 および S1 と S4 に対する曲線で挟まれる。これらの曲線は

$$100 \leq Z \leq 76.8(1 - \nu^2) \left(\frac{R}{t} \right)^2 \quad (13.2.20)$$

の中間的な長さの円筒シェルでは、ほぼ一つの曲線

$$k_{tcr} = 0.85Z^{3/4} \quad (13.2.21)$$

になる。ここに、

$$k_{tcr} \equiv \tau_{tcr} L^2 t / \pi^2 D$$

はねじり座屈の座屈荷重係数、 τ_{tcr} はねじりせん断座屈強度である。

円筒シェルが十分長くなった場合は、座屈荷重係数は境界条件に無関係に $2\sqrt{2}\sqrt{1-\nu^2}Z$ に近づくことが計算結果からわかっている。

以上の解析理論的立場に対して、前述の通りねじり座屈強度の式は、半理論的に Timoshenko により与えられており、式 (13.2.14) で表されるが、実験値との比較は図 13.2.10 に示した通りであり、実験値のほぼ上縁に半理論値が位置していることは留意すべきである。信頼できる実験データの下限に式を設定するのであれば、 $L/\sqrt{Rt}$ の値にもよるが、式 (13.2.14) に対して 0.7 倍程度に低減する必要がある。塑性領域の座屈については、弾性 1 次、塑性 2 次の修正を行うとすれば、設計における弾塑性せん断座屈応力 τ_{cr}^p は次式で求められる。

$$\frac{\tau_{cr}^p}{\tau_{cr}^e} + \left(\frac{\sqrt{3}\tau_{cr}^p}{S_y} \right)^2 = 1 \quad (13.2.22)$$

ここで、 S_y は設計降伏応力である。

座屈時の部材力としては、次式を用いればよい。

$$T_{cr} = \tau_{cr}^p \cdot 2\pi R^2 t \quad (13.2.23)$$

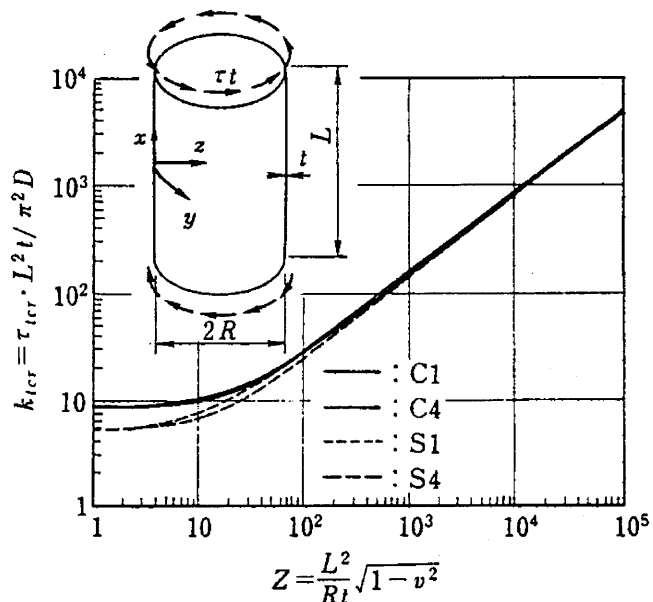


図 13.2.9 ねじり座屈強度曲線 [八巻, 1971]

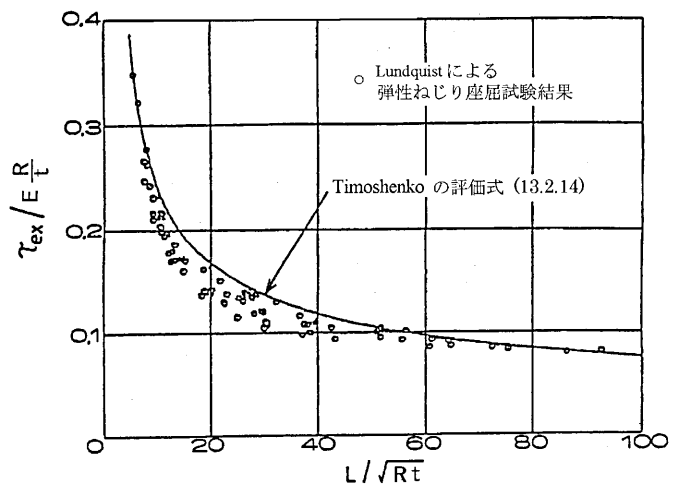


図 13.2.10 ねじり座屈の理論値と実験値の比較

13.2.6 軸力・曲げモーメントとせん断力による連成座屈

円筒シェルのせん断座屈, 曲げ座屈, 軸圧縮座屈の各モードの重畳に対しては以下のような特徴がある。

- せん断と曲げはそれぞれの最大応力の発生場所が異なり, 相互の連成は小さい。最大せん断応力と最大曲げ応力の比を変えた解析的検討によれば, 通常よく使用される2乗の相互作用よりもむしろ無相関に近いが, わずかながら曲げとせん断の重畳による荷重低下が見られる。
- 曲げ座屈と軸圧縮座屈については, 発生応力, 座屈変形とも類似しているため, 相互の連成は大きい。
- せん断座屈と軸圧縮座屈については, 軸圧縮力が付加的に作用する条件下では相互の連成は小さい。軸引張力が付加的に作用する場合, せん断座屈荷重はほとんど変化しない(座屈後の荷重低下は緩やかになり, より安定な挙動を示す)。
- 塑性せん断-曲げ座屈に関する軸圧縮力の影響については, 軸圧縮力の増加とともに座屈荷重の多少の低下が見られるが, 軸圧縮力が軸圧縮座屈荷重の約20%程度までの範囲では低下はわずかである。また, 座屈前後の荷重-変位関係の基本的特性もほとんど変化しないため, 軸圧縮力の作用しない場合の判定式がそのまま用いられるものと考えられる。これに対し, 軸圧縮力が軸圧縮座屈荷重の50%程度まで達すると, 曲げ座屈荷重の低下, 座屈後の耐荷力の低下が著しくなる。

以上のa)～d)を考慮し, 単独の弾性座屈評価式, 塑性修正法, 相互作用効果等について, 試験結果に基づいて検討すれば, 曲げと軸圧縮には線形の相互作用則を, せん断と曲げの間では3～5乗の相互作用則を採用するのが適切と考えられている。

式(13.2.24), (13.2.25)により, Lundquist, Gallettyら, 秋山ら, および松浦らの実験データ[松浦ら, 1994]を整理した結果を図13.2.11に示す。本図は非常に広い形状比(例えば, 半径対板厚比=100～1300程度, 長さ対半径比4以上を含む), 種々の材料, 製法の供試体による試験結果を含んでおり, 形状不整等の情報がないものがほとんどである。そのため厳密な定量的検討には適当ではないが, 評価式が曲げからせん断, 弾性から弾塑性の広い範囲で実験値をどの程度カバーしているかを把握することができる。

これらの事実から, 軸力・曲げモーメントとせん断力による連成座屈の評価にあたって

は, 軸力と曲げモーメントを1次の連成で考慮し, それらとせん断力については3次, あるいは5次程度の連成で考慮するのが実験結果に照らして適切との結論に到達する。式で表せば次の通りである。

$$\left(\frac{Q}{Q_{cr}}\right)^3 + \left(\frac{M}{M_{cr}} - \frac{F}{F_{cr}}\right)^3 < 1 \quad (F \leq 0: \text{圧縮力の場合}) \quad (13.2.24)$$

$$\left(\frac{Q}{Q_{cr}}\right)^3 + \left(\frac{M - \frac{W}{A}F}{M_{cr}}\right)^3 < 1 \quad (F > 0: \text{引張力の場合}) \quad (13.2.25)$$

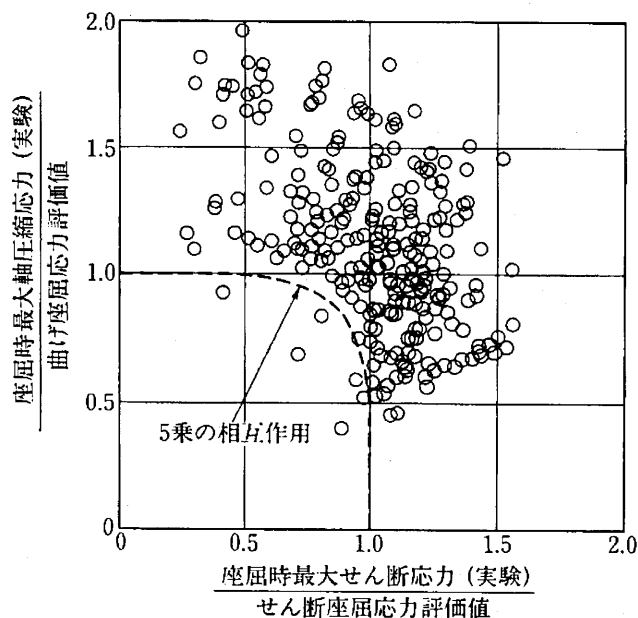
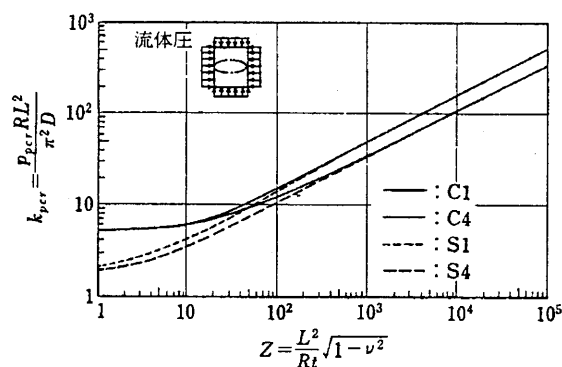
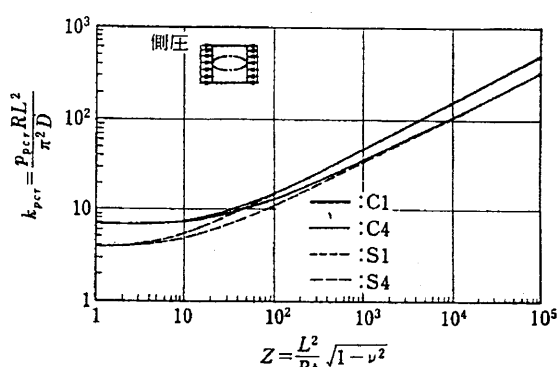


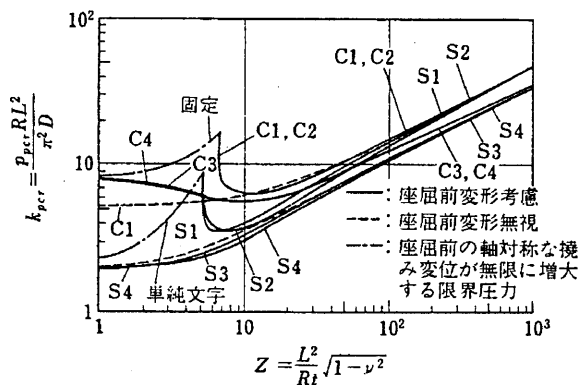
図13.2.11 せん断座屈と曲げ座屈の相互作用[松浦ら, 1994]



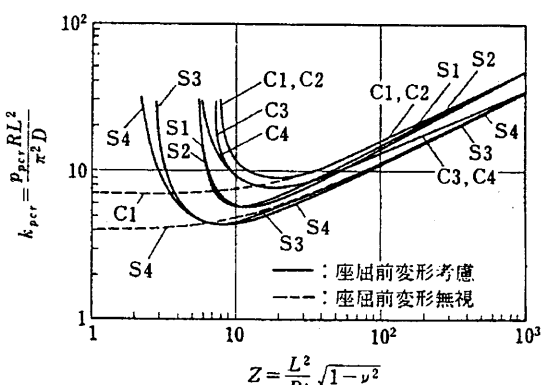
(a) 座屈前変形を無視 (Z の小さい領域では誤差が大きい → 図(b) 参照)



(a) 座屈前変形を無視 (Z の小さい領域では誤差が大きい → 図(b) 参照)



(b) Z の小さい領域での結果 ($\nu = 0.3$)



(b) Z の小さい領域での結果 ($\nu = 0.3$)

図 13.2.12 液体圧による座屈強度

[八巻, 1968/1969; 1969/1970]

図 13.2.13 側圧による座屈強度

[八巻, 1968/1969; 1969/1970]

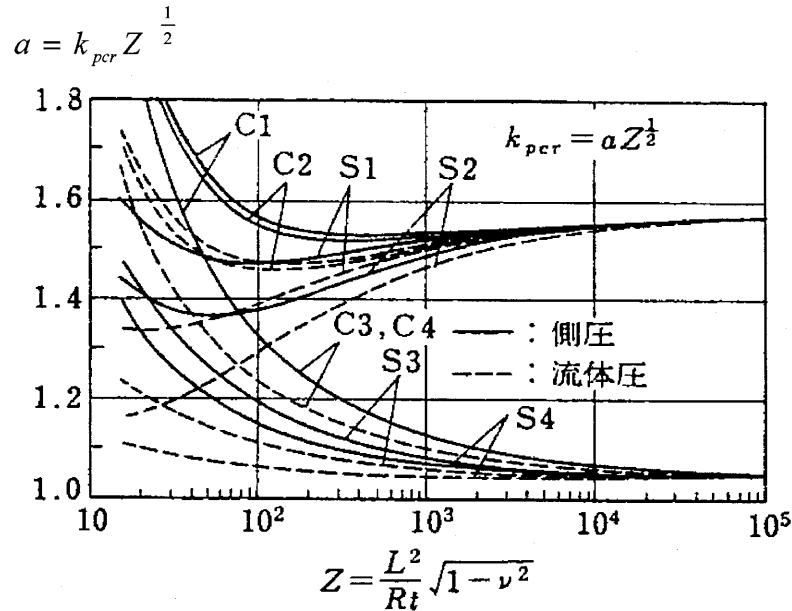
ここで, A は断面積, W は円筒シェルの断面係数, F_{cr} , M_{cr} , Q_{cr} はそれぞれ式 (13.2.6), (13.2.12), (13.2.18) に対する値である。

13.2.7 外圧による座屈

外圧を受ける円筒シェルの崩壊挙動は柱の崩壊挙動に類似しており, 柱の細長比 (L_k/r) (L_k : 柱座屈に対する有効長さ) に対応する円筒シェルの薄さ係数は $K_c = (2R/t)^{3/4} \sqrt{(L/2R)(\sigma_y/E)}$ によって与えられる。大略的には $K_c > 1.2$ では弾性座屈, $0.8 < K_c < 1.2$ では非弾性座屈, $K_c < 0.8$ では降伏崩壊が生ずる。以下は, 弾性座屈を対象としたものである。

(1) 一様外圧による座屈

ねじり座屈の場合と同様に表 13.2.1 に示す C1~S4 の 8 種類の境界条件の下での無次元化した座屈強度 (座屈係数) k_{per} と形状係数 Z との関係を図 13.2.12 および図 13.2.13 に示す。ただし, 図 13.2.12 はバルクヘッドにも圧力が作用する流体圧に対する結果であり, 図 13.2.13 は側面のみに圧力が作用する側圧に対する結果である。また, 図 13.2.12(a) および図 13.2.13(a) の曲線を $k_{per} = a\sqrt{Z}$ とおいたときの a の値を図 13.2.14 に示す。なお, 文献 [Johnston, 1976] には座屈強度に対する近似式が形状係数の適用範囲を分けて示されている。また, そこではヘッドが半球形であって安定な場合には各ヘッドにつき R/n だけ軸長を長くとしている。 n はそのような等価な円筒シェルの周方向座屈波数である。

図 13.2.14 近似式の係数 a の値[八巻, 1968/1969]

およそ $Z > 200$ においては周方向変位の拘束の有無が支配的となり、周方向変位を拘束したときの座屈強度は拘束しないときのそれより約 50 % 大きい。 $Z \geq 1000$ では境界条件 C1, C2, S1, S2 に対しては、 $a = 1.51 \pm 3\%$ 、C3, C4, S3, S4 に対しては $a = 1.08 \pm 4\%$ と置くことができる。なお、同一の形状係数および境界条件の下では、側圧に対する座屈強度は流体圧に対するそれより常に大きい。流体圧が作用する場合、 Z がある値より小さい領域では周方向変位が拘束されているときの座屈強度は無限大となり、座屈が生ずる以前に座屈前変形が無限大となる (図 13.2.12(b))。このときの耐荷力は次式、

$$\text{両端固定の場合} \quad k_{pc} = 20 + \frac{15}{16} Z_0 - \left(144 - \frac{27}{2} Z_0 + \frac{145}{256} Z_0^2 \right)^{1/2} \quad (13.2.26)$$

$$\text{両端単純支持の場合} \quad k_{pc} = 2(1 + Z_0) \quad (13.2.27)$$

ここに、 $Z_0 = (12/\pi^4) \cdot Z^2$ で与えられる。

一方、側圧を受ける極く短い円筒シェルでは境界条件に拘わらず座屈を生じる前に軸対称変形によって降伏破壊する。外圧 p による周方向の圧縮応力は pR/t である。

(2) 直線的に変化する外側圧による座屈

海中貯蔵タンクや土中貯蔵タンクなどにおいてはこのような荷重条件による座屈を考慮する必要がある。この問題に関して植村ら [植村ら, 1971] は軸方向外圧力を考慮する場合と、しない場合の 2 つのケースについて、両端単純支持の境界条件の下に座屈強度を求めている。これによれば R/L が極端に小さい長い円筒シェルを除いて、座屈強度は平均圧力が均一に作用する場合の座屈強度より数 % 低くなる。極端に長い円筒シェルの場合は外圧の小さい部分には無関係に外圧の大きい部分が座屈する。

(3) ライナーの座屈

コンクリートタンクや圧力鉄管のライナーあるいは化学プラント用圧力容器内における防食対策として用いられる内張り板は、供用時に熱応力、種々の圧力などの作用を受け、外側の構造本体による拘束のため、内側のみ変形し得る特性を有する。このようなシェルの座屈を取り扱ったものとして、松原らの論文 [松原ら, 1979; 松原ら, 1982] がある。

13.2.8 パイプ・シェルの初期不整

製造過程を問わず、現実には製作されたパイプ・シェルには必ず形状の不完全性や残留応力などの初期不整が存在する。すでに、13.2.2～13.2.5 で弾性理論値と実験値の違いを示し、実験値を踏まえた座屈評価式を示した通り、初期不整などの影響によって実際のパイプ・シェルの座屈耐荷力は初期不整のない完全な構造を対象とした座屈強度よりも低い値を示し、特に薄肉円筒シェルの場合は理論値の $1/10$ 程度になることもある。本節では、まずパイプおよび円筒シェルの製作方法、材料の力学的特性ならびに初期不整の程度について述べ、次いで座屈耐荷力に及ぼす初期不整の影響の解析的検討結果の例を示す。

(1) パイプおよび円筒シェルの製作方法

製作方法は大きく分けて圧延工程を経て所定の寸法形状に仕上げる方法（製造管）と、炭素鋼、高張力低合金鋼構造用鋼、軽量構造用合金などの冷間または熱間成形構造用板材を溶接または機械的接合により組立てる方法（製作管）とがある。さらに前者の圧延工程を分類すると、

- 1) ロッドの打抜、内枠を挿入してのロール圧延、最終仕上げ成形を行う方法（シームレスパイプ）
- 2) 熱間成形ロール帯板の連続高温圧接による方法
- 3) 冷間加工ロール板の両端を電気抵抗溶接する方法（電縫管）
- 4) 冷間加工成形管状板の長手方向またはらせん状溶け込み溶接による方法（通常 SMA 溶接）
- 5) 主に非鉄金属を対象とした熱間押し抜き冷間引伸し成形の方法

などがある。

後者の組立てパイプ・シェルは通常仕上げ処理を受けず、圧延パイプ・シェルに比べかなり大きな形状不整を有する。一方、残留応力の大きさは前者の方が大きい。

(2) 材料の力学的特性

パイプ断面の基本的な応力-ひずみ関係は、

- 1) 降伏点応力まで直線でその後はほぼ一定応力の下で塑性変形を伴う。
- 2) 降伏点以下の比例限度まで直線で、その後、徐々に非線形的に降伏する。

のどちらかである。残留応力が存在すると応力-ひずみ関係は非線形領域が下側に移動し、1) の場合にも明確な降伏点を示さなくなる。残留応力は最も一般的には熱間仕上げの後の冷却工程、溶接工程、および成形工程において導入されるそり返し防止処理によって発生する。圧延パイプの縦方向残留応力は筒壁の板厚方向に渡る非一様な塑性流れの結果として生じることもある。

パイプ・シェルの製作方法との関連では、一般に熱間仕上げされたパイプが明瞭な降伏を示すのに対し、冷間仕上げされたパイプは滑らかな降伏挙動を呈する。ステンレス鋼やアルミニウムのような材料を用いたパイプは使用材料と同様の応力-ひずみ特性を有し、製作方法によらず滑らかな降伏を示す。

以上のように定性的な挙動は把握できるものの、個別のパイプ部材の正確な応力-ひずみ曲線の形状、比例限度および降伏強度などを事前に予測することは困難である。この問題を解決する一つの有効な方法としては、実断面を有する短柱の試験を実際に行ってパイプ部材としての応力-ひずみ曲線を得る方法が考えられる。

(3) 初期不整の程度

初期不整データについては、第 6 章 にまとめられている。しかし、上記の製作方法によって製作したパイプおよびシェルの初期不整の具体的な大きさについての一般的議論は、板厚、径、溶接の具体的方法等の要因がさらに加わるので難しい。多くの試験計測データのデータベース化が待たれるところである。

座屈耐力の観点から形状不整範囲を制限するとすれば、ゲージ長における不整の最大振幅を板厚程度以下に抑えるのが適切であろう。

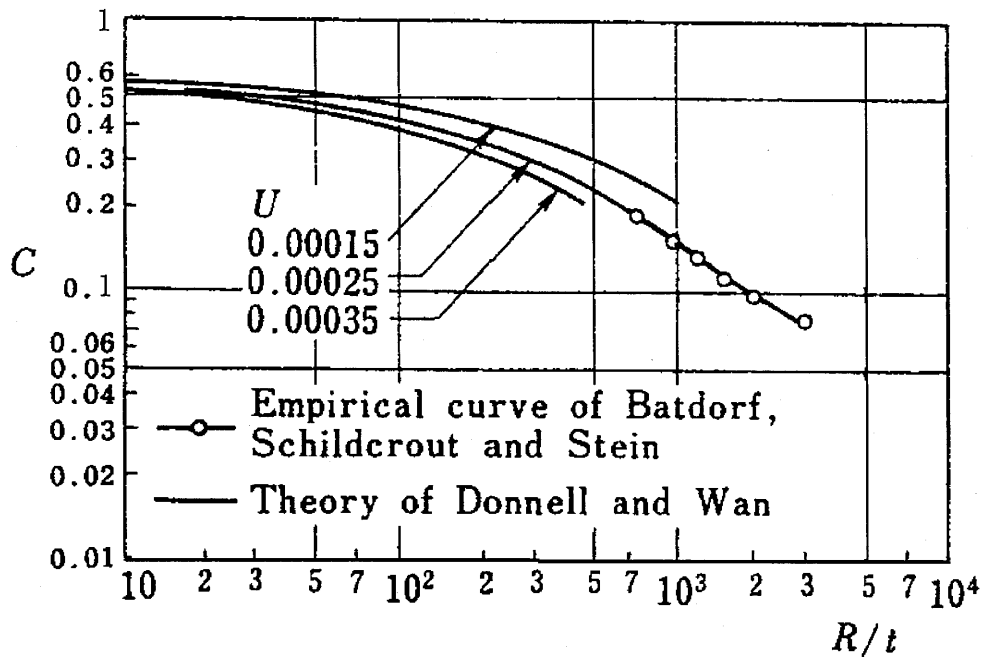


図 13.2.15 軸圧縮を受ける初期たわみのある円筒シェルの座屈係数 C [Batdorf, 1947]

(4) 初期たわみを有する円筒シェルの軸圧縮座屈強度

座屈強度 σ_{xc} を古典座屈強度と同じ形式で表わせば,

$$\sigma_{xc} = C \cdot \frac{Et}{R} \quad (13.2.28)$$

となる. 初期たわみの効果は係数 C に含まれる. 係数 C は半径対板厚比 R/t の関数でもある. Donnell は初期たわみの大きさを表すパラメータ U を導入して, 初期たわみの座屈耐荷力に及ぼす影響を 図 13.2.15 に示すようにまとめている.

a) 十分に長い円筒シェル

Batdorf らは $R/t > 500$ の航空機構造を対象とした実験により, $L/R \geq 1$ の円筒シェルに対する係数 C の実験曲線を求めているが, Donnell らの $U = 0.00025$ に対する結果と良く一致している [Batdorf, 1947].

また, 図 13.2.16(a) は軸対称初期たわみを考えた Koiter, Almroth, Hutchinson らの結果である [安川ら, 1983]. 横軸は板厚 t で無次元化した初期たわみの大きさ (δ/t) であり, 縦軸は古典座屈強度 P_{cl} で無次元化した座屈荷重 (P/P_{cl}) である. 軸対称初期たわみと非軸対称初期たわみとを比べて, どちらが座屈荷重の低下率に及ぼす影響が大であるかについては, 前者の影響が大であるとの報告もあるが, 未だ十分に明らかにされていない.

b) 短い円筒シェル

$R/t = 1000$, $Z \leq 50$ ($L/R \leq (1/20\sqrt{1-\nu^2})^{1/2}$) の円筒シェルを対象とし軸方向に正弦 1 半波から 4 半波の軸対称初期たわみ波形を採用した安川らの FEM 解析によれば初期たわみの影響は次のようにまとめられる (図 13.2.16(b) 参照) [安川ら, 1983].

- ① 座屈荷重の低下の割合は $R/t = 100 \sim 1000$ の範囲であれば R/t にあまり影響されない.
- ② Z が小さくなるほどシェルより平板に近くなるため, 初期不整の座屈に及ぼす影響は小さくなる.
- ③ $\delta/t = 0.2$ の場合, Z が大きくなると共に最小の座屈荷重を与える初期たわみ波形は次第に波数が増加す

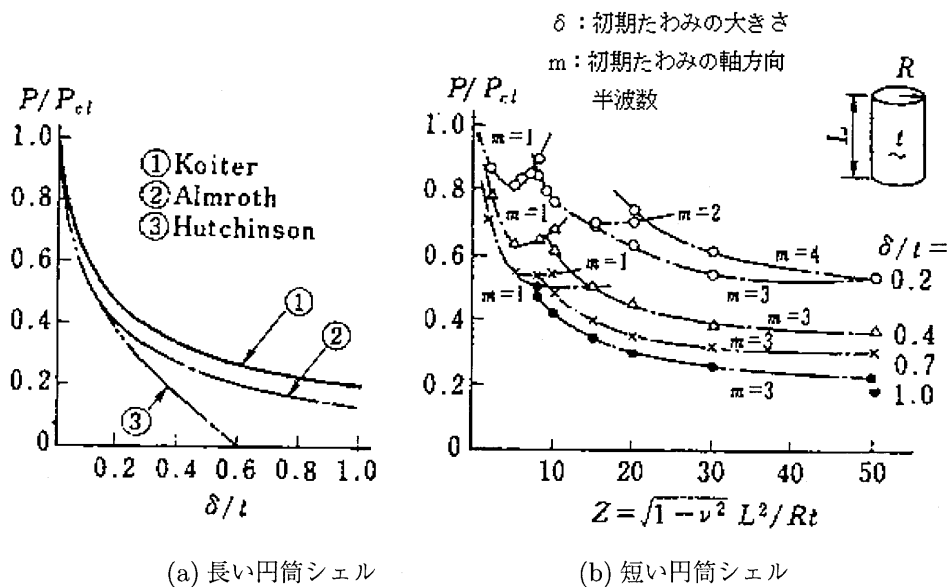


図 13.2.16 軸圧縮を受ける円筒シェルの座屈耐荷力に及ぼす初期たわみの影響[安川ら, 1983]

る。逆に $m = 2$ (m は初期たわみの軸方向半波数) の初期たわみに着目すると最小の座屈値を与える Z の領域は狭く, $\delta/t \geq 0.4$ になるとその領域は存在しない。

なお, 安川らは初期たわみ波形として正弦 1 半波を仮定し, 内側および外側初期たわみの両方を考えた $Z \leq 10$ の短い円筒シェルについての塑性崩壊解析結果も示している。

(5) 初期たわみを有する円筒シェルの外圧による座屈

この場合の座屈強度は通常, 非軸対称座屈波形を初期たわみモードとして仮定し, シェルに降伏域が生じ始めるときの外圧 p_y をもって定義されている。 $n = 2$ の場合には p_y は次式で求められる。

$$p_y^2 - \left[\frac{\sigma_y t}{R} + \left\{ 1 + \frac{3Re_0}{t} \right\} p_{cr} \right] p_y + \frac{\sigma_y t}{R} p_{cr} = 0 \quad (13.2.29)$$

ここに, $e_0 = (R_{\max} - R_{\min})/R$ は初期たわみの大きさ, p_{cr} は初期たわみがない場合の座屈強度, $R_{\max}, R_{\min}$ はそれぞれ最大, および最小半径である。

$n > 2$ に対しては Kendrick による式を用いなければならない [Johnston, 1976]。なお, e_0 は実状に応じて決定すべきであるが, 参考として挙げれば API-RP-2A では, $e_0 = 0.01$ としている。

13.3 曲面板およびシェル状構造物の座屈

円筒シェル以外の一般のシェルにおいても座屈強度に及ぼす種々の因子の影響は円筒シェルに対するそれとほぼ同様に存在すると考えられるが, 円筒シェル以外のシェルに対しては 13.2 で述べたような詳細な検討は未だなされていない。本節では基本的な結果のみ示す。

13.3.1 外圧を受ける回転体シェルの座屈

(1) 球形シェル

半径 R , 板厚 t の球形シェルに一樣外圧が作用するときの座屈強度は, 古典理論では半径 R , 板厚 t の円筒シェルの座屈強度と等しく, 次式で与えられる。

$$\sigma_{cl} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{Et}{R} \quad (13.3.1a)$$

あるいは、座屈圧力としては次式で与えられる。

$$p_{cl} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot E \left(\frac{t}{R} \right)^2 \quad (13.3.1b)$$

式(13.3.1a)の座屈応力が、軸圧縮力を受ける円筒シェルの古典座屈応力に等しいことは、球形シェルの座屈現象が初期不整に対して敏感であることを示唆している。

(2) 浅い球形シェル

一様外圧を受ける周辺固定部分球形シェルの座屈解析に関しては Budiansky(1959), Weinitschke(1960), Huang(1964) によって得られた結果が代表的である。これとは別に角野ら(1983)は比較的開角の大きいシェルにも適用可能な結果を、周辺固定および周辺単純支持の境界条件に対して得ている。さらに小久保ら(1982)が座屈強度に及ぼす境界条件の影響を検討し実験結果との比較を行っている。また、補剛および初期不整の影響については山田ら(1980)の資料がある。

なお部分球形シェルの形状係数 λ は $\lambda = r_a^4 / R^2 t^2$ によって与えられる。ただし、 R は球の曲率半径、 r_a は支持縁円の曲率半径である。

(3) 円錐形シェル

外圧を受ける円錐形シェルの座屈については、Pflüger と徳川の研究 [林, 1961] がある。前者は板厚が頂点からの距離に比例する円錐形シェルを対象として、軸方向の分布荷重および表面圧力を受けるときの座屈荷重を微小変形理論により求めている。一方、後者では、一様外圧を受ける場合について、多くの実験結果から座屈外圧の実用式を求めている。

(4) 双曲線回転体シェル

Der と Fidler は、電気成形銅およびポリ塩化ビニール製鑄造模型の風洞実験により、座屈外圧力として次式を与えている [Der et al., 1968]。

$$p_{cr} = C \cdot E \left(\frac{t}{R_T} \right)^n \quad (13.3.2)$$

ここに、 R_T はのど厚径であり、 $C = 0.064$, $n = 2.3$ である。

13.3.2 曲面板の座屈

この問題は實際上、補剛円筒シェル中の補剛材で囲まれた1パネルの座屈問題として生じることが多い。

(1) 円筒パネルの座屈

軸圧縮力による座屈、せん断力による座屈については幾つかの理論解および実験式が与えられている。しかし、外圧による座屈については、十分長い円筒パネルの場合には曲りはりと同様な結果となることが知られているが、通常の場合には周辺境界条件の影響が入り、周辺固定で浅い円筒パネルに対しては解析結果があるものの、それ以外にはFEM等による数値計算例が見られる程度である。

圧縮座屈、せん断座屈については、中心角が大きければ、境界条件にもよるが基本的にはパネルと同じ長さの円筒シェルの結果を用いることができる。また、中心角が十分小さくなった場合には平板の結果と一致する。すなわち、軸圧縮力を受ける円筒パネルの座屈の場合、座屈強度は次式で与えられる。

$$\sigma_{xcr} = \frac{k_{xcr} \pi^2 D}{L_s^2 t}, \quad k_{xcr} = \begin{cases} \left(\frac{L_s}{L} + \frac{L}{L_s} \right)^2 & : \frac{L}{L_s} < 1 \\ 4.0 & : \frac{L}{L_s} \geq 1 \end{cases} \quad (13.3.3a,b)$$

ここに、 L は軸方向長さ（または周方向補剛材の軸方向間隔）、 L_s は周方向長さ（または軸方向補剛材の周方向間隔）であり、 D は板の曲げ剛性、 t は板厚である。

(2) 円筒パネルの有効幅

補剛材に作用する軸応力が σ_L のとき有効幅 b_m は、

$$b_m = \bar{b}_m + \frac{\sigma_R}{\sigma_L}(b - \bar{b}_m) \quad \text{または、} \quad \sigma_L \cdot b_m = \sigma_R \cdot b + (\sigma_L - \sigma_R) \cdot \bar{b}_m \quad (13.3.4)$$

ここに、 σ_R は円筒パネルの座屈応力であり、 b はパネルの周に沿った幅、 $\bar{b}_m$ は $\sqrt[3]{\sigma_R/(\sigma_L - \sigma_R)} \cdot b$ である [Ebner, 1937]。

13.3.3 シェル状構造物の座屈

シェル状構造物にはトラスシェルまたは綱目状トラス、シェル状フレーム、補剛シェル、異方性シェル、サンドウィッチシェル、その他がある。ドーム屋根、円筒形トラス屋根、圧力容器、冷却塔などはこのようなシェル状構造物で構成される構造の例である。シェル状構造物に生じる座屈は大別して全体座屈、局部座屈および部材座屈である。部材座屈は基本的には柱としての座屈であり、これについては既に述べた通りである。シェル状構造の座屈は 13.5 で詳述する補剛円筒シェルの座屈と同様、端部境界条件、初期不整、材料非線形特性の影響を受ける。

(1) 有効膜厚・板厚と球形シェル状構造物の全体座屈

シェル状構造物の全体座屈は剛性分離の考え方により解析することができる。この考え方では、面内剛性を評価する際の板厚 t_m と面外曲げ剛性を評価する際の板厚 t_b とを独立に取り扱うことになる。例えば、直交かつ等間隔に一樣断面部材を配置したシェル状フレームの場合、それぞれ次式が用いられる。

$$t_m = \frac{A}{d}, \quad t_b = \sqrt[3]{\frac{12I}{d}} \quad (13.3.5a,b)$$

ただし、 A は部材断面積、 I は部材断面二次モーメント、 d は部材間距離、ポアソン比は 0 としている。

一樣外圧を受ける半径 R の球形シェル状構造を例にとれば弾性座屈荷重 p_{crE} は次式で与えられる。

$$p_{crE} = C \cdot E \cdot \left(\frac{t_m}{R}\right)^2 \left(\frac{t_b}{t_m}\right)^{3/2} \quad (13.3.6)$$

なお係数 C の値は研究者によって異なった値が提案されており、von Karman, Tsien 流の手法を用いた Buchert による 0.365 から Klöppel, Jungbluth の古典差分理論による 1.16 ($\nu = 0$) までの幅がある [Buchert, 1965]。前記の諸因子の影響の下での実験結果は $C = 0 \sim 0.90$ の間にあり、それらを考慮して、例えば、ASME の圧力容器の規定では $C = 0.25$ を用いている。

(2) 変形を考慮した球形シェル状構造物の外圧による非弾性座屈

非弾性座屈荷重は次式で表わされる [Johnston, 1976]。

$$p_{crP} = \eta \cdot p_{crE} \quad (13.3.7a)$$

ここに、 η は塑性低減係数であり、

$$\eta = \frac{\sqrt{E_s E_t}}{E} \quad \text{あるいは、} \quad \eta = \frac{3}{4E} \left(E_t + \frac{E_s}{3}\right) \quad (13.3.7b)$$

ただし、 E_s, E_t は最大膜応力の下での値を用いるが、上記の両式による差は 5 % 以内であり実験結果も 10 % 以内に入る。

シェル状構造の場合、たわみが有効膜厚の20～30倍となることも多いが、縁端境界条件や初期不整の影響も含めて変形が座屈耐力に及ぼす影響は非常に大きい。Buchert は変形を考慮した非弾性座屈耐力を次のように与えており、実験結果と15%以内で一致すると報告している [Buchert, 1965]。

$$p_{cr} = \frac{8}{3} \eta E \left(\frac{t_m}{R} \right)^2 \left[\left\{ 0.21 \left(\frac{\Delta}{t_m} \right)^2 + 0.0715 \left(\frac{t_b}{t_m} \right)^3 \right\}^{1/2} - 0.459 \frac{\Delta}{t_m} \right] \quad (13.3.8)$$

ここに、 Δ は完全形状からの法線方向最大変位であり初期不整等による変位を含んでいる。

(3) 球形シェル状構造の局部座屈

a) 正三角形網目状シェルの局部座屈

網目状シェルの局部座屈はある1つの格点に荷重が作用し、その格点部の曲率が逆転するほど相対的に大きな変位を生じる現象をいい、部材形状と格点剛性が支配因子となる。格点部がピン結合され曲げ剛性0の場合、隣接格点の変位を拘束するか、あるいは非拘束とするかにより座屈荷重はそれぞれ次のようになる。

$$W_{cr} = \frac{2AEH^3}{\sqrt{3}L^3} \quad (\text{隣接格点変位拘束}) \quad (13.3.9a)$$

$$W_{cr} = \frac{AEH^3}{\sqrt{3}L^3} \quad (\text{隣接格点変位非拘束}) \quad (13.3.9b)$$

ここに、 H は隣接格点の構成する面と載荷格点との距離、 A, L は部材の断面積および長さである。

格点部曲げ剛性が部材曲げ剛性に等しい場合の座屈判定基準は、隣接格点の拘束条件に応じて次式が与えられている。

$$\left(\frac{R}{L^2} \sqrt{\frac{I}{A}} \right) \leq \begin{cases} 0.092 & (\text{拘束}) \\ 0.132 & (\text{非拘束}) \end{cases} \quad (13.3.10)$$

b) 補剛シェルの局部座屈

補剛シェルの補剛材間の座屈であり、外圧の場合の座屈荷重は次の通りである [Buchert, 1965]。

$$p_{cr} = \frac{7.4Et^3}{Rd^2} \quad (13.3.11)$$

ただし、 d は補剛材間隔である。

13.4 曲り管の耐力

曲り管（エルボ）は配管系などに用いられる場合が多く、小口径で相対的に厚肉の場合が多い。面内、面外方向の荷重に対して、いわゆる座屈的な挙動を示すことなく崩壊に至るため、主として実験で得られた崩壊モーメントを直管との比で示すことにより、耐力特性を示すことが行われている。

13.4.1 曲り管の面内耐力

エルボの面内曲げによる耐力は閉方向の変形によるエルボ断面の扁平化により決まり、エルボ側部の破損箇所は周方向の曲げが支配的である。

エルボの破損箇所のひずみ挙動について見ると、周方向曲げによるひずみはエルボの扁平化に伴って低い荷重段階から生じ、周方向曲げひずみの急増点として「座屈点」を定義することはできない。パイプ係数 λ を、

$$\lambda = R \cdot t / r^2 \quad (R, r, t : \text{図 13.4.1 参照}) \quad (13.4.1)$$

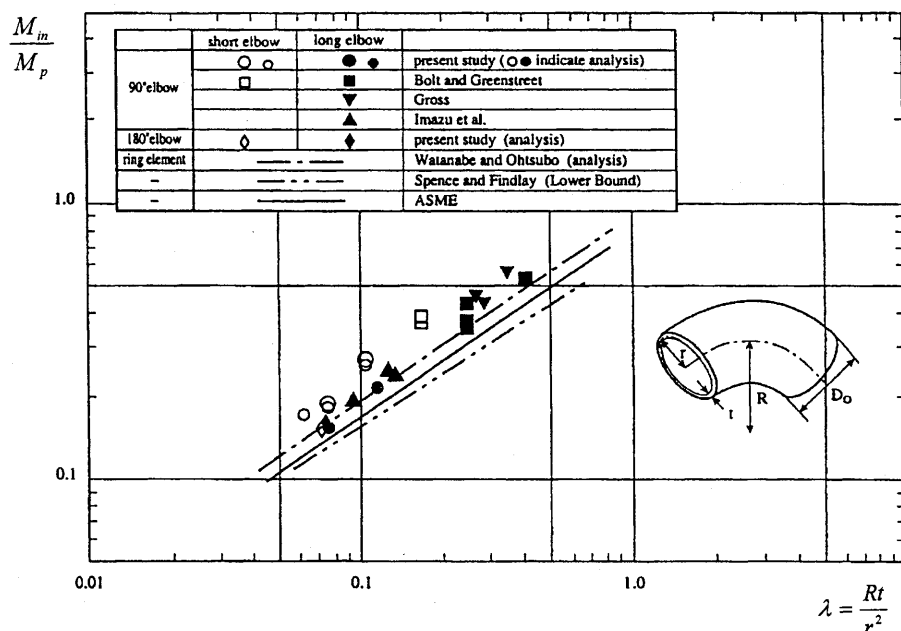


図 13.4.1 面内曲げを受ける曲り管の耐荷力 (同じ断面の直管との比)[Nakamura et al., 1997]

と定めて横軸にとり，エルボの面内崩壊モーメント M_{in} と直管の塑性崩壊モーメント M_p の比を縦軸にとって，実験に基づいて両者の関係を示したのが図 13.4.1[Nakamura et al., 1997] であり，概ね，次式の関係の成り立つことが知られている。

$$\frac{M_{in}}{M_p} = \frac{1.2}{\beta_2}, \quad \beta_2 = \frac{1.30}{\lambda^{2/3}} \quad (13.4.2)$$

したがって， $M_{in} = 0.923\lambda^{2/3}M_p$ となる。

13.4.2 曲り管の面外耐荷力

面内耐荷力に比べて，面外耐荷力の変形特性についての研究は少ないが，過去の実験データおよび基準類によれば，閉断面であるためねじり剛性は高く，耐荷力への支配要因としてねじりモーメントの占める比率は小さいので，面外曲げモーメントが支配的となることが示されている [Imazu et al., 1981]。

文献 [日本電気協会, 1991] などによれば，曲り管の応力評価は，

$$T_y = B_2 \frac{D_0}{2I} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \quad (13.4.3)$$

ここで， D_0 は管の公称外径， I は公称寸法による管の断面 2 次モーメント， M_1, M_2, M_3 は評価断面における主モーメントである。 $B_2 = 0.75C_2$ ， $C_2 = 1.95/\lambda^{2/3}$ ， $\lambda = (R \cdot t)/r^2$ を用いて行うように定められており，実質的に面内，面外を区別しない形になっている。 T_y は評価対象となる発生応力である。

13.5 補剛円筒シェルの座屈

実際のシェル構造は無補剛で使用されるよりもむしろ周方向補剛材あるいは軸方向補剛材またはその両者で補剛されて使用されるのが通常である。しかし補剛材の接合の仕方によっては残留応力などによりむしろ座屈耐荷力を低下させることも生じ得る。また補剛による重量増加を避け構造の軽量化を計りつつ座屈耐荷力を高

める目的でサンドウィッチシェルや積層シェルも最近では多く取り上げられてきている。しかし、これらの補剛シェルの理論的解析は必ずしも容易ではなく、線形解析結果や実験結果を参考にした半経験公式や経験公式に基づいて設計が行われているのが実状である [ECCS, 1983]。

13.5.1 補剛円筒シェルの座屈様式

補剛シェルにおいては、普通、外板がまず座屈し、最後に補剛材が座屈して全体構造としての強度を失うが、一般には次のような座屈挙動を考慮しなければならない。すなわち、①横造全体の座屈、②幾つかの補剛材にまたがる局部座屈、③補剛材間の1パネルの局部座屈、および、④個々の補剛材の座屈である。軸圧縮を受ける場合、柱としての全体座屈は軸方向補剛材の効果を断面二次モーメントの計算において考慮することにより評価することができる。また、個々の補剛材の座屈はシェルの有効幅を考慮したリング、または弾性床上の柱の座屈の問題に帰せられる。

13.5.2 直交異方性シェル近似

軸方向補剛材の配置が密な場合やサンドウィッチシェルの場合には、せん断剛性や曲げ剛性、ねじり剛性などを的確に評価するところに難しさがあるものの、直交異方性シェルとして解析することにより複数の補剛材にまたがる局部座屈を評価することができる。例えば、一様材質、一様板厚の場合には表 13.5.1 中の剛性は

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= E_1 t / (1 - \nu_1 \nu_2), \quad \alpha_2 = E_2 t / (1 - \nu_1 \nu_2), \quad \beta = G t \\ D_1 &= E_1 t^3 / 12 (1 - \nu_1 \nu_2), \quad D_2 = E_2 t^3 / 12 (1 - \nu_1 \nu_2), \quad S = G t^3 / 3\end{aligned}\quad (13.5.1)$$

と表わされる。ただし、 E_1, E_2, G は弾性主方向の縦弾性係数およびせん断弾性係数であり、 $\mu_1 = \nu_1, \mu_2 = \nu_2$ である。

図 13.5.1 のような補剛シェルの場合には、13.3.3(1) で述べた分離剛性の考え方を用いて

$$\left. \begin{aligned}\alpha_1 &\cong Et + \frac{E_L A_L}{b}, & \alpha_2 &\cong Et + \frac{E_R A_R}{b}, & \beta &= Gt + \beta_s \\ D_1 &\cong \frac{Et^3}{12} + \frac{E_L I_L}{b}, & D_2 &\cong \frac{Et^3}{12} + \frac{E_R I_R}{b}, & S &\cong \frac{1}{3} Gt^3 + S_s\end{aligned}\right\} \quad (13.5.2)$$

となる。ただし、 E_L, A_L, I_L は軸方向補剛材の縦弾性係数、断面積、断面二次モーメントであり、 E_R, A_R, I_R は周方向補剛材のそれらである。また、 β_s, S_s は補剛材によるせん断剛性、ねじり剛性の寄与項である。

(1) 軸圧縮による座屈

縦横に補剛された円筒の圧縮座屈荷重に関しては林により詳細な結果が得られているが、ここでは Dschou による簡単な次式を示す [林, 1961]。

$$P_{cr} = 4\pi E \sqrt{\frac{I_1 I_2}{\left(\frac{I_1}{t_1} + \frac{I_2 t_1}{t_2 t}\right)}} \quad (13.5.3)$$

表 13.5.1 直交異方性を表わす諸量 [林, 1961]

一般化応力-ひずみ関係式	N_1, N_2 : 弾性主方向単位幅面内力
$N_1 = \alpha_1(\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2), M_1 = D_1(\kappa_1 + \mu_2 \kappa_2)$	N_{12}, N_{21} : 単位幅せん断力
$N_2 = \alpha_2(\varepsilon_2 + \nu_1 \varepsilon_1), M_2 = D_2(\kappa_2 + \mu_1 \kappa_1)$	M_1, M_2 : 弾性主方向単位幅曲げモーメント
$N_{12} = N_{21} = \beta \gamma, M_{12} = M_{21} = (S/2)\tau$	M_{12}, M_{21} : 単位幅ねじりモーメント
$\alpha_1, \alpha_2, \beta$:	面内伸び剛性、せん断剛性
ν_1, ν_2 :	面内力に対するポアソン比
D_1, D_2, S :	曲げ剛性、ねじり剛性
μ_1, μ_2 :	曲げに対するポアソン比
$\alpha_1 \nu_2 = \alpha_2 \nu_1, D_1 \mu_2 = D_2 \mu_1$	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$: N_1, N_2, N_{12} に対応する平面ひずみ
	κ_1, κ_2, τ : M_1, M_2, M_{12} に対応する曲率、ねじり率

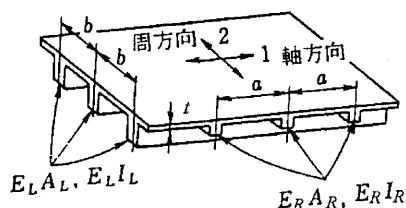


図 13.5.1 補剛シェルの局所諸元

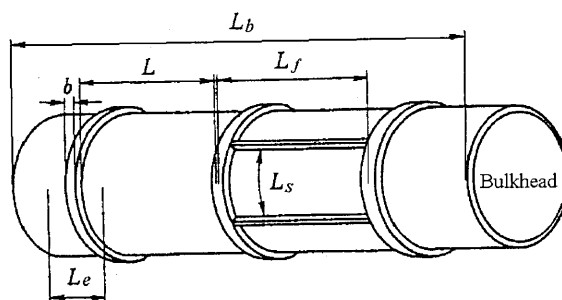


図 13.5.2 補剛シェルの全体の諸元

ここに, I_1, I_2 は各断面の平均断面二次モーメントであり, t_1, t_2 は平均板厚, t は外板の板厚である。

短かい円筒シェルに対しては同じく Dschou により

$$P_{cr} = \sigma_E t_1 + \sigma_R \sqrt{t \cdot t_1}; \quad \sigma_E = \frac{\pi^2 E I_1}{t_1 L^2}; \quad \sigma_R = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{E t}{R} \quad (13.5.4)$$

が得られている [林, 1961]. ここに, σ_E は長さ L の補剛板の Euler 座屈応力であり, σ_R は板厚 t の円筒シェルの古典座屈応力である。

(2) 曲げ座屈およびねじり座屈

結果は省略するが, ねじり座屈強度を高めるためには周方向面内剛性を高めるのが有効であり, 屈服モーメントを高めるためには曲率を大きくすること, および周方向曲げ剛性 D_2 と, 軸方向面内剛性 α_1 とを大きくすることが効果的である。

(3) 外圧による座屈

Bryant によりシェル項と補剛リング項の和の形の次式が与えられている (図 13.5.2 参照) [Johnston, 1976].

$$p_{cr} = \frac{E t}{R} \left\{ \frac{\lambda^4}{[n^2 + (\lambda^2/2) - 1] \cdot [n^2 + \lambda^2]^2} \right\} + \frac{E I_e (n^2 - 1)}{L_f R_0 R_c^2} \quad (13.5.5)$$

ここに, $\lambda = \pi R / L_b$ であり, R_0 は外半径, R_c は有効幅 L_e の部分の補剛シェル断面中立軸までの半径, n は周方向座屈波数, L_f は周方向補剛材中心間距離, L_b はバルクヘッド間距離, I_e は有効幅 L_e 間の周方向有効断面二次モーメントである。さらに, 有効幅 L_e は, 補剛材幅を b , $L = L_f - b$ とすると, $L_e = F_1 \cdot L + b$ で与えられる。ただし, $F_1 = (2/\theta) \cdot (\cosh \theta - \cos \theta) / (\sinh \theta + \sin \theta)$ であり, $\theta = [3(1-\nu^2)]^{1/4} \cdot (L/R) \sqrt{R/t}$ とする。周方向の座屈波数 n は拘束が少なければ $n = 2$ であるが端部の拘束度が高くなれば n の値は大きくなる。

式 (13.5.5) で考慮している周方向補剛材に加えて, より大きな補剛リングでさらに補剛されている場合についても Blumenberg により式 (13.5.5) と同様な形式の実験式が提案されている [Johnston, 1976].

13.5.3 補剛材間の座屈

軸方向補剛材, 周方向補剛材とも十分に剛ならば, 補剛材で囲まれた一区画を取り出し 4 辺支持の曲面板として取り扱うことができる。この場合の座屈強度は 13.3.2 で述べた通りである。

リング補剛材間の外圧による弾性座屈については Reynold が弾性補剛リングの変形を考慮した結果を得ているが [Johnston, 1976], 13.2.7 の結果が役に立つ。非弾性座屈はちょうちん状の座屈波形を生ずる軸対称座屈と周方向に波を生ずる非対称座屈とが起り得る。

13.5.4 外圧による非弾性座屈

Reynoldによれば、外圧による非弾性座屈の式は全て次のような簡単な形式にまとめることができる [Johnston, 1976]. すなわち、弾性座屈荷重を、次式より求める.

$$p_{cr} = E(C_a + C_b) \quad (13.5.6)$$

ただし、 C_a, C_b はそれぞれ膜剛性および曲げ剛性を代表する項である. すると、非弾性座屈荷重は

$$p_c = \sqrt{E_s E_t} \cdot C_a + E_t \cdot C_b \quad (13.5.7)$$

のように表わされる.

13.6 数値解析による座屈荷重、座屈モードの算定

13.6.1 座屈解析の内容、項目

シェルの座屈計算においては、例えば八巻らの一連の成果におけるような解析的な取扱いの場合でも、陽な形の解を得ることは難しく、最終的には数値計算に頼らざるを得ない場合が多いので、ここでは有限要素法あるいはそれに類似した離散化手法を用いた数値計算を問題とする.

シェルの座屈の特徴として第1に初期不整に対して極めて敏感であること、第2に局部座屈の発生があげられる. したがって、板や柱の場合のような全体的な座屈形状のみを想定することは、たとえ最低次の座屈に対してであっても不適切である. 数値計算を行う立場から見れば、これは局所的な座屈波形を十分に表現し得る要素配置あるいは自由度が必要であることを意味しており、座屈発生以前には特に応力集中の見られない箇所においても、局所的に座屈発生の予想される場合は十分細かい要素分割が必要である. ところが大次元の固有値計算は非常に計算時間を要し、計算精度も一般に自由度が大きくなるほど低下する. 可能であれば全体横造より対称性、規則性等を見出し、一部を抽出して解析することが望ましいが、部分構造を取り出しての計算が有効であるためには、全体構造における場合と同じ荷重条件、変形状態が実現されるように境界条件等をモデル化する必要がある、不用意に対称性などを仮定してはならない.

一般に、シェル構造物や試験体の境界条件を忠実に解析に導入することは難しく、数値解析においても原理的には任意の境界条件を近似し得るが、実際上は個々の解析方法で表現し得る境界条件の範囲は限定されるので、適切な境界条件の設定に留意する必要がある. 特にシェル構造の場合には面外変位のみならず面内変位に関する境界条件も座屈強度評価の重要な鍵となる. 確認のためには、理論値または実測値が既知となっている問題を選定して試計算を行い、座屈耐荷力および座屈波形の両面から数値計算モデルおよび増分計算手順の妥当性を検証しておくことが必要である.

円筒シェルの局部座屈を伴うような現象を解明するために実施する各種解析手法、及びその適用範囲は、概ね以下の通りである.

(1) 弾性固有値解析、弾塑性固有値解析

弾性固有値解析は始めに弾性座屈モードを推定し、解析モデルの妥当性を評価するために行う. 一方、弾塑性固有値解析は弾塑性座屈・崩壊荷重を推定するために、増分計算の途中の過程で随時行う. 固有値解析を行うこと自体に数値計算上の問題は少ない.

(2) 弾塑性大変形解析

静的弾塑性大変形解析は材料物性、初期不整等、種々の条件を直接考慮して、対象構造物の荷重—変位

関係，静的座屈・崩壊荷重を求めるために行う．曲面シェル要素を用いた大自由度モデルの弾塑性大変形解析が中心となり，解析結果を座屈強度評価に用いるためには，

- (a) 座屈荷重値， (b) 座屈モード， (c) 座屈前の荷重－変位関係（特に，初期剛性），
- (d) 塑性率， (e) 座屈後の荷重低下特性， (f) 座屈のしわが発生した部分での局所的応力分布，
- (g) 繰返し荷重下の挙動

について，信頼できる解析結果を出す必要がある．

弾塑性大変形解析で入念な配慮が必要な理由は，増分計算過程で座屈を生じる場合，特に応力集中部でない箇所が急激に変形を増大させるため，解析モデルによって全く異なる解を与え，しかも数値解の精度を検証するための解析解が無いことである．従って，単なる弾塑性応力解析と異なり，座屈変形が予想される部分とその近傍でかなり要素を細分割した解析モデルが必要となる．厚肉円筒殻の曲げ座屈について言えば，ふくらみが帯状に周方向に広がる局部座屈変形（バルジ状変形）を生じる軸圧縮座屈・曲げ座屈に対して，軸方向座屈波長約 $3\sqrt{Rt}$ （ R ：円筒半径， t ：板厚）の中に，2次のシェル要素で数要素必要であるため，全体として数千，数万自由度

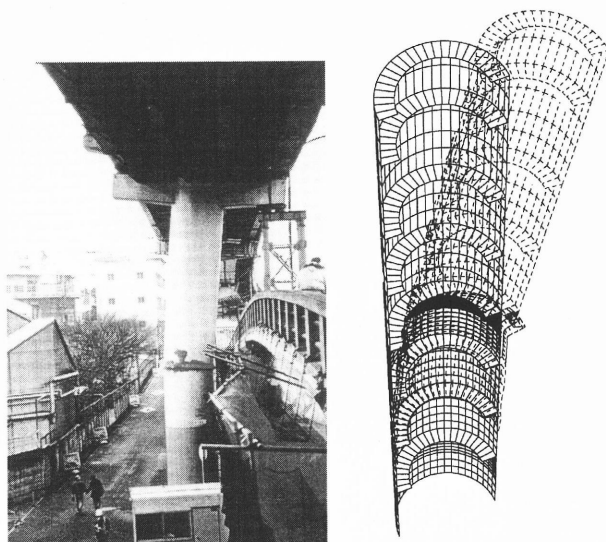


図 13.6.1 阪神淡路大震災時に板厚変化部直上で局部曲げ座屈を生じた鋼製円筒橋脚[中村, 1996]

の非線形解析になるのが通常である．さらに，一方向に载荷するだけの静的座屈解析であっても，増分計算過程での収束性など，計算量が膨大であること以外の問題も生じやすいので，座屈後挙動を含めて精度よくシミュレーションするのは容易ではない．なお，変位法の宿命として，解析値は実験値より大きく（非安全側評価に）ならざるを得ないことを念頭に置き，初期剛性も含めて，座屈実験値と有限要素解析値の大小関係を，解析条件との関連で把握しておくことは実用上極めて重要である．

また，動的弾塑性大変形解析は地震時座屈挙動の推定，及び，動的応答低減効果の確認などに用いられるが，座屈荷重を静的解析と同程度に精度よく推定するのは一般には難しい．静的弾塑性大変形解析で用いたのと同じ大自由度の解析モデルを用いるのも可能ではあるが，解析ステップ数が非常に多くなるので，計算量と解析目的，解析精度等を勘案し，小さな自由度の非線形系モデルに置換しての解析が多く，その場合，骨格曲線や履歴則の設定が本質的に重要である．曲面シェル要素で計算量が膨大になることを解決するための一案として，図 13.6.1 に示すように動的弾塑性座屈解析用の軸対称要素マトリックスを定式化して計算効率を高めた研究報告もある [中村, 1996]．また，厚肉シェルが地震荷重下で両振りに近い繰返しを受ける場合，材料構成則の検討が重要であり，修正 2 曲面モデル [葛ら, 1997]，3 曲面モデル [後藤ら, 1998a] の適用が適切であると考えられている．これら以外にも，鋼製橋脚については多数の実験的，解析的研究成果が発表されているので，座屈解析にあたって精度の確認，手法の検証などに活用すべきである．

13.6.2 座屈解析のガイドライン

円筒殻の弾塑性せん断－曲げ座屈試験と併行して，シミュレーション解析を行い，解析コードの選択，使用する要素の選択，材料物性値，要素分割，増分量の設定，収束判定法等が，解析結果へ及ぼす影響が検討されて

きている [松浦ら, 1995; 日本橋梁建設協会, 1998; 日本鋼構造協会, 2000]. 結論として円筒殻のせん断一曲げ座屈について概ね言えることは、『解析モデルの作成と増分計算の実行条件に留意すれば, 座屈荷重そのものは試験結果より平均 0 ~ 20 %程度高めとなるが, 座屈現象の特性を精度よく推定することが可能である.』ということである. これら弾塑性座屈解析結果と実現象の関係は, 理論的解明が困難であるにもかかわらず, 実用上極めて重要な問題であるため, 上記文献に従い, 円筒殻のせん断一曲げ座屈解析上の共通的な留意点を以下に述べる.

(1) 材料物性値の設定

解析に用いる降伏応力 (0.2 %耐力) と弾性係数は, 関連基準類に従うものとし, 応力-ひずみ関係は, 可能な限り実際に近い多直線近似, または, 曲線近似により与えるものとする (ステンレスのような材料の場合, 0.2 %耐力までに 4 直線以上の近似が望ましい).

(2) 降伏条件と構成式

非弾性解析を行なう場合の降伏条件としてはミーゼスの条件を, 流れ則としては J 2 流れ則を用いてよい. また, 単調载荷により座屈・崩壊強度を求めるための解析には硬化則として等方硬化と移動硬化のどちらを用いてもよい. ただし, より厚肉で材料非線形の影響が大きい構造物に対して繰り返し载荷する場合は, 等方硬化あるいは移動硬化が必ずしも実際の挙動を良く再現する結果を与えるとは言えないので, 修正 2 曲面モデル, 3 曲面モデルなどのより適切な構成則を用いる必要がある. 一般に, 薄肉円筒の場合は材料的な効果よりも形状の非線形効果の影響が強く, 硬化則の影響は小さい. なお, 座屈荷重付近までのひずみは, 特にせん断座屈の場合 0.2%以下程度で小さいので, そのひずみ領域での応力-ひずみ関係が座屈までの荷重-変位関係に大きく影響する. 従って, ステンレスのように小さいひずみ領域で応力-ひずみ関係に非直線性が現れる材料では, 0.2%耐力付近までを細かく設定する必要がある, 解析結果の精度をあげる上で重要である.

(3) 解析モデルに採用する要素の選択

要素の選択にあたっては, シアーロッキング等の数値的悪条件の発生を回避し得るような弾塑性・大変形シェル要素を選択する. 内挿関数の次数は要素分割との兼ね合いになるので, 絶対的なものではないが, 2 次要素は比較的良好である. また, 弾塑性解析では層分割法のようにシェル断面内の一部降伏を十分考慮できる要素を選択する必要がある.

(4) 要素分割

解析モデルの作成にあたっては, 要素の形状比に配慮して, 収束した適切な解が得られるよう, 座屈変形や大きなひずみの発生が予想される箇所に十分な数の要素を配置する. 2 次要素を用いた場合の要素分割の目安は次に示す通りである. 1 次要素であればさらに細かな要素分割が必要である.

① 円筒殻のせん断座屈を対象とする場合

(a) 周方向分割

円筒の側面 (水平力の加力軸から周方向に 90° ずれた部分) を中心に, せん断座屈のしわの波長に対して 6~8 要素以上の分割とする (これ以上の分割をしても, 座屈荷重に変化がないことを確認している.). 座屈のしわの波長は $2\sqrt{L\sqrt{Rt}}$ 程度である.

(b) 軸方向分割

要素の形状比が悪くならない程度に分割する. 曲げ変形が予想されるならば, 円筒固定端部付近を多少細かく分割する. 軸方向分割が解に与える影響は比較的小さい.

② 円筒殻の曲げ座屈を対象とする場合

(a) 周方向分割

要素の形状比が悪くならない程度に分割する。せん断変形が予想されるならば、円筒側面部付近を多少細かく分割する。周方向分割が解に与える影響は比較的小さい。

(b) 軸方向分割

円筒固定端部の象脚型座屈変形が発生する軸方向範囲に対して、5要素以上の分割とする（これ以上の分割をしても、座屈荷重に変化がないことを確認している。）。象脚型の座屈変形は円筒下部から約 $3\sqrt{Rt}$ の間に生じる。

③ その他の留意事項

(a) 要素分割のパターンとしては、長方形の格子状分割が解析上の問題は少ない。

(b) 要素の形状比はせん断座屈の場合、1に近付けるのが望ましい。

(c) 座屈後、さらに大きな変形まで解析する場合には、初期の座屈変形以外の2次的な変形が生じることもあるので、要素分割にあたって注意すべきである。

(5) 境界条件、荷重条件

境界条件と荷重条件については、構造物の力学的特性、数値解析法の特性を念頭におき、各節点ごとに設定するが、対象部位が柔らかな荷重伝達経路（意図的に損傷を集中させるような部位）を有する場合、座屈後の耐荷力の急激な低下と大きな変形の発生の恐れがあるため、モデル化の範囲と解析結果の評価には注意が必要である。

(6) 増分量の選択、収束条件

増分計算で座屈解析を行なう場合、増分量の選択と収束条件の設定は、採用している要素と解法により異なるので一律には決められないが、荷重増分、変位増分、弧長増分のいずれの場合でも、解の収束性、精度を考慮し、最適な増分幅を選択する必要がある。一般的には座屈点近傍において増分幅をかなり小さくする必要がある。荷重増分の場合、最大荷重点を越えることは不可能であり、解析可能な最大荷重をもって座屈荷重とすることもできるが、最大荷重点近傍での弾塑性固有値解析により座屈荷重を求めることも行われる。変位増分または弧長増分を用いれば、適切な初期不整を与えることで、最大荷重点を越えることが多くの場合可能であり、最大荷重点をもって座屈荷重とする。この場合は、座屈後の耐荷力の低下と変形の関係も得られる。

(7) 不整の導入

製作上、特定の形状不整の現れることが確認されている場合は、それを用いるものとし、不整量は製作基準で与えられる公差程度とする。それ以外の初期形状不整は、座屈に対して最も厳しいモードで与えるのを原則とし、通常、弾性固有値解析による最低次の固有モードを初期不整とするが、弾塑性座屈解析を行なって得られた座屈モードが弾性座屈モードと著しく異なる場合は、弾塑性座屈モードを不整として用いるものとする。また、円筒殻の曲げ座屈の場合、半周の象脚型の変形よりも全周一様のバルジ型変形の方が、不整形として厳しいので注意すべきである。

13.7 今後の展望

以上述べてきたように、円筒シェルに単一荷重が作用する場合および幾つかの複合荷重が作用する場合の基本的な座屈挙動は、 R/t の広い範囲にわたって明らかにされている。特に土木鋼構造物に多く見られる $R/t \leq 50$ の範囲は明らかに弾塑性座屈の領域であり、解析的に扱い得る弾性理論の範囲から大きくはずれている。したがって、我が国の厳しい耐震座屈設計条件などを考えれば、実験値との比較に基づいた弾性基本座屈評価式と塑性修正、座屈モード間の連成の影響および初期不整の影響評価、動的荷重効果、安全率の設定などは大きな問題であり、近年のコンピュータ技術の進歩と、動的実験装置の精度向上などを背景に、多くの検討がなされた分野である。本章では、そのような成果の反映に努めた。特に、円筒シェルの軸圧縮、曲げ、せん断、ねじり

座屈およびその連成について、理論値と実験値の関係および設計に活用できる形での統一的記載は、円筒シェルの座屈に対する理解を容易にするための一助になるものと思われる。

パイプ・シェルの座屈研究の将来を展望するのは必ずしも容易ではないが、既往の座屈研究の歴史を概観すれば、19世紀以降、常に強いニーズがあって、鋼橋、船体構造、航空機構造など、物に即して行われてきたことは明らかである。したがって、今後、パイプおよびシェルを部材として用いるどのような構造物が出現するかの的確な予想は常に必要であり、また、わが国のように頻繁に強い地震や台風に見舞われる国においては、構造物の巨大化と共に動的座屈問題がさらに重要になるであろう。動的荷重下の座屈については、阪神淡路大震災における被災経験を経て、土木・建築の分野で数多くの動的座屈に関わる実験的・解析的検討がなされて今日に至っているが、なお多くの課題が残されている。例えば、1991年以降この15年間に大きな台風が来襲し、ほぼ2年に1度くらいの頻度で送電用鋼管鉄塔の局部座屈を伴う倒壊が生じたが、自然外力の設定の見直しと同時に、座屈強度に関する研究の必要性を示唆しているものと考えられる。さらに、世界的潮流である性能照査型設計への移行に合わせた検討には、多くの課題が残されている。

参考文献

- Brazier, L.G.(1927): On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections, Proc. Royal Soc. London, Ser. A, Vol.116, 1927.
- Lundquist, E.E.(1935): Strength tests of thin walled duralumin cylinders in combined transverse shear and Bending, NACA-TN-No.523, 1935.
- Ebner, H.(1937): Theorie und Versuche zur Festigkeit von Schalenrumpfen, Lufo, Bd.14, Nr.3, S.93-115, 1937.
- Plantema, F.J.(1946): Collapsing stresses of circular cylinders and round tubes, Report S.280, Nat Luchtvaart-laboratorium, Amsterdam, The Netherlands, 1946.
- Batdorf, S.B.(1947): A simplified method of elastic stability analysis for thin cylindrical shells, NACA Rep., 874, 1947.
- Gross, N.(1952-1953): Experiments on short-radius pipe-bends, Proc. Inst. Mech. Engrs., 1B, pp.331-345, 1952-1953.
- Budiansky, B.(1959): Buckling of clamped shallow spherical shells, Proc. IUTAM Symp. on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft, Netherland, pp.64-94, 1959.
- Weinitschke, H.J.(1960): On the stability problem for shallow spherical shells, J.Math. and Phys., 38, pp.209-231, 1960.
- 林毅 (1961): 長柱研究委員会編 弾性安定要究, 第3版, 第5編, コロナ社, pp.509 - 686, 1961.
- Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961): Theory of Elastic Stability, McGraw - Hill, pp.457-461, pp.500 - 509, 1961.
- Huang, N.C.(1964): Unsymmetric buckling of thin shallow spherical shells, J. Appl. Mech., pp.1447-1457, 1964.
- 津下一英 (1965): 薄肉円筒殻の座屈に関する一考察 (曲げ及び偏心圧縮力を受ける場合), 日本建築学会論文報告集, 第117号, pp.23-28, 1965.11.
- Buchert, K.P.(1965): Zur Stabilität Grosser, Deppelt, Gekrummter und Versteiferter Schalen, Der Stahlbau, pp.55-62, 1965.
- NASA Space Vehicle Design Criteria(1965): Buckling of Thin Walled Circular Cylinders, NASA-SP-8007, 1965.
- Weingarten, V.I., Morgan, E.J. and Seide, P.(1965): Elastic stability of thin walled cylindrical and conical shells under axial compression, AIAA Journal, 3, pp.500-505, 1965.
- 林毅編 (1966): 軽構造の理論とその応用 上巻, 日本科学技術連盟, 1966.
- 八巻昇 (1968/1969): 円筒殻の外圧による座屈, 東北大学高速力学研究所報告, 第24巻, 第236号, pp.37-55, 1968/1969.
- Der, T.J. and Fidler, R.(1968): A model study of the buckling behavior of hyperbolic shells, Proc. Inst. Civil Engineers, Vol.41, pp.105-118, 1968.
- 八巻昇 (1969/1970): 円筒殻の外圧による座屈に及ぼす座屈前変形の影響, 東北大学高速力学研究所報告, 第25巻, 第259号, pp.153-175, 1969/1970.
- 植村益次, 森田道子 (1971): 直線的に変化する外圧による円筒かくの座屈, 日本機械学会論文集, (第1部), 37巻, 298号, pp.1100-1106, 1971.

- 八巻昇, 児玉昭太郎 (1971): 円筒殻の圧縮による座屈 (第 2 報), 座屈前の変形を無視した Flugge の式による解, 東北大学高速力学研究所報告, 第 28 巻, 第 286 号, pp.133-162, 1971.
- C.R.C. Japan (ed.) (1971): Shells, Handbook of Structural Stability, Part IV, Corona, pp.4/5-4/401, 1971.
- Bolt, S.E. and Greenstreet, W. L.(1971): Experimental determinations of plastic collapse loads for pipe elbows, ASME Publication 71-PVP-37, 1971.
- 八巻昇, 児玉昭太郎 (1972): 円筒殻の圧縮による座屈 (第 4 報), 座屈前の有限変形を考慮した Flugge 型の式による解, 東北大学高速力学研究所報告, 第 30 巻, 第 297 号, pp.43-71, 1972.
- Flügge, W.(1973): Differential Equations for Compression and Shear; Stresses in Shells, 2nd ed., Part 8.2.1, Springer-Verlag, pp.439-448, 1973.
- Spence, J. and Findlay, G. E.(1973): Limit loads for pipe bends under in-plane bending, 2nd International Conf. on Pressure Vessel and Piping, I-28, 1973.
- Donnell, L.H.(1976): Some Particular Thin Shell Solutions; Beams, Plates, and Shells, Section 6.7, McGraw-Hill, pp.359-376, 1976.
- Johnston, B.G.(ed.)(1976): Circular Tubes and Shells; Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 3rd ed., Chap. Ten, Structural Research Council, John Wiley & Sons, pp.261-329, 1976.
- Watanabe, O. and Ohtsubo, H.(1976): Elastic-plastic analysis of pipe bends subjected to in-plane bending, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.26, Proc.26th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1976.
- Miller, C.D.(1977); Buckling of axially compressed cylinders, Proc. of ASCE, 103, ST, 1977, pp.659-719.
- 松原典宏, 山本善之 (1979): 円筒形圧力容器の内張り板の座屈の理論的研究, 日本機械学会論文集 (A 編), 45 巻, 395 号, pp.780-790, 1979.
- 山田大彦 (1980): 補剛扁平球殻の外圧による座屈とその近似解法 II, 第 30 回応用力学連合講演会講演論文抄録集, pp.117-118, 1980.
- 山田聖志, 内山和夫, 山田大彦 (1980): 外圧を受ける部分殻の座屈に関する実験的研究 II 軸対称初期不整と変形特性, 第 30 回応用力学連合講演会講演論文抄録集, pp.115-116, 1980.
- Esslinger, M. and Geier, B.(1980): Buckling and post buckling behavior of conical shells subjected to axisymmetric loading and of cylinders subjected to bending, In Theory of Shells, North Holland Pub., 1980.
- Imazu, A., Sakakibara, Y., Nagata, T. and Hashimoto, T.(1981): Plastic instability test of elbows under in-plane and out-of-plane bending, Trans. 6th SMiRT E6/5, 1981.
- 松原典宏, 山本善之 (1982): 変形制限を受ける長い円筒殻の座屈の理論的研究, 日本機械学会論文集 (A 編), 48 巻, 426 号, pp.166-176, 1982.
- 小久保邦男, 山本善之 (1982): 球かくの座屈に及ぼす境界条件の影響, 日本機械学会論文集 (A 編), 48 巻, 434 号, pp.1310-1317, 1982.
- 角野晃二, 三井和男, 小沢善隆 (1983): 部分球形殻の外圧による座屈解析, 日本機械学会論文集 (A 編), 49 巻, 442 号, pp.731-739, 1983.
- 安川度, 川上肇, 吉川孝男 (1983): 初期不整を有する円筒殻の崩壊強度解析—軸圧縮力を受ける短い円筒殻—, 日本造船学会論文集, 第 153 号, pp.317-323, 1983.
- ECCS-Technical Committee 8 (1983): Buckling of Shells; European Recommendations for Steel Construction, 2nd ed., Section 4.6, 1983.
- Yamaki, N.(1984): Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells, North-Holland, 1984.
- Galletly, G.D. and Blachut, J.(1985): Plastic buckling of short vertical cylindrical shells subjected to horizontal edge shear loads, J. of Pressure Vessel Technology, 1985, Vol.107, pp.101-107.
- Sherman, D.R.(1986): Inelastic flexural buckling of cylinder, Steel Structures Recent Research Advances and Their Applications to Design, edited by M.N. Pavlovic, Elsevier, 1986.
- 秋山宏, 高橋誠, 橋本伸一 (1987): 曲げせん断荷重を受ける鋼製円筒殻の座屈実験, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 371, pp.44 - 51, 1987.
- 福本嘯士編 (1987): 座屈設計ガイドライン, 鋼構造シリーズ 2, 土木学会, 1987.
- 宇佐美勉, 青木徹彦, 加藤正宏, 和田匡央 (1990): 鋼管短柱の圧縮および曲げ耐荷力実験, 土木学会論文集, 第 416 号, pp.255-264, 1990.4.
- 日本電気協会 (1991): 原子力発電所耐震設計技術指針, JEAC 4601, 1991.
- Matsuura, S., Nakamura, H., Ogoiso, S., Murakami, T. and Kawamoto, Y.(1993): Formulae for evaluating buckling strength of FBR main vessels under earthquake loading, JSME Int. J., Ser. B, 36-3, pp.485-492, 1993.

- 秋山宏, 大坪英臣, 山田大彦, 中村秀治, 松浦真一, 荻原豊, 湯原哲夫, 平山浩, 中川正紀, 大岡裕二 (1994): 高速増殖炉容器の耐震座屈設計法に関する研究 (第 1 報, 座屈設計技術指針 (案) の骨子), 日本機械学会論文集 (A 編), 60 巻 575 号, 1994.7.
- 松浦真一, 中村秀治, 村上俊明, 川本要次, 小木曾誠太郎, 秋山宏 (1994): 高速増殖炉容器の耐震座屈設計法に関する研究 (第 2 報, 炉容器のせん断-曲げ座屈評価式), 日本機械学会論文集 (A 編), 60 巻 575 号, 1994.7.
- 土木学会鋼構造委員会 (1994): 鋼構造物の終局強度と設計, 鋼構造シリーズ 6, 土木学会, 1994.
- 松浦真一, 中村秀治, 小木曾誠太郎, 大坪英臣 (1995): 高速増殖炉容器の耐震座屈設計法に関する研究 (第 5 報, 座屈解析法の適用性評価), 日本機械学会論文集 (A 編), 61 巻 585 号, 1995.
- 後藤芳顕, 鳥羽保行, 小野聖久, 小畑誠 (1996): 円筒殻の軸対称座屈モードの局所化と繰返し荷重下の挙動, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.41-53, 1996.7.
- 日本道路協会 (1996): 道路橋設計示方書・同解説 II 鋼橋編, 1996.
- 中村秀治 (1996): 鋼製円筒橋脚の動的弾塑性座屈解析, 土木学会論文集, No.549/I-37, pp.205-219, 1996.10.
- 中村秀治 (1997): 鋼製円筒橋脚の座屈評価法と数値解析技術, 鋼製橋脚の非線形数値解析と耐震設計に関する論文集, pp.37-42, 1997.5.
- 葛漢彬, 高聖彬, 宇佐美勉, 松村寿男 (1997): 鋼製パイプ断面橋脚の繰返し弾塑性挙動に関する数値解析的研究, 土木学会論文集, No.577/I-41, pp.181-190, 1997.10.
- 土木学会鋼構造委員会 (1997): 鋼構造物設計指針, PART A 一般構造物, 1997.
- Nakamura, K., Wada, H., Nakamura, H. and Matsuura, S. (1997): Strength of short-radius thin-walled pipe elbows under in-plane bending loads, SMIRT-14, 1997.
- 後藤芳顕, 王慶震, 高橋宣男, 小畑誠 (1998a): 繰返し荷重下の鋼製橋脚の有限要素法による解析と材料構成則, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.189-206, 1998.4.
- 後藤芳顕, 張崇厚 (1998b): 比較的厚肉の円筒殻における提灯座屈からダイヤモンド座屈への塑性分岐過程の解析, 土木学会論文集, No.605/I-45, pp.105-115, 1998.10.
- 日本橋梁建設協会 (1998): 鋼製橋脚の弾塑性有限変位 FEM 解析マニュアル, 1998.2.
- 萩原豊, 山本広祐, 川本要次, 中川正紀, 秋山宏 (1998): 高速増殖炉容器の耐震座屈設計法に関する研究 (第 9 報, 弾塑性応答下における座屈の評価), 日本機械学会論文集 (A 編), 64 巻 626 号, pp.163-170, 1998.
- 日本鋼構造協会次世代土木鋼構造研究特別委員会 (2000): 橋梁システムの動的解析と耐震性, 日本鋼構造協会, 2000.4.