

第8章 柱

8.1 概 説

骨組構造部材のうち柱は、主に軸方向に圧縮力を受ける部材としてトラス橋の圧縮部材、送電鉄塔などの塔状構造物の主部材などの他、ガーダー、ラーメン、アーチ等の主構を支える対傾構、横構などの2次部材として広く用いられている。圧縮力を受ける柱は、板と並んで座屈問題の中心課題として長い間、歴史上の関心を集めてきた。これらの展望は文献 [Bleich,1952; Galambos,1970; Johnston,1983] により知ることができる。実構造物中の柱は、一般に両端が他の構造物に剛結されているため、軸力部材であっても実際には部材端には2次的な曲げモーメントが生じる。また施工上の誤差により骨組み中心線と柱部材中心線とは必ずしも一致しておらず、多少とも偏心載荷状態にある。この他、柱自体にも初期たわみや残留応力があり、実際の柱の座屈荷重は理想柱に対する理論解より著しく低下する。

本章では、はじめに伝統的な設計公式の基礎となっている両端単純支持された弾性柱の基本的挙動を述べ、また残留応力の柱強度への影響を概観する。鋼柱は種類ごとに異なった強度特性を示し、欧米の設計式にはこれを反映させる動きがある。設計者はこれらの背景を正しく認識しておくことが望ましく、本章でもこれに触れる。両端単純支持以外の柱や、より複雑な部材形式の鋼柱の強度と設計、および局部座屈と全体座屈の連成についても述べ、おわりに今後の課題を展望する。

8.2 柱の挙動と不完全性

伝統的な柱の設計式は偏心量を有する弾性柱の応力に基づいて定められてきた。本節でははじめに両端単純支持された弾性柱の挙動を簡単に説明し、つづいて材料非線形および残留応力を考慮した中心軸座屈柱の強度を述べる。また剛塑性柱にも触れる。

8.2.1 オイラーの座屈荷重

両端単純支持柱(長さ ℓ , 曲げ剛性 EI) のオイラー (Euler) の座屈荷重は式 (8.2.1) で与えられる。この荷重を断面積 A で除し、断面平均応力で表すと、式 (8.2.2) の座屈応力式が得られる。

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (8.2.1)$$

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{(\ell/r)^2} \quad (8.2.2)$$

ここに、 r は断面2次半径 $= \sqrt{I/A}$, ℓ/r は細長比と呼ばれ、柱の座屈強度を表す基本パラメータ(無次元量)である。座屈耐荷力を表す設計式は一般に式 (8.2.2) のように断面の平均応力で示される。式 (8.2.2) を図示すると図 8.2.1 のオイラー (Euler) 曲線となる。鋼材は一般に降伏点 σ_Y を持ち、この応力で $E = 0$ となるから座屈応力は σ_Y 以上になりえず、結局理想的な柱の中心軸圧縮強度は図 8.2.1 の直線 AB および曲線 BC のようになる。同図で直線 AB と曲線 BC との交点 B における細長比は式 (8.2.2) で $\sigma_E = \sigma_Y$ とおいて、

$$\left(\frac{\ell}{r}\right)_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}} \quad (8.2.3)$$

と表され、これを基準細長比と呼ぶ。細長比 l/r を基準細長比で除した量 $\bar{\lambda}$ は、細長比パラメータあるいは換算細長比と呼ばれ、柱の強度を表すための基本パラメータである。

$$\bar{\lambda} = \frac{(l/r)}{(l/r)_0} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \frac{l}{r} \tag{8.2.4}$$

この細長比パラメータを使うとオイラーの弾性座屈応力は次式で表される。

$$\frac{\sigma_E}{\sigma_Y} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \tag{8.2.5}$$

式 (8.2.2) 中の断面 2 次半径 r は座屈問題以外は構造解析上ほとんど現れない断面定数であるため、設計者は直感的に捉えにくい量であるが、図 8.2.2(a) に示すような中立軸に平行に置かれた 2 枚の板からなる断面で考えると、 $I \cong A(h/2)^2$ であるから、 $r = \sqrt{I/A} = h/2$ 。すなわち中立軸から板までの距離 (回転半径) を表すことがわかる。任意形状の断面も、それと断面積、断面 2 次モーメントが等しくなるように 2 枚の板で置き換えたとき、中立軸から板中心までの距離が断面 2 次半径となる。細長比とは断面 2 次半径 r を基準とした柱長さの比率である。

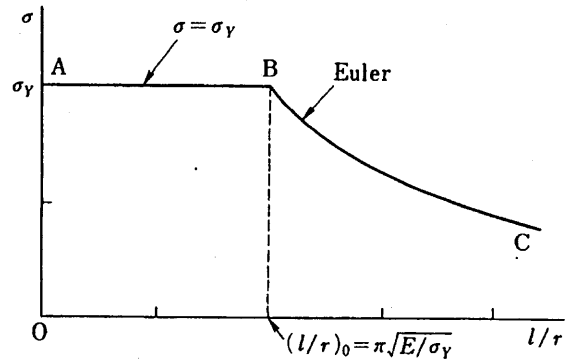


図 8.2.1 理想柱の中心軸圧縮強度と基準細長比

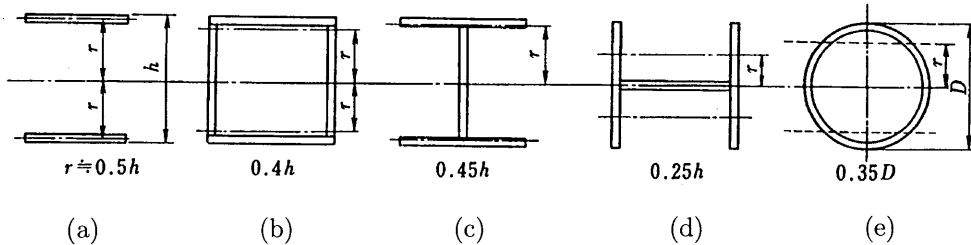


図 8.2.2 断面 2 次半径の概算値

8.2.2 偏心および初期たわみのある柱

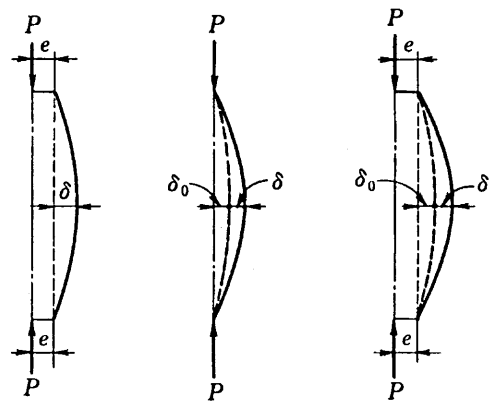
(1) 偏心荷重を受ける柱

両端に等しい偏心量 e を有する柱 (図 8.2.3(a)) に軸荷重 P が作用するとき、柱中央の横たわみは式 (8.2.6) で与えられる [Johnston,1983]。

$$\delta = e(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} - 1) \tag{8.2.6}$$

柱に生じる最大圧縮応力 σ_{max} は、軸力による断面内一様応力 $\sigma_n = P/A$ と、曲げモーメント $M = P(e + \delta)$ による応力 $\sigma_m = M \cdot c/I$ との和で表されるから、

$$\sigma_{max} = \sigma_n + \sigma_m = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}\right) \right] \tag{8.2.7}$$



(a) 偏心柱 (b) 初期たわみ (c) 偏心と初期たわみのある柱

図 8.2.3 偏心および初期たわみのある柱

となる。ここに、 c は断面の中立軸から最外縁までの距離である。式 (8.2.7) の応力 σ_{\max} が材料の降伏応力 σ_Y に達したとき、「この柱は破壊する」と考えると、このときの断面の平均応力は次のようになる。

$$\sigma_{cr} = \frac{P}{A} = \frac{\sigma_Y}{\left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)\right]} \quad (8.2.8)$$

上式はセカント (Secant) 式と呼ばれ、鋼柱内の残留応力の座屈耐荷力に及ぼす影響が明らかにされる以前は、これらの影響も含めて偏心量に置き換えた同式が設計に用いられた。ただし式 (8.2.8) の両辺に P が含まれているため、繰り返し計算が必要となる。式 (8.2.8) による荷重 P と横たわみ δ の関係は 図 8.2.4(a) のよう、偏心量の大きさに関わらず荷重が Euler 荷重に近づくにつれて δ は無限に大きくなる。式 (8.2.7)、または式 (8.2.8) 中の ec/r^2 は初期偏心比と呼ばれる定数である。

(2) 初期たわみのある柱

ほとんどの鋼柱には初期たわみがあり、その形状の主要成分は \sin 半波形である。初期たわみ形状を 図 8.2.3(b) に示すように、振幅 δ_0 のサイン半波形で仮定すると、柱中央での横たわみ δ は、

$$\delta = \delta_0 \left(\frac{P/P_E}{1 - P/P_E} \right) \quad (8.2.9)$$

で表され [Timoshenko, S. et al, 1961], 偏心圧縮柱と同様、 P が P_E に近づくにつれて横たわみは無限大に発散する (図 8.2.4(b))。式 (8.2.9) より、柱に生じる最大応力は式 (8.2.7) と同様の計算により次式 (8.2.10) のように求められる。

$$\delta_{\max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{\delta_0 c}{r^2} \cdot \frac{1}{1 - P/P_E} \right) \quad (8.2.10)$$

前と同様、 $\sigma_{\max} = \sigma_Y$ となるときの柱の破壊と考え、断面内平均応力 σ_{cr} を求めると

$$\sigma_{cr} = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} \left[\sigma_Y + \sigma_E(1 + \eta) - \sqrt{\{\sigma_Y + \sigma_E(1 + \eta)\}^2 - 4\sigma_E\sigma_Y} \right] \quad (8.2.11)$$

ここに、 $\sigma_E = P_E/A$, $\eta = \sigma_0 \cdot c/r^2$, c は断面の重心軸から圧縮最外縁までの距離である。

式 (8.2.11) は Perry-Robertson 式として知られている。 η を細長比に比例する量と考えて [例えば $\eta = \alpha(\lambda - 0.2)$], 強度式を定めた例もあり 8.4.2 に述べる。

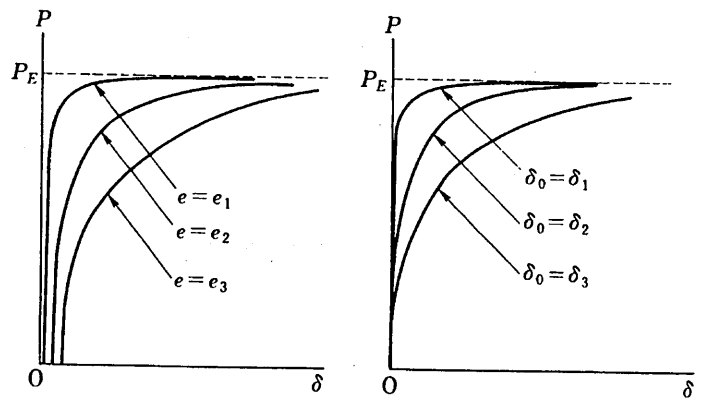
(3) 荷重偏心と初期たわみのある柱

図 8.2.3(c) のような偏心と初期たわみを同時に有する柱の強度を設計式に利用することは、複雑さのゆえに従来からもほとんど行われていない。この場合、柱の横たわみは式 (8.2.6) と式 (8.2.9) の和となり、最大圧縮応力は近似的に次式で与えられる [Jonston, 1998]。

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{c}{r^2} \{ \delta_0 + e(1 + 0.23P/P_E) \} \frac{1}{(1 - P/P_E)} \right] \quad (8.2.12)$$

8.2.3 接線係数荷重

図 8.2.5 に示すように、材料の応力ひずみ関係がある比例限以上で非線形を示すときには比例限以上の荷重で、もはや Euler 式 (8.2.1) を用いることはできない。これに対し Engesser(1889) は、Euler 式の E を接線



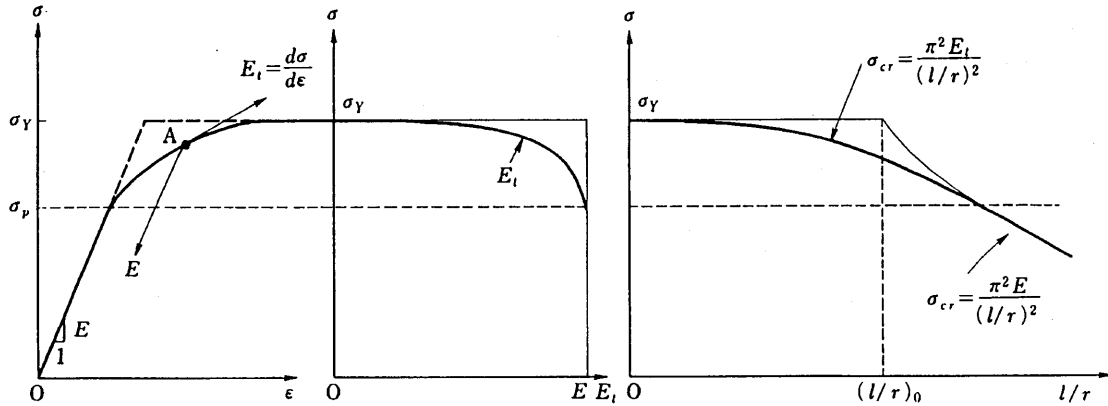
(a) 偏心圧縮される柱 (b) 初期たわみのある柱

図 8.2.4 偏心および初期たわみのある柱

係数 $E_t = d\sigma/d\varepsilon$ に置き換えて得られると考えた。すなわち、次式で表わした。

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{\ell^2} \quad \text{または、} \quad \sigma_t = \frac{\pi^2 E_t}{(\ell/r)^2} \quad (8.2.13)$$

この理論を接線係数理論 (Tangent Modulus Theory) という。



(a) 応力-ひずみ関係 (b) 応力-接線係数関係 (c) 座屈応力-細長比関係

図 8.2.5 接線係数座屈曲線

しかしその後、柱が座屈し曲がり始めるとそれまで柱断面内で一様であった応力が曲げ曲率の外側部分では応力が減少し始め (図 8.2.5(a) の A 点), 弾性に復活するのでその部分では E_t ではなく E を用いるべきであるとする新たな考えが, Engesser によって 1895 年と Kármán によって 1908 年に出された。このときの座屈荷重 P_r は Euler 式の E の代わりに E_t と E によってその断面形に対して定められる等価弾性係数 E_r を用いるので, これを等価係数理論 (Reduced Modulus Theory) という。たとえば矩形断面の等価弾性係数は次式のように表される。

$$E_r = 4EE_t/(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2 \quad (8.2.14)$$

また, 図 8.2.7(a) に示すような 2 枚のフランジ板からなる断面 (強軸 x 回り) では次式のように表される。

$$E_r = 2EE_t/(E + E_t) \quad (8.2.15)$$

この理論は合理的であると信じられていたが, その後に行われた実験値は等価弾性係数 E_r よりも接線係数理論値 E_t により近い結果を示した。そのため両理論値の間の矛盾に対して約 50 年間議論が続いた。1947 年 Shanley はアルミ柱を使って注意深く実験を行い, 座屈現象を観察した結果, 2 枚の板からなる簡単なモデルを用いてこの問題に明快な説明を与えることに成功した。Shanley モデルによる荷重-変形挙動は, 図 8.2.6 に示すように, 完全に真直ぐな圧縮柱は接線荷重 P_t に達したとき座屈を開始するが, 曲げ変形を続けていくにはさらに軸力が必要になること, また変形が進むにつれて荷重は理論的に等価係数荷重 P_r に近づいていくことを示した。しかし実際の真直ぐな柱では横方向変形とともに付加曲げにより部材内で塑性域が広がり, P_r に達する前に柱は最大荷重に達する。したがって理想的な柱の接線荷重 P_t は座屈開始荷重を与え, 最大荷重は P_t と P_r の中間に位置する。実験値の下限は P_t になることから, 接線係数理論は今日でも残留応力のないアルミ柱などの非弾性座屈理論式として利用されている。さらにこの理論はその後の残留応力を有する鋼柱の中心軸圧縮強度に関する理論的発展の基礎となった。

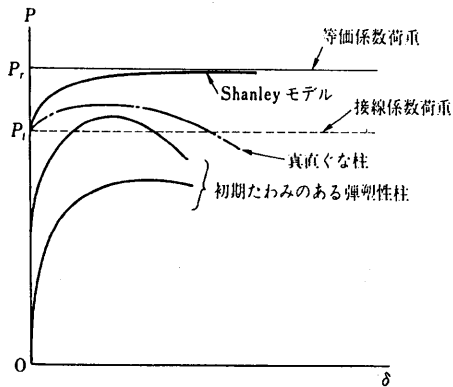
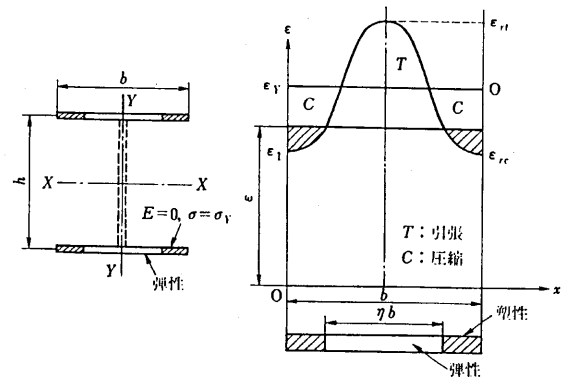


図 8.2.6 Shanley モデルの挙動



(a) 仮定断面 (b) 残留ひずみ分布
図 8.2.7 理想Hの和形断面と残留応力(ひずみ)分布

8.2.4 残留応力の鋼柱強度への影響

鋼柱内部の残留応力が座屈強度の低下に影響を及ぼすことは 1900 年の始め頃から知られはじめた [Johnston, B.G, 1983]. 1947 年にアメリカ・リーハイ大学にて組織的な実験が行われ、鋼柱強度に及ぼす残留応力の影響が明らかにされた。それ以降、1970 年代に入るまで膨大な量の研究が同大学を中心に行われ、アメリカにおける CRC (The Column Research Council) 曲線設定の基礎となった。しかしこれらの鋼柱には初期たわみや偏心の影響は積極的には考慮されていない。

以下に H 形断面を持つ真直ぐな柱を例に、残留応力による座屈強度の低下の様子を調べる。ただし理解を簡単にするため、断面は図 8.2.7(a) に示すように幅 b 、厚さ t のフランジ 2 枚からなるとし、ウェブを無視する。またフランジ上に図 8.2.7(b) に示す左右対称の残留ひずみ分布を仮定し、材料は理想弾塑性材とする。いま、中心軸圧縮荷重 P によって断面内に一様な圧縮応力 σ (ひずみ ϵ) が生じているとする。断面内のある点の圧縮残留応力を σ_r とすると、両者の和 $\sigma + \sigma_r$ が材料の降伏応力 σ_Y に達したときその点の材料が降伏すると考える。図 8.2.7(b) に示したような残留応力(ひずみ)分布では、荷重の増加とともにフランジ端から中心部へ降伏域が次第に進行していく。図の斜線で示した降伏部分では $E = 0$ であり、弾性領域のみが柱の曲げ剛性 EI に寄与する。この弾性部分の長さを図のように ηb とすると、これによる断面 2 次モーメント I_e は、強軸 (X 軸) および弱軸 (Y 軸) 回りに関してそれぞれ次のようになる [Galambos, 1970].

$$\frac{I_e}{I} = \frac{\eta b t (h/2)^2}{b t (h/2)^2} = \eta \quad (\text{強軸まわり}) \tag{8.2.16a}$$

$$\frac{I_e}{I} = \frac{2t(\eta b)^3/12}{2tb^3/12} = \eta^3 \quad (\text{弱軸まわり}) \tag{8.2.16b}$$

ここに、 I はもとの断面に対する断面 2 次モーメント。このような柱の座屈荷重は Euler 式 (8.2.1) の EI を EI_e に換えて応力に変換すると次式で表される。

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I_e}{A l^2} = \frac{\pi^2 E (I_e/I)}{(\ell/r)^2} \tag{8.2.17}$$

そこに式 (8.2.16) を代入すると、残留応力を考慮した柱の強度は次のように表される。

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \eta}{(\ell/r)^2} \quad (\text{強軸まわり}) \tag{8.2.18a}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \eta^3}{(\ell/r)^2} \quad (\text{弱軸まわり}) \tag{8.2.18b}$$

式 (8.2.17) または式 (8.2.18) から座屈応力を求めるには、別に $\sigma - (I_e/I)$ 関係または $\sigma - \eta$ 関係を求めておく必要があるが、これらは短柱実験や与えられた残留応力分布形を用いた数値計算によって求めることができる [青木徹彦ら,1972]. 図 8.2.7(b) の断面内残留応力分布が三角形の場合の式 (8.2.18) による座屈応力を図示すると図 8.2.8 のようになる. ここで最大圧縮残留応力を $\sigma_r = 0.3\sigma_Y$ としている. 同図より弾塑性域における座屈強度は曲げ変形の強軸, 弱軸の回転軸方向によって相当大きな差が生じることがわかる.

残留応力分布は部材軸方向および任意の曲げ軸方向に関して、自己つりあいを保っているが、必ずしも対称形とはなっていない. このような柱に一樣な作用応力が加えられたとき、断面内に広がる塑性領域は対称にならないから残された弾性域の図心はもとの断面図心からずれてくる. これは偏心圧縮状態と同じ効果となり、非対称な残留応力分布を有する柱では座屈強度がかなり低下することに注意する必要がある.

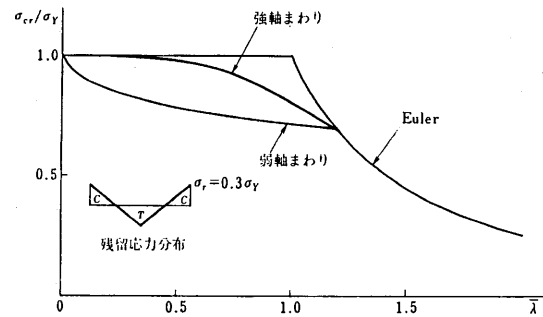


図 8.2.8 三角形残留応力分布を持つ柱の座屈強度

8.2.5 剛塑性柱

1960 年頃の塑性設計法の発展に伴って柱の問題にも塑性ヒンジの概念が導入された. 図 8.2.9 に示すように剛塑性材料からなる両端単純支持の中央点に塑性ヒンジを考えると、この点の塑性モーメント M_{PC} はつりあいより $P \cdot \delta$ に等しい. 塑性ヒンジ点の降伏軸力, 全塑性モーメントは断面形により異なるが、簡単のため幅 b , 高さ d の矩形断面を考えると塑性条件式は式 (8.2.19) のようになる [木原博監修,1967].

$$\frac{M_{PC}}{M_P} + \left(\frac{P}{P_Y}\right)^2 = 1 \tag{8.2.19}$$

ここに、 M_P は全塑性モーメント ($= \sigma_Y b d^2 / 4$), P_Y は降伏軸力 ($= \sigma_Y b d$). $M_{PC} = P \cdot \delta$ を式 (8.2.19) 代入して整理すると、圧縮力 P とたわみ δ の関係は次のようになる.

$$\delta = \frac{d}{4} \left(\frac{P_Y}{P} - \frac{P}{P_Y} \right) \tag{8.2.20}$$

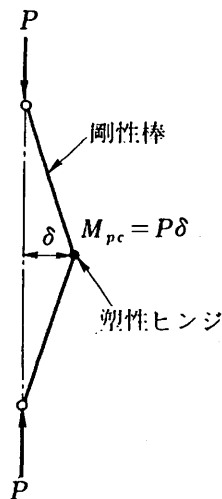


図 8.2.9 剛塑性柱

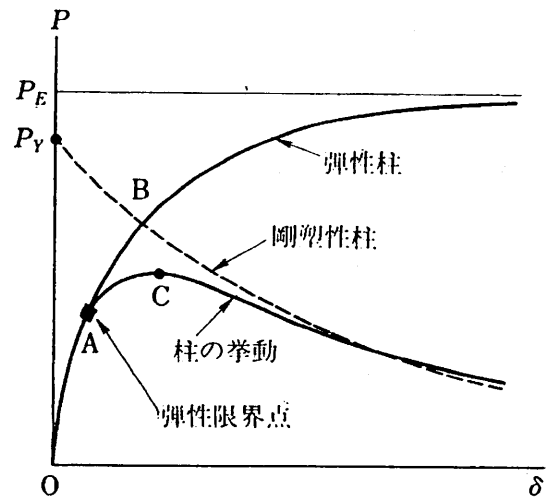


図 8.2.10 剛塑性柱のたわみ曲線

上式の関係を図示すると 図 8.2.10 の破線のようになる。同図には偏心または初期たわみのある弾性柱の挙動 [式 (8.2.6) または式 (8.2.9)] および実際の柱の挙動 (太実線) も示してある。図中 A 点は式 (8.2.8) または式 (8.2.11) に相当する弾性限界点で、これ以上の荷重では断面内に塑性域が進展して変形が大きくなり、弾性曲線から離れ、やがて最大荷重点 C に到達する。その後柱の変形は剛塑性柱のたわみ曲線に下方から近づいていく。弾性柱たわみ曲線と剛塑性柱たわみ曲線の交点 B は最大耐力の上限値を与える。はりと柱の集合体であるラーメンの塑性解析では、このような塑性ヒンジ理論を用いて最大耐荷力の近似計算を行うことがある。

8.3 鋼柱の強度

8.3.1 熱間圧延柱

熱間圧延材には H 形鋼, I 形鋼, 山形鋼, 溝形鋼, T 形鋼などがあり, それぞれ JIS により断面寸法が規定されている。これらが圧縮部材として用いられるとき, 土木構造物では 2 次部材として用いられることが多いが, 低層建築物, 送電鉄塔では主部材となることがある。

(1) 圧延 H 形鋼材

圧延 H 形鋼材のひずみ矯正される前の残留応力分布は 図 8.3.1 に示すように, フランジ上でパラボラ状の分布形を示し, 鋼種やサイズが変わってもほとんど差はない。フランジ端に生じる圧縮残留応力の最大値は $0.3\sigma_Y$ 程度である。図 8.3.1 のような残留応力分布形を持ち, サイン半波形の初期たわみ $\delta_0 \sin(\pi x/l)$ を有する圧延 H 形柱の座屈耐荷力の計算結果は 図 8.3.2 のようになる。同図の破線は初期たわみのない柱の耐荷力で, これに比べ初期たわみのある柱の耐荷力の低下は基準細長比 $\bar{\lambda} = 1$ を超えるあたりで大きい。

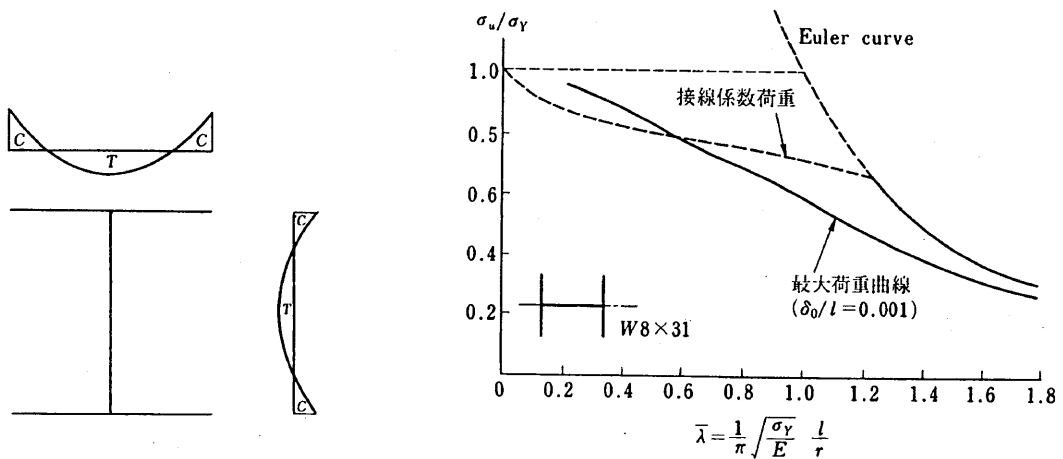


図 8.3.2 圧延 H 形鋼柱の中心軸圧縮強度
([Johnston,(ed)(1974)] より)

図 8.3.1 圧延 H 形柱の残留応力分布の典型例

圧延 H 形鋼は断面寸法 300~400mm 程度がよく用いられ, これらは製作過程で多段ローラーによりひずみ矯正が行われた後に市場に出される。まれに初期変形が公差を越える場合にはプレスにより集中荷重を加えて塑性加工を行う場合もある。ローラーによりひずみ矯正された部材はその直前の残留応力分布形とは著しく形を変え, 残留応力量は小さくなるが非対称形となることが多い。このような圧延 H 形鋼の残留応力測定例 [青木徹彦ら,1972] を 図 8.3.3 に示す。また同残留応力分布を有する比較的小型の圧延 H 形鋼柱の両端を弱軸周りに支持した中心軸座屈実験結果を 図 8.3.4 に示す。4 つの細長比に対して各々 15 本の実験が行われ, 図ではこれらの平均値 M と変動幅 $M \pm 2S$ (S : 標準偏差) の範囲が示されている。基準細長比 $\bar{\lambda} = 1.0$ あたり

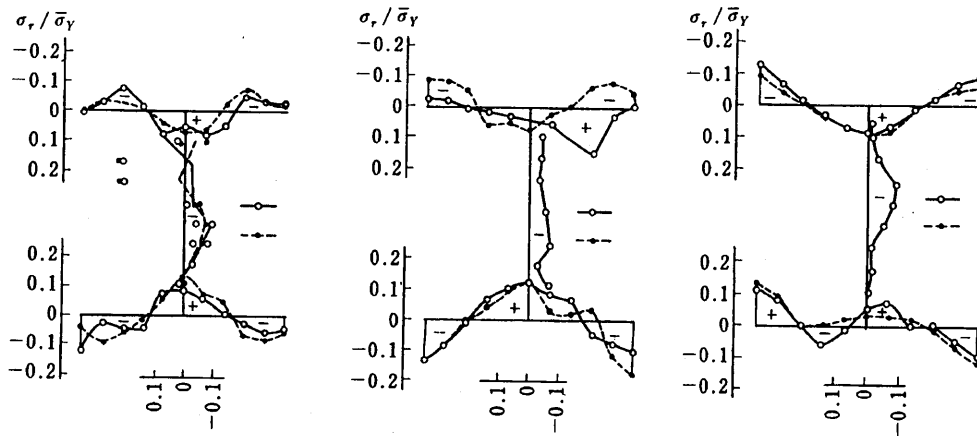


図 8.3.3 ローラー矯正後の圧延 H 形鋼の残留応力分布例

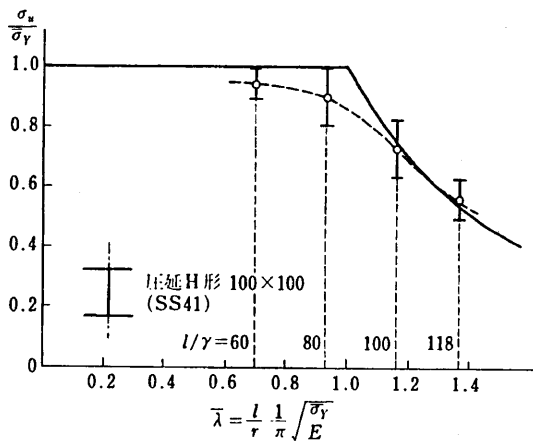


図 8.3.4 圧延 H 形鋼柱の中心軸圧縮強度分布

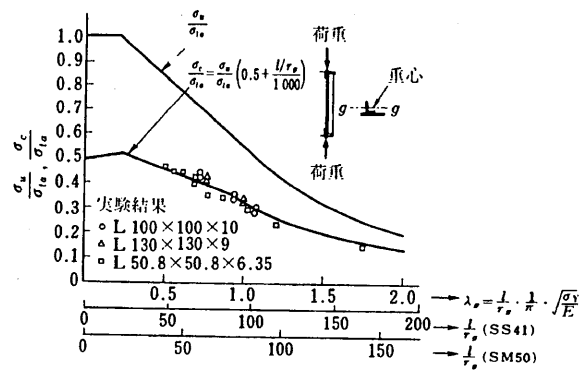


図 8.3.5 山形鋼の偏心圧縮強度と耐力曲線

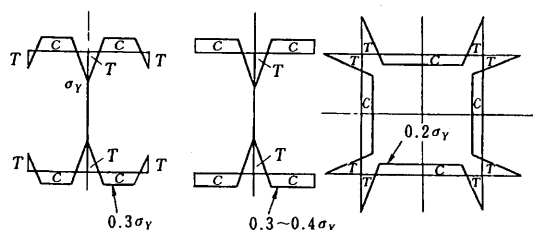
で変動係数 S/M は最大となり、6.4%を示した。

(2) 山形鋼

山形鋼は送電鉄塔の主部材，橋梁構造などでは対傾構，横構のような2次部材に多く用いられる。2次部材では一般にガセットを介して力が伝達されるので部材重心に力を作用させることができず，偏心圧縮状態となる。また曲げ座屈よりねじり座屈が問題となることがある。偏心圧縮される柱は本来 第 10 章 に述べるはり一柱として設計されるべきであるが，簡単のため道路橋示方書 (2002) では山形および T 形断面柱に対して宇佐美ら (1971, 1972) の研究結果をもとに中心軸圧縮柱の基準耐力式に次のように低減率を乗じて設計してもよいとしている。

$$\frac{P}{A} \leq \sigma_u \left(0.5 + \frac{\ell/r_g}{1000} \right) \tag{8.3.1}$$

ここに、 P は軸方向圧縮力， A は断面積， σ_u は中心軸圧縮柱に対する基準耐力曲線， ℓ は有効座屈長， r_g は断面の重心を通りガセット面に平行な軸周りの断面 2 次半径である。式 (8.3.1) と実験結果の比較は 図 8.3.5 のように，両者の間によい一致が見られる。同図中の $\sigma_c = P/A$ ， σ_{ta} : 鋼材の引張り許容応力度である。山形鋼は単一材として用いられるほか，2本を合わせて T 形断面としたり，タイプレートを用いて組み立て部材を



(a) ガス切断されたフランジ (b) 帯板を用いたフランジ (c) 箱型断面

図 8.3.6 溶接組立て柱の残留応力分布形

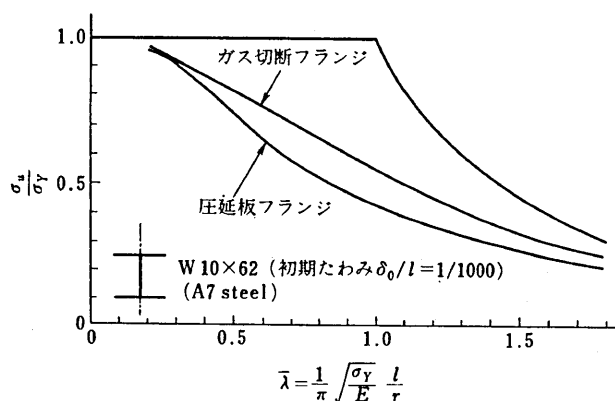


図 8.3.7 ガス切断フランジおよび圧延板フランジをもつ溶接H形柱強度 ([Johnston,(ed)(1974)] より)

構成したりすることがある。

(3) 溝形鋼

溝形鋼が単一で圧縮部材として用いられるときには山形鋼と同様、ガセットによる偏心圧縮状態となる。溝形鋼はタイププレートまたはレーシングバーを用いて組み立て部材を作る場合もある。山形鋼や溝形鋼による組み立て部材は今日では仮設部材として用いられることはあっても永久構造物として建設されることはほとんどない。

8.3.2 溶接組立て柱

溶接組み立て柱として現在最も一般的に使われているのはH形断面柱と箱形断面柱である。これらの部材の溶接部には一般に降伏応力にも達する引張り残留応力が生じており、溶接部と離れた部分にはこれと断面内でつり合う圧縮残留応力が生じている。

(1) 溶接H形柱

溶接H形柱の断面構成板はほとんどの場合、原板をガス切断して製作しているため、フランジ端部には図8.3.6(a)に示すような引張り残留応力が生じる。フランジに帯板 (Universal mill plate) を使用することはわが国ではほとんどないが、特に禁じられているわけではなく、この場合には同図(b)に示すように圧縮残留応力がフランジ端部にまで分布しているため、ある作用外力で、これに伴う弾性部分の有効な断面2次モーメント I_e は急速に小さくなる。したがって座屈強度はガス切断フランジを持つ部材に比べかなり低下する。両者の比較を図8.3.7に示す。わが国での実験結果が文献 [青木徹彦ら, 1974, 1982] にみられる。

H形断面部材のフランジ上にカバープレートを溶接する場合がある。この場合にもフランジ端部に溶接による引張り残留応力が生じるので、座屈強度上は有利になる。

溶接材に公差以上の初期変形が認められた場合、一般には工場にてプレスにより集中荷重を加え、ひずみを矯正する。圧延材に対するようなローラーは一般には用いられない。

(2) 溶接箱形断面柱

溶接箱形断面柱は強軸、弱軸の強度差がなく、圧縮材としては有利な断面である。座屈強度は溶接組み立てH形断面柱の強軸まわりの強度と同程度である。

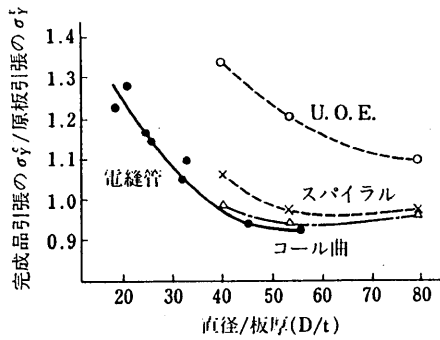


図 8.3.8 圧縮降伏点比 (D/t) 曲線

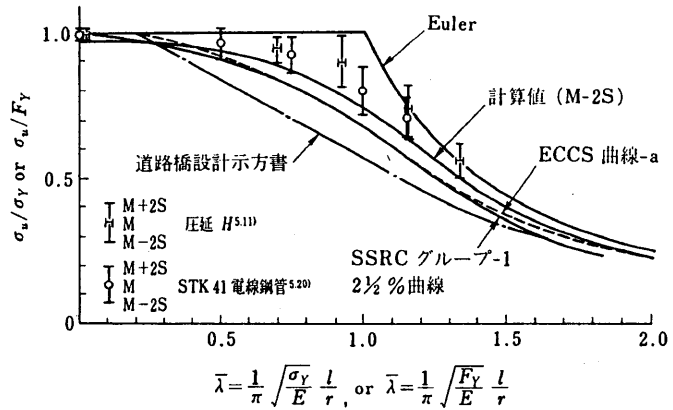


図 8.3.9 電縫鋼管 (D=114.3mm) の中心軸座屈実験結果と耐荷力曲線との比較

8.3.3 鋼管柱

鋼管材には断面寸法、使用目的によっていくつかの異なる製造法がある。主なものは比較的小口径のシームレスパイプ、管径 100~500mm までの電縫鋼管、帯板をらせん状に巻いて溶接するスパイラル管 (径 1600mm まで)、および大口径管として用いられるガス溶接管 (U.O.E 管、板巻き鋼管ともいう) などである。U.O.E 管は始めに平板をプレスで U 字形に成型し、さらに O 形にした後、ガス溶接で接合して作られる。長尺はできないからいくつかの円管ブロックを長さ方向に溶接して長くする。

以上のうち、構造用鋼管として最も一般的に用いられているのは電縫鋼管で、製鉄所でコイル材から連続的に能率よく製造されるため、品質が高く経済的である。スパイラル管は製造量は多いが、構造部材としてよりも基礎杭として多用される。以下では電縫鋼管の特性および柱強度特性について述べる。この部材は製造工程で帯板コイルを直線に戻し、管状に曲げ加工するため、管径 D と板厚 t の比によって、加工後の材料特性は著しく変化する。図 8.3.8 は管径比 D/t の異なる電縫鋼管の短柱実験による断面平均降伏点応力 σ_y^c の実験結果を示しており、径に対して肉厚の大きい部材では降伏点応力の上昇が著しい。この関係に対し、次の近似式が求められている [Kato,1977]。

$$\sigma_y^c / \sigma_y^v = 1.38 - 0.009(D/t) \tag{8.3.2}$$

ここに、 σ_y^v は原板の引張り降伏点応力である。

管に成形後は電気抵抗発生熱による加熱圧着が瞬時に行われるため、残留応力は極めて小さく無視できる。管内部の残留応力は主として冷間加工の過程によって生じ、軸方向の残留応力のほかに円周方向の残留応力も生じる。また板厚方向に引張りから圧縮まで大きく変化している。このように電縫鋼管材の残留応力分布状態は他の部材に比べ極めて複雑であるが、文献 [青木徹彦ら,1981] ではこれを座屈強度に関係する軸方向の残留応力と等価な量に変換する方法を示している。これにより従来の H 形鋼と同様の取り扱いが可能となる。

電縫鋼管の中心軸座屈強度は、前述のように管の D/t によって大きく変化するが、その管の短柱降伏強度で無次元化すればその変化は減少し、圧延 H 形柱の弱軸まわりの座屈強度曲線にほぼ一致する。図 8.3.9 は比較的小口径 ($D = 114.3\text{mm}$, $D/t = 25.4$) の電縫鋼管の座屈実験結果 [青木徹彦ら,1983] である。4 つの細長比に対してそれぞれ 30 本の柱の実験値より平均値 M 、標準偏差 S を求め、ばらつきを $M \pm 2S$ の幅で示している。図中に示した現行道路橋示方書 [日本道路協会, 2002] に比べ、実験結果は基準細長比 $\bar{\lambda} = 1$ 付近の中間柱領域で特に高い耐力を示している。送電鉄塔で用いられる鋼管は一般に溶融亜鉛メッキされる。その際、発熱により鋼管内の残留応力が解放され、座屈強度は約 20 % 上昇する。

8.4 鋼柱の基準耐荷力

8.4.1 伝統的な設計式

従来から各国独自で用いられてきた鋼柱の中心軸圧縮強度式はほとんどが経験式である。古くから提案され、今日でもなお多くの国で使用されている設計式として、Rankin-Gordon式(1866)、Tetmajer式(直線式1891)、Johnson式(放物線式1893)がある。Rankin-Gordon式は不可避の偏心を考慮した座屈強度式[セカント式(8.2.8)]の類型として得られる。柱の初期たわみを基礎としたPerry-Robertson式(8.2.11)も設計基本式としてよく用いられる。

偏心量や初期たわみの設計上の基準値は、各国ともそれぞれ異なった考えに基づいて定めている。AASHTO(1969)、AREA(1970)の示方書では式(8.2.8)の初期偏心比 ec/r^2 の値として0.25を規定している。ドイツの基準DIN4114(1952)では初期偏心比を $e = r/20 + l/500$ とおいたT形断面柱の非弾性最大強度をJezekの方法により求めて基準値にしており、座屈曲線は直線式(Tetmajer式)に近い。一方、アメリカのCRC(Column Research Council)の柱基本公式には放物線形の経験式が用いられている。この設計式は初期たわみがなく、残留応力を考慮した圧延H形鋼柱の強軸および弱軸まわりの接線係数荷重の平均的な値を基に定めている。AISC(1969)の示方書にはこのCRC式が柱の設計基礎式として採用された。これらの基準強度式を設計に用いる場合、座屈応力 σ_{cr} を安全率で除して許容応力を定めるが、示方書によっては安全率を細長比 L/r に無関係に一定とする場合と L/r の値に応じて変化させる場合がある。

以上が伝統的に用いられてきた主な設計式であるが、その基本となる考え方は次の2つに大別できる。一つはヨーロッパを中心に採用されてきたもので、柱の理想状態からの座屈耐荷力の低下の要因を幾何学的不整(偏心や初期たわみ)におく考えである。他の一つはアメリカのCRC柱曲線に代表されるように、残留応力のみを強度低下の根拠とするものである。コンピュータによる解析技術が発達していない時代にはいくつもの初期不整を同時に含んだ鋼柱の耐力を理論的に求めるのは困難であったため、上記のように弾性限界点や接線係数理論による解を設計の基本とした。

8.4.2 複数柱曲線

鋼柱の中心軸圧縮実験は従来から、世界各国で大量に行われてきた。最大耐荷力に関するこれらの実験データを各々の降伏点応力 σ_Y で無次元化し、細長比に関する変化を模式的に示すと図8.4.1の斜線のようになり、実用的な中間柱領域で相当大きなばらつきが現れる。

鋼柱の耐荷力を変動させる主な要因には、1) 鋼種、材料強度の違い、2) 製法(圧延か溶接か)、3) 断面形(H形、箱形、円形など)、4) 柱の座屈軸方向(強軸まわりか弱軸まわりか)などがある。また同じ種類の鋼柱でも、5) 残留応力の量や分布形、6) 初期たわみ量等に比較的大きなばらつきが見られ、座屈強度に大きな変動が生じる。

従来の設計法では、これらの強度差にもかかわらず単一の基準強度曲線を用いてきた。しかし部材ごとの安全性のバランスと経済性を

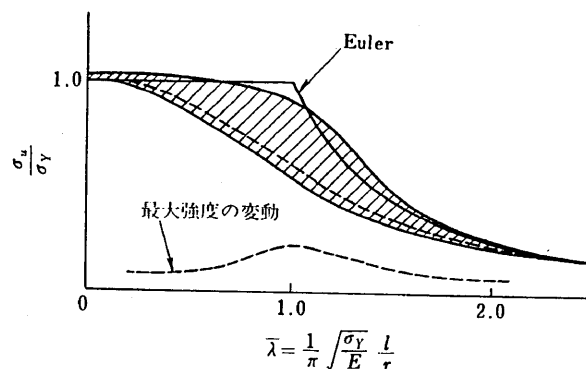


図 8.4.1 座屈実験結果の分布と変動

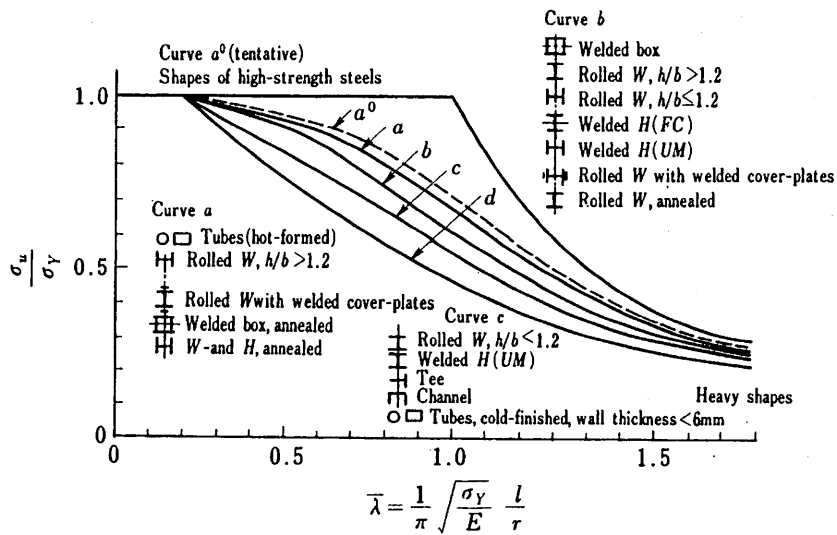


図 8.4.2 ECCS 柱曲線

向上させ、また今日までのデータの蓄積や解析技術の向上等を考えるなら、単一の設計式でもって設計を行うことはもはや合理的とはいえない。そこで、同程度の強度を有する柱を、断面形や製作法、座屈軸方向ごとに整理してグループ化し、各々に耐荷力曲線を設定するという考えが生じる。ECCS では、このような背景の基に 10 年上の期間をかけ、1000 本余りの鋼柱の中心軸圧縮実験を行って結果を統計的に整理した [Sfintesco,1970]。また残留応力と $\ell/1000$ の初期たわみを考慮した数値解析を多数行って実験結果と照合した [Beer et al., 1970]。以上の結果を基に、柱を 5 グループに分け、それぞれに耐荷力曲線を定めた。これらの耐荷力曲線は保証降伏点応力で座屈実験値を無次元化する限り、それぞれの適用断面に対してほぼ実験値の下限を与えている。

1983 年に出版された Eurocode3(1983) には 図 8.4.2 に示すような 5 つの耐荷力曲線 a_0, a, b, c, d とそれに属すべき部材の種類、支持軸の方向が分類され規定に定められた。ヨーロッパ各国では従来の自国の基準をこの統一基準に変えるか、あるいは近づける努力を行っている。その後、コンピュータによる設計を容易にするため、上記の複数曲線を式 (8.2.11) の Perry-Robertson 式と類似の式 ($\eta = \alpha(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)$ とおく) を用いて、次の 1 つの関数で表し、パラメータにより各曲線に分類できるよう提案されている [Rondal et al., 1979]。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_u}{\sigma_Y} &= 1.0 & \bar{\lambda} \leq \lambda_0 \\ &= \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} [1 + \alpha(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}^2 - \sqrt{\{1 + \alpha(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0 + \bar{\lambda}^2)\}^2 - 4\bar{\lambda}^2}] & \bar{\lambda} \geq \lambda_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.4.1)$$

ここに $\bar{\lambda}$ は式 (8.2.4) で表され、 $\alpha, \bar{\lambda}_0$ にはそれぞれの複数曲線に対して表 8.4.1 に示す値を与える。

一方、アメリカでも 1970 年頃から複数柱曲線の検討が始められた。旧 CRC (1966) に代わる SSRC ガイド 5th ed.(1998) には実測残留応力と初期たわみ量 $\ell/1000$ を仮定した 112 本の鋼柱に対する強度曲線を数値解析的に求め、これを 3 グループに分類して、それぞれに平均値曲線、上下限 (2.5%, 97.5%) 曲線を定めている。式 (8.4.1) をこれらの平均値曲線に当てはめたときの係数値を表 8.4.1 の SSRC 欄に示す。

わが国の現行道路橋示方書 [2002] では前述の ECCS-d 曲線を参考にし、これのほぼ下限値に相当する以下の式 (8.4.2) で表される単一基準耐荷力式を定め、これに安全率 1.7 を確保するよう許容軸方向圧縮力を定めている。

表 8.4.1 式 (8.4.1) および表 8.4.2 の係数

	曲線	α	$\bar{\lambda}_0$		曲線	α	$\bar{\lambda}_0$		曲線	α	$\bar{\lambda}_0$
ECCS	a_0	0.125	0.2	SSRC	1	0.103	0.15	Group	1	0.089	0.2
	a	0.206	0.2		2	0.293	0.15		2	0.224	0.2
	b	0.339	0.2		3	0.662	0.15		3	0.432	0.2
	c	0.489	0.2								
	d	0.756	0.2								

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\sigma} &= 1.0 && (\bar{\lambda} \leq 0.2) \\
 &= 1.109 - 0.545\bar{\lambda} && (0.2 < \bar{\lambda} \leq 1.0) \\
 &= 1.0 / (0.773 + \bar{\lambda}^2) && (1.0 < \bar{\lambda})
 \end{aligned} \right\} \quad (8.4.2)$$

ここに、 $\bar{\sigma} = \sigma_{cr} / \sigma_Y$ である。

わが国における鋼柱の中心軸圧縮強度のばらつきに関する実験的研究は、圧延H形鋼柱 [青木徹彦ら, 1972] に関して行われて以来、溶接H形柱 [青木徹彦ら, 1974, 1982]、電縫鋼管柱 [青木徹彦ら, 1983] について行われた。これらの供試体断面寸法は ECCS と同様、比較的小形の部材である。

一方、複数強度曲線に関する研究も行われた。文献 [福本ら 1983], [Fukumoto et al., 1983] では ECCS 曲線 (a_0, a, b, c, d) および SSRC 曲線 (No.1, No.2, No.3) の複数曲線に関して、西欧 1015 本、日本 510 本、北米 137 本の計 1665 体の実験結果をデータベースに納め、柱の断面形状、製作加工法の違い、鋼種などの分類とそれに対応する強度式の妥当性についての検討を行っている。これによると実験値を保証降伏点応力で無次元化する限り、ECCS 曲線はほぼ実験値の下限を与えている。一方、SSRC 曲線は実験値を鋼種の実測降伏点応力で無次元化すると、曲線 No.1 は適用断面に対してほぼ平均を与えているが、No.2, No.3 は実験値のほぼ下限を与えており、適用断面が適切に分類されていないことがわかる。

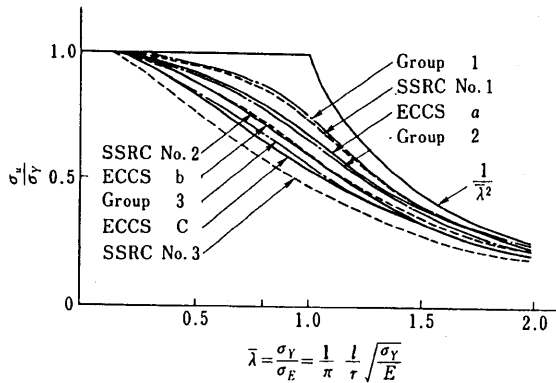


図 8.4.3 欧日米の鋼柱の基準耐荷力曲線

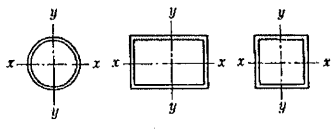
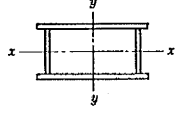
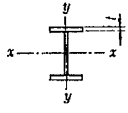
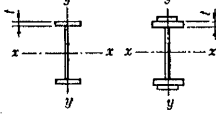
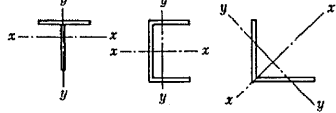
同文献では実証的にみた鋼柱の強度をグループ 1, 2, 3 として分類し、それぞれの曲線に適合する主な断面と強度曲線群との対応を表 8.4.2 のように与えている。また式 (8.4.1) の係数は、グループ 1, 2, 3 に対して $\alpha = 0.089, 0.224, 0.432$, $\bar{\lambda}_0$ は一定値 0.2 を与えている。欧、米、日の複数曲線を比較すると図 8.4.3 のようになる。

最近の研究として、織田ら (1996) は図 8.4.4 のような初期不整を持つ中心軸圧縮柱の強度を弾塑性有限要素解析により求め、式 (8.4.1) と同じ Perry-Robertson 公式を用い、同式の α を初期たわみと残留応力の 2 つの初期不整の関数として式 (8.4.3) の形で表し、係数 A_1, A_2, A_3 を表 8.4.3 のように与えている。この方法では断面形状で区分するのではなく、断面形ごとに初期不整を与える形で強度曲線を定めている。今後、実験データとの比較検証が望まれる。

$$\alpha = A_1 \cdot F_0^* + A_2 \cdot \sigma_R^* + A_3 \cdot F_0^* \cdot \sigma_R^* \quad (8.4.3)$$

ここに、 $F_0^* = (f_0 / L) \times 1000$, $\sigma_R^* = \sigma_{rc} / \sigma_Y (0.0 \leq \sigma_R^* \leq 0.5)$ である。

表 8.4.2 断面形によるグループ化

断面形	座標軸まわりの座屈	グループ
	両軸とも	1
	両軸とも	1
	$t \leq 40 \text{ mm}$ 両軸とも	1
	$t > 40 \text{ mm}$ 両軸とも	3 (2)*
	$t \leq 40 \text{ mm}$ 両軸とも	2
	$t > 40 \text{ mm}$ 両軸とも	3
	両軸とも	2

* () 内の数字は $\sigma_y > 400 \text{ N/mm}^2$ の範囲で適用

表 8.4.3 柱の初期不整感度係数

断面形		A_1	A_2	A_3
箱形		0.152	0.428	-0.0264
H形	圧延 (強軸回り)	0.162	0.162	0.139
		0.113	0.156	0.0478
	溶接 (強軸回り)	0.143	0.871	0.267
		0.129	0.434	0.0402

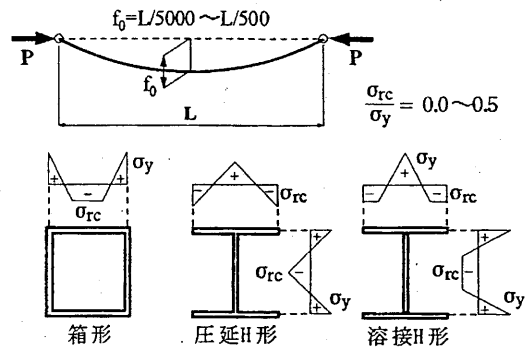


図 8.4.4 柱の初期不整

8.5 弾性拘束された柱

実構造物中の柱は、一般には今まで述べたような両端単純支持という理想状態ではなく、端部は直接またはガセット等を介して他の構造に結合されている。この節ではより実際に近い柱の強度特性を知るために、有効座屈長で表される両端が単純支持でない境界条件を持つ柱、および途中で横方向に弾性拘束された柱の基本挙動を述べる。

8.5.1 有効座屈長

両端が単純支持以外の弾性柱の座屈荷重は、境界が簡単であれば微分方程式から簡単に求められる。柱長を Kl とすると座屈荷重は、

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(Kl)^2} \tag{8.5.1}$$

表 8.5.1 代表的な境界条件と座屈有効長

境界条件	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	境界条件の説明 (θ = 回転) (u = 移動)
Kの理論値	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0	$\theta = 0, u = 0$ θ : 自由, $u = 0$ $\theta = 0, u =$ 自由 $\theta =$ 自由, $u =$ 自由
SSRCの推奨値	0.65	0.80	1.2	1.0	2.1	2.0	

ここに、 K は有効座屈長係数（または有効長さ係数）といい、単純支持以外の境界条件を持つ柱の座屈強度を、これと等しい単純支持柱長さに変換する係数と考えることができる。 Kl は有効座屈長と呼ばれ、座屈変形した柱の変曲点長さ（単純支持柱長さに相当）を表す。

代表的境界条件を有する柱の K の理論値を表 8.5.1 に示す。理論値の下に示した数値は SSRC ガイド [Jonston,1998] によって示された推奨値で、図に示した境界条件が実構造物では完全に満足されないことに対する安全側の値である。

より現実的な構造では、たとえば剛結トラスに見られるように、荷重の作用により構造物が変形すると、剛結された柱端部には2次的な曲げモーメント（2次応力）が生じる。このため圧縮強度は単純支持柱より低下するはずである。しかしさらに荷重が増大し、部材の変形が進行すると剛結端部は逆に柱の変形を拘束する効果を生じるので強度増が期待できる。この間の柱の変曲点間距離は、はじめは部材長より大きく、最後はやや小さく変化していく。すなわち有効座屈長も変化することに注意が必要である。

8.5.2 途中で支持された柱

細長比の大きい柱でも、中間に横方向のわずかな支えをするだけで座屈強度を著しく増加させることができる。またH形断面柱のような、強、弱軸方向で座屈強度が大きく異なる部材の場合、弱軸方向のみ横方向に中間支持できれば、柱全体の強度を増大させる。

中間支持された圧縮柱の強度は中間支材の剛性や強度によって変わるが、ある程度以上の大きさを持つば支持点間距離を有効座屈長と考えて設計できる。道路橋示方書(2002)の14章トラスの解説には、中間支材は柱に作用する圧縮力の1%に相当する抵抗力を持つこととしている。また日本建築学会鋼構造設計規準(1980)では、精算によらない場合、圧縮力の2%以上の作用力に対して支材を設計するよう定めている。

以下に図 8.5.1 中に示すような、途中でバネ支持された両端単純支持柱の支材必要剛性と支持反力について述べる。このモデル柱の柱長を $2l$ 、中間支材のばね定数を k とすると、この柱の弾

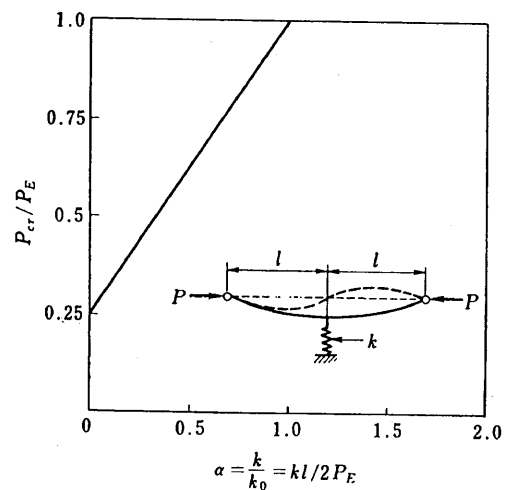


図 8.5.1 途中で弾性支持された柱の座屈強度とばね定数

性座屈荷重は支持ばね剛性 k によって変わり、つぎの座屈条件式としての超越方程式 (8.5.2) の解として得られる。

$$\frac{\tan 2u}{2u} = 1 - \frac{P}{k\ell/2} \quad (8.5.2)$$

ただし、 $u = (\ell/2)\sqrt{P/EI} = (\pi/2)\sqrt{P/P_E}$ 、 P_E は Euler の座屈荷重 ($\pi^2 EI/\ell^2$) である。

上式の解は 図 8.5.1 のようになる。同図で横軸の α は次式で表される無次元量である。

$$\alpha = k/k_0 \quad (8.5.3a)$$

$$k_0 = \frac{2}{\ell} \left(\frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \right) = \frac{2P_E}{\ell} \quad (8.5.3b)$$

ここに、 k_0 は基準ばね定数で、座屈波形が 図 8.5.1 に破線で示す波形となるのに必要な最小ばね剛性である。図 8.5.1 からわかるように、 $\alpha \geq 1$ の全範囲で $P_{cr}/P_E = 1$ となる。また $\alpha < 1$ の範囲で P_{cr}/P_E と α の関係はほぼ直線的である。

つぎにこの柱が両端に等しい偏心量を有する場合の弾塑性座屈を考える。文献 [Matsi et al,1977] はやや大きな偏心量を有し、理想弾塑性材に近い応力—ひずみ関係を仮定した矩形断面柱の耐荷力を数値解析的に求め、中間ばね定数 α との関係調べている。それによると $\alpha = 3$ 程度で中間剛支持に近い結果が得られた。しかし材端の偏心量が逆対象形の場合、柱の耐荷力はかなり低下している。等偏心柱の中間に $\alpha = 3$ の剛性の支材を与えて数値計算を行い柱の圧縮力と支持反力 F との関係求めた結果 [最相ら, 1971] は、設計基準に定められた強度を得るに必要な補剛力 F は柱の圧縮力の 1~2 % の間にあることを示している。

8.6 局部座屈と全体座屈の連成強度

8.6.1 はじめに

柱の座屈強度を断面積一定のまま増大させるには、薄肉断面として断面 2 次モーメントないし断面 2 次半径を大きくするとよい。しかし構成板要素を薄くしすぎると局部座屈が生じ、柱全体の耐荷力を失わせる。局部座屈と全体座屈強度のうちの最小値が柱の強度を支配すると考えられるから、板要素の局部座屈強度が柱の全体座屈強度を下回らないように板厚を選ばなければならない。これが Bleich(1952) によって代表される伝統的な薄肉鋼柱の座屈設計に対する考え方である。

ところが実構造部材を取り出して中心軸圧縮実験を行い、注意深く観察すると、構成板要素に明確に局部座屈が生じて、柱全体の耐荷力はこれに関係ないように上昇し続ける。多くの実験結果では、局部座屈時点で柱全体の軸方向剛性や、荷重—横方向変形曲線に目立った変化は観察されない。これは局部座屈に関しては十分な後座屈強度があるためである。しかし荷重の増加とともに局部座屈変形が目立って大きくなるとやがて全体剛性も低下していく。すなわち実構造物中では局部座屈と全体座屈は別のものでなく相互に影響しあって連成座屈が生じる。この現象は複雑であり、設計では一般に構成板の局部座屈と柱としての全体座屈とに分け、これらを組み合わせた設計式を用いている。以下では主に平板を構成して作られる H 形断面柱、箱形断面柱等について述べる。

8.6.2 局部座屈強度

板の局部座屈強度に対して、Dwight(1971) は、実際の板に存在する初期たわみや残留応力の影響を考慮し、有効幅理論をもとに以下の式を導いた。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cr}/\sigma_Y &= 1.0 & (R \leq C) \\ \sigma_{cr}/\sigma_Y &= C/R \quad C = 0.85 - \sigma_{cr}/\sigma_Y & (C < R) \end{aligned} \right\} \quad (8.6.1)$$

ここに、 R は 幅厚比パラメータで

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_Y}{\sigma_E}} = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k}} \quad (8.6.2)$$

σ_E は板の弾性座屈応力、 b は板幅、 t は板厚、 σ_Y は鋼材の降伏点、 E はヤング係数、 ν はポアソン比、 k は座屈係数（両端支持板で 4.0、自由突出板で 0.43）である。

一方、わが国の道路橋示方書 (2002) は局部座屈に対する基準耐荷力を次式のように定めている。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cr}/\sigma_Y &= 1.0 & (R \leq 0.7) \\ \sigma_{cr}/\sigma_Y &= 0.5/R^2 & (0.7 < R) \end{aligned} \right\} \quad (8.6.3)$$

上式は $R > 0.7$ の範囲で、理想板の弾性座屈強度の 1/2 としている。これを図 8.6.1 に示す。同図には、溶接箱形断面柱の全体座屈との関連で行われた SM58 材による短柱圧縮実験結果 [宇佐美勉ら, 1981, 1982] を描いているが、実験結果は、Dwight が有効幅理論をもとに導いた式 (8.6.1) で $C=0.737$ とおいたものによく一致している。他の多くの研究結果も同様の結果であり、現行道路橋示方書式は実験結果との乖離が大きい。

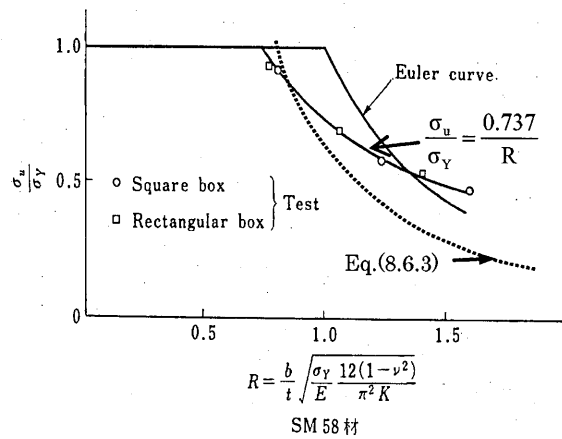


図 8.6.1 道路橋示方書と実験結果

板要素の強度を初期不整の関数として表したものととして、宇佐美ら (1992)、奈良ら (1994) の研究がある。宇佐美らは柱強度式 (8.4.1) と同じく

Perry-Robertson 型の式で以下のように表している。4 辺単純支持板（有効幅 b_e/b 、 b は板幅）に対して、

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y} \left(= \frac{b_e}{b} \right) = \frac{1}{2R} (\beta - \sqrt{\beta^2 - 4R}) \quad (8.6.4)$$

ここに、

$$\beta = 1 + \bar{a}(R - R_{cr0}) + R \quad (8.6.5)$$

上式中の \bar{a} 、 R_{cr0} は板の初期たわみ δ_0/b 、残留応力 σ_{rc}/σ_Y の関数として与えている。3 辺単純支持、1 辺自由の突出板に対して、葛ら (1996) は同様の有効幅公式を定めているが、式 (8.6.4) の右辺に $2.5(\beta - R - 1)2$ を加え、初期たわみ、残留応力に対して異なった敏感度係数を与えている。

8.6.3 局部座屈と全体座屈の連成強度

先に述べたように薄肉の柱を圧縮実験すると、構成板に局部座屈が生じても柱としての全体座屈が直ちに生じることはなく、その影響を受けるとしても局部座屈強度で柱としての耐荷力は決定されない。そこで局部座屈を許す設計法が一般的に認められるようになり、1969 年から AISC(1969) では Q-factor 法が、1980 年から道路橋示方書ではそれに類似した考えの積公式が採用された。

Q-factor 法は、局部座屈を生じるような薄肉の柱と同断面の短柱強度 $Q\sigma_Y$ ($Q \leq 1.0$) をはじめに求め、これをその柱の仮想の低減された降伏応力と考えて、既存の柱設計強度式の降伏応力 σ_Y を $Q\sigma_Y$ に置き換えて設計式として用いるものである。すなわち、次式で表される。

$$\frac{P_u}{P_Y} = Q \cdot f(\sqrt{Q} \cdot \bar{\lambda}) \quad (8.6.6)$$

道路橋示方書 (2002) では、Q-factor 法と同様、柱の基準強度を降伏強度に対する板の局部座屈強度の割合 ($Q = \sigma_{cat}/\sigma_{cao}$) で低減する積公式の方法をとっている。すなわち、次式のように表される。

$$\frac{P_u}{P_Y} = Q \cdot f\left(\frac{L}{r}\right) \quad (8.6.7)$$

示方書に示されているように許容応力度で表せば

$$\sigma_{ca} = \sigma_{cag} \cdot \sigma_{cat}/\sigma_{cao} = \sigma_{cag} \cdot Q \quad (8.6.8)$$

ここに、 σ_{cag} は局部座屈を考慮しない許容軸方向圧縮応力度で、基準耐力式は細長比 L/r の関数で与えられている。 σ_{cat} は板要素の局部座屈に対する許容応力度で、基準耐力式は前述の式 (8.6.3) による。 σ_{cao} は局部座屈を考慮しない許容軸方向圧縮応力度の上限値である。伊藤は (1981) この考え方の背景を単純化したモデルによる数値解析結果を用いて解説しているが、そこでも述べられているように当時は研究資料が不足しており、実験な裏付けも十分ではなかった。

そこで、連成座屈に関する実験的、解析的研究はその後に、わが国で多く見られるようになった。箱形断面部材では、宇佐美ら (1981) は HT80 材について、続いて宇佐美ら (1982) により SM58 材を用いた幅厚比の大きい溶接箱形断面柱について、さらに山尾ら (1983)、久保ら (1991) による研究がある。宇佐美ら (1981,1985)、中井ら (1985)、長谷川ら (1985)、西村ら (1987) は解析的研究を行っている。薄肉 H 形断面部材の連成座屈問題に対しては、山尾ら (1987,1987) および青木ら (1988) による実験的研究があり、右田ら (1992) は多角形断面短柱の連成座屈実験を行っている。

設計式に関する提案として、西村ら (1987)、中井ら (1985)、長谷川ら (1985) によるものがある。Davis ら (1986) は局部座屈強度の算定に有効幅の概念を用い、全体強度の算定に Q-factor 法や積公式を適用している。実験的結果を参照して連成強度を評価した研究 [藤井ら, 1998] もある。

西村ら (1987) は Q-factor 法、積公式の他に諸外国の基準の比較も行っているが、これらの間の強度には比較的大きな差が見られ、妥当な設計式を探し出すためには実験データによる検証が必要である。これに対して織田ら [1996] は、上記の多くの実験に関する文献の中から初期不整の示されているものを選び、柱に対しては式 (8.4.1) および (8.4.3) を、また板に対しては式 (8.6.4) を用い、式 (8.6.6) の Q-factor 公式によってこれらを組み合わせ、連成座屈強度を初期不整の関数として求めている。結果は図 8.6.2 のように、実験強度と Q-factor 法による推定強度との相関で示している。このように初期不整を考慮して Q-factor 法を評価すると、実験強度との誤差は大きくてもほぼ 10% 程度であり、高い精度を持つことを示した。

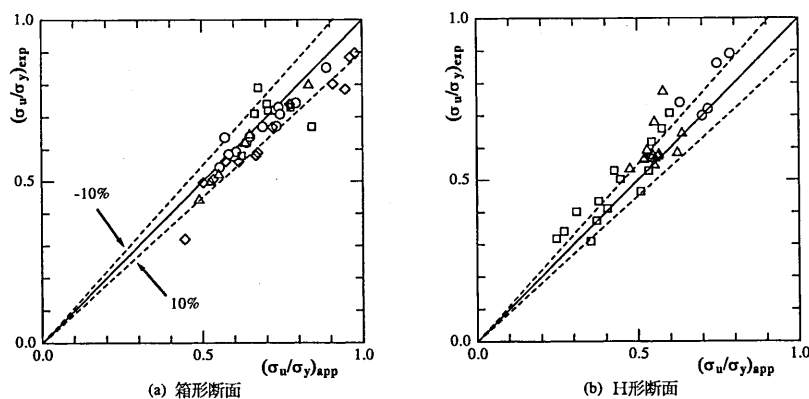


図 8.6.2 Q-factor 法による推定強度と実験強度との相関

最近ヨーロッパで、美観を重視した新しい鋼柱形式として三角形断面でその頂点に鋼管を有する部材がアーチ弦材に用いられている。青木ら(2001)はこのような部材強度を調べるために、鋼管の間に薄鋼板 ($R = 0.7$) を用いた鋼柱の中心軸および偏心軸圧縮強度と鋼板の局部座屈開始強度の関係を実験的に調べている。全体強度は板の局部座屈開始点の約2倍もの大きさを示し、また後座屈による最大強度は板の非載荷辺が鋼管により回転拘束され固定支持に近い場合、薄肉であるにもかかわらず降伏点まで達している。この場合でも、柱の強度は短柱強度を補正に用いる Q-factor 法が実際挙動をよく表す結果となった。

8.6.4 連成座屈柱の最小重量設計

宇佐美(1997)は前述の Q-factor 法を用いて連成座屈する箱形およびH形断面柱の最小重量設計について、独創的な研究を行っている。箱形断面柱の連成座屈強度は、柱強度に式(8.4.1)の ECCS-b 曲線を利用し、 $\bar{\lambda}$ を $\sqrt{Q} \cdot \bar{\lambda}$ で置き換え、Q を乗じてつぎのように得られる。

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_Y} = \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} [1 + Q\bar{\lambda}^2 + \eta - \sqrt{(1 + Q\bar{\lambda}^2 + \eta)^2 - 4Q\bar{\lambda}^2}] \tag{8.6.9}$$

$$\eta = 0.339(\sqrt{Q\bar{\lambda}} - 0.20) \tag{8.6.10}$$

ここで幅 b 、板厚 t の無補剛正方形断面柱を考えて、細長比と幅厚比の関係を導く。断面積 $A = 4bt$ 、 $r \simeq b/\sqrt{6}$ であり、このとき次式となる。

$$\frac{L}{r} = 2\sqrt{6} \frac{L}{\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{b/t}} \tag{8.6.11}$$

L/r と b/t をそれぞれ $\bar{\lambda}$ と $\bar{\lambda}_p$ (板の幅厚比パラメータ) に置き換えると、上式は次のようになる。

$$\bar{\lambda} = \beta \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}_p}} \tag{8.6.12}$$

ここで、 β を次式のように置いている。

$$\beta = 1.131 \frac{L}{\sqrt{A}} \left(\frac{\sigma_Y}{E}\right)^{3/4} \tag{8.6.13}$$

そこで β 一定すなわち重量一定のもとで、式(8.6.9)と式(8.6.12)を用いることにより柱の強度が $\bar{\lambda}_p$ との関係で図8.6.3のように求められる。なお、Qファクターを求めるときに必要な局部座屈強度は式

(8.6.4)で評価し、この式で使用する初期不整は平均強度に相当する値としている [宇佐美, 1992]。図8.6.3の破線は β 一定の曲線の中で連成座屈強度が最大になる点を結んだもので、重量一定のもとで荷重が最大となる最適設計値を表している。この図から $\beta < 0.42$ では $\bar{\lambda}_p$ で局部座屈が生じない設計が最適となっているが、 $\beta > 0.42$ では局部座屈を許す設計が最適となっている。特に β が大きくなるにしたがって、曲線の山は緩やかとなり、最適板幅の取りうる範囲は広がる。すなわち最適値より薄くしても強度低下は少ない。H形断面についても、同様な関係が導かれている。

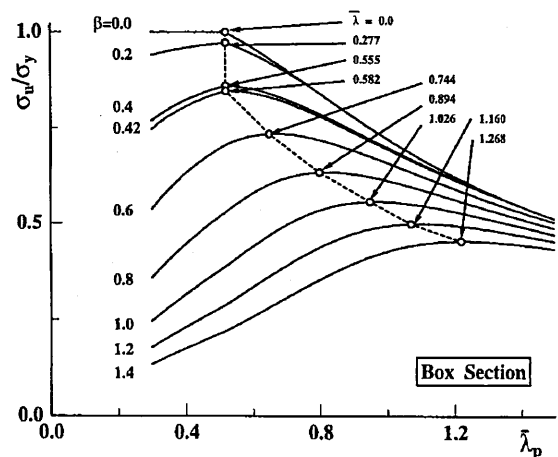


図 8.6.3 箱形断面柱の最適設計

8.7 変断面柱

ラーメン構造等の主として曲げが支配的な部材は変断面にすると経済的となる。曲げと軸力を受ける部材は第 10 章 で取り扱っているので、この章では軸力のみ受ける変断面柱について述べる。

図 8.7.1 に示す断面が階段状に変化する両端単純支持柱の座屈強度は以下の座屈条件式を解いて得られる。

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tan \lambda_1 \ell_1 \tan \lambda_2 \ell_2 - 1 = 0 \quad (8.7.1)$$

ここに、 $\lambda_1 = \sqrt{P/EI_1}$ 、 $\lambda_2 = \sqrt{P/EI_2}$ である。

一般的な変断面柱の弾性座屈については有限要素法を用いて解析することができ、解析手法については第 7 章 を参照されたい。

実用的な変断面柱に見られる弾塑性座屈強度については、有限要素法を利用して弾塑性有限変位解析を行うか、簡易的には等価初期たわみを導入した弾性 2 次解析で求めることができる [織田ら,1994]。

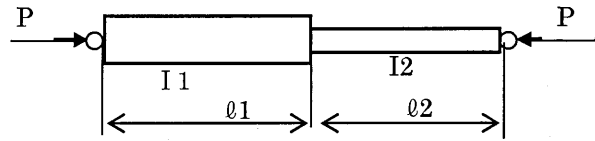


図 8.7.1 階段状変断面柱

8.8 今後の展望

鋼柱の座屈強度については、歴史上他のどの部材よりも多くの理論的、実験的研究がなされ、すでに多くの蓄積がある。そのためここ数十年は新たな研究は少ない。しかし、なお解決すべきいくつかの問題は存在する。以下にこれを述べ、今後を展望する。

- (1) 複数曲線を設計の基本式に採用する動きは各国ともあるが、基礎となる信頼性の高い実験データの蓄積が不十分で、また実験されたものでも試験体の寸法が全般的に小さい。
- (2) 実験値の補完に数値解析が行われるが、その際初期たわみ量を $f_0 = \ell/1000$ と仮定して計算することが多い。この値は実測下限値としても大きすぎるため、実験値との直接的比較や、特に信頼性設計でばらつきを問題にするときには注意が必要である。ただし、実構造物では避けられない偏心があり、定量的に不明なところが多いため、これを初期たわみ量に含ませるという意味であれば、設計上は妥当な仮定といえるかもしれない。
- (3) 数値解析に用いる残留応力の実測データが不十分である。引張り試験による応力-ひずみ関係と実測残留応力を用いた短柱圧縮の数値解析でさえ、実験結果、特に接線係数を精度よく再現することは困難である。
- (4) 現在の柱の設計は、両端単純支持柱の強度曲線を基準にしている。実構造物中の柱は一般に両端が他の部材に剛結されており、そのような柱の強度、有効長さを理論的、実験的に明らかにする必要がある。
- (5) 限界状態設計への動向に対応して、部材としての強度に大きな影響を及ぼさない局部座屈を許す設計がされるようになったが、実験的検証例が十分とはいえない。
- (6) 中心軸圧縮を受ける変断面柱の実験的データの蓄積が少ない。
- (7) 近年の社会的背景から、既存構造物の腐食等の経年劣化とそれに伴う座屈強度の低下が問題にされるようになってきたが、関連するデータの蓄積はほとんどない。送電鉄塔等の部材では腐食劣化が顕在化しつつある。劣化を見据えた安全係数の見直し、既存構造物材の適切、合理的な補修、補強方法が今後の課題となろう。

参考文献

- DIN 4114 Blatt(1952): Stahlbau, Stabilitätsfälle(Knickung, Kippung, Beulung), Berechnungs-grundlagen, Vorshrichten, Juli, 1952.
- Bleich, F.(1952): Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
- Timoshenko, S. and Gere, J. (1961):Theory of Elastic Stability, Mcgraw-Hill, New York, 1961.
- 木原博監修 (1967) : 塑性設計法, 森北出版, p.116, 1967.
- AISC(1969): Specifications for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings, 1969.
- AASHTO(1969), Standard Specifications for Highway Bridges, 10th ed., American Association of State Highway and Transportation Officials, 1969.
- 日本鋼構造協会, 標準委員会, 鋼管 JIS 小委員会 (1970) : 塑性加工をうけた鋼材の機械的性質—STK41 の引張りならびに圧縮に対する機械的性質—, JSSC, Vol.6, No.53. P8, 1970.3.
- Galambos,T.V., 福本嘸士, 西野文雄訳 (1970) : 鋼構造部材と骨組み—強度と設計—, 丸善, 1970.
- AREA(1970), Specifications for Steel Railway Bridges, American Railway Engineering Association, 1970.
- Beer, H. and Schultz, G. (1970): Theoretical Basis of the European Column Curves, Contr. Metal., No.3, p.58, 1970.
- Sfintesco, D.(1970): Experimental Basis of the European Column Curves, Constr. Metal., No.3, p.5, 1970.
- 宇佐美勉, Galambos,T. V.(1971) : 二軸曲げをうける単一山形鋼材の強度, 土木学会論文報告集, No.191, pp.31-44, 1971.
- 最相元雄, 田中尚, 高梨晃一, 宇田川邦明 (1971) : 圧縮材の横方向補剛について, 日本建築学会論文報告集, No.184, pp.73-79, 1971. 6.
- Dwight, J. B.(1971) : Collapse of Steel Compression Panels, in “Developments in Bridge Design and Construction”, Crosby Lockwood & Son, 1971.
- 青木徹彦, 福本嘸士 (1972) : 鋼柱の座屈強度のばらつきに及ぼす残留応力分布の影響について, 土木学会論文報告集, No.201, pp.31-41,1972.
- 宇佐美勉, 福本嘸士 (1972) : ブレーシング材としての山形およびT形鋼部材の圧縮強度と設計, 土木学会論文報告集, No.201, pp.43-50, 1972.5.
- 奥村敏恵, 西野文雄, 長谷川彰夫 (1972) : 箱形断面柱の局部座屈強度, 土木学会論文報告集, No.205, pp.19-30, 1972.9.
- Lee, G.c., Morrell, M. L., and Ketter, R.L.(1972) :Design of Tapered Members, Welding Research Council, Bulltin No. 173, June, 1972.
- 吉田博, 西田進 (1973) : 変断面H形鋼柱の強度と変形, 土木学会論文報告集, No.220, pp.17-28, 1973.12.
- 青木徹彦, 福本嘸士 (1974) : 溶接H形鋼柱の座屈強度分布について, 土木学会論文報告集, No.222, pp.37-48, 1974.2.
- Jonston, B (ed)(1974) : Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 3th Edition, John Willy & Sons,New York, p41, 1974.
- 加藤勉, 青木博文 (1975) : 電気抵抗溶接鋼管のひずみ履歴と残留応力—短柱の圧縮試験における見かけの応力—ひずみ関係への影響について—, 日本建築学会論文報告集, No.230, pp.43-52, 1975.3.
- Kato, B(1977): Column curve for cold-formed and welded steel tubular members, stability of steel structures, Preliminary Report, Second International Colloquium at Liege, ECCS, pp.53-60, April, 1977.
- Matsi, C. and Yagi, K. (1977): On the lateral bracing required for compressionmembers,2nd Int.Colloq. on Stability of Steel Structures, Preliminary Report, Liege, pp.101-106, 1977.4.
- Deutscher Ausschuss fur Stahlbau (DASt.)(1978) : Beulsicherheitsnachweise fur Platten, Dast-Richtlinie 012, 1978.
- Rondal, J. and Maquoi, R.(1979) : Single equation for SSRC column-strength curves, ASCE, ST1 Technical Notes, pp.247-250, 1979.1.
- 鋼構造座屈設計指針 (1980) : 日本建築学会, pp.161-170, 1980.
- Johnes, S. W., Kirby, P.A. and Nethercot, D.A. (1980): Effect of semi-rigid connections on steel column strength, JCSR, Vol.1, No.1, Sept., pp.38-46, 1980.
- 青木徹彦, 福本嘸士 (1981) : 小口径電縫鋼管の統計的材料強度特性と残留応力分布の評価, 土木学会論文報告集, No.314, pp.39-51, 1981.10.
- 伊藤文人 (1981) : 道路橋示方書・II 鋼橋編—改訂の背景と運用, [研究の動向] 局部座屈と全体座屈の連成問題, 橋梁と基礎, pp41-43, 1981.2.
- 宇佐美勉, 福本嘸士, 青木徹彦 (1981) : 溶接箱形断面柱の局部座屈と全体座屈の連成強度に関する実験的研究, 土木学会論文集, No.308, pp.47-58, 1981.4.

- 宇佐美勉, 福本嘔士 (1981): 鋼圧縮部材の連成座屈強度実験と有効幅理論による解析, 土木学会論文報告集, No.326, pp41-50, 1981.4.
- 西野文雄, 三木千寿, 鈴木篤 (1981): 道路橋示方書 II 鋼橋編改訂の背景と運用, 第8回13章ラーメン構造, 橋梁と基礎, pp.10-13, 1981.10.
- 青木徹彦, 福本嘔士 (1982): 200x200mm 溶接H形鋼柱の中心軸座屈強度に関する統計的実験, 土木学会年次学術講演会, pp397-398, 1982.10.
- 福本嘔士 (1982): 構造物の座屈・安定解析, 土木学会編, 新体系土木工学9, 技報堂出版, 1982
- Sugimoto, H. and Chen W. F. (1982): Small End Restraint Effect on Strength of H-columns, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 108, No. ST3, pp.661-680, 1982.
- 青木徹彦, 福本嘔士 (1983): 小口径電縫鋼管柱の中心軸圧縮強度分布, 土木学会論文報告集, No.337, pp.17-26, 1983.9.
- 西村宣男, 小松定夫, 山縣延文 (1983): 弾性拘束を受ける圧縮部材の有効座屈長に関する考察, 土木学会年次学術講演会, pp.241-242, 昭和58年.
- 福本嘔士, 伊藤義人 (1983): 座屈実験データベースによる鋼柱の基準強度に関する実証的研究, 土木学会論文報告集, No.335, pp.59-68, 1983.
- 山尾敏孝, 崎元達郎 (1983): 溶接箱形断面柱の連成座屈強度実験, 土木学会論文報告集, No.335, pp195-198, 1983.7
- Aoki, T. and Fukumoto, Y. (1983): Experiments of end restraint steel welded H-columns, preliminary report, 3rd Int. Colloq. Stability of Metal Structures, pp.71-76, Nov. 1983.
- Eurocode 3(1983): Common Unified Code of Practice for Steel Structures (draft), July 1983.
- Johnston, B.G. (1983): Column buckling theory; historic highlights, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.109, No.9, Sept. 1983, pp.2086-2096.
- Fukumoto, Y. and Itoh, Y. (1983): Evaluation of multiple column curve from the experimental data-base approach, Journal of Constructional Steel Research, Vol.3, No.3, pp.2-19, 1983.
- Lui, E.M. and Chen, W. F. (1983): Strength of H-columns with small end restraints, The Structural Engineer, Vol.61 B, March, No.1, pp.17-26, 1983.
- 宇佐美勉, 福本嘔士, 青木徹彦, 松川昭夫 (1984): 補剛箱形断面偏心圧縮柱の強度に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, No.350/I-2, pp.197-250, 1984.10
- 西出俊亮, 小松定夫, 西村宣男 (1984): ストラットモデルによるトラス圧縮材の極限強度の評価, 土木学会年次学術講演会, pp.87-88, 昭和59年
- 宇佐美勉, 土屋信洋, 福本嘔士 (1985): 鋼圧縮部材の連成座屈挙動の理論的研究, 土木学会論文集, No.362/I-4, pp303-312, 1985.10
- 長谷川彰夫, 安保秀範, 西野文雄 (1985): 鋼柱の局部座屈と全体座屈の連成強度推定のための一モデル解析, 構造工学論文集, Vol.31A, pp51-63, 1985.3.
- Nakai, H., Kitada, T., Miki, T. (1985): Interaction of thin-walled box stub-column subjected to compression and bending for applying to overall buckling analysis of columns, Proc. of JSCE Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 2, No.2, pp311-319, 1985.10.
- 山尾敏孝, 崎元達郎 (1986): 板要素とはり要素の結合による薄肉鋼構造物の有限変位弾塑性解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.32A, pp291-302, 1986-3
- 山尾敏孝, 崎元達郎 (1987): 薄肉H形短柱の連成座屈に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, No.380/I-7, pp383-390, 1987.4.
- 山尾敏孝, 崎元達郎 (1987): 薄肉H形短柱の耐荷力挙動に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, No.380/I-7, pp331-339, 1987.4.
- Davis, A. J. and Hancock, G. J. (1986): Compression test of long welded I-section, Jour. of the Struct., Div., ASCE, Vol. 112, No. ST10, pp.2281-2297, 1986.
- 西村宣男, 小松定夫, 西出俊亮, 西村良司 (1987): 局部座屈を考慮した鋼箱形断面柱の設計公式, 構造工学論文集, Vol.33A, pp171-182, 1987.3.
- Chew, S.H., Lee, S.L., Shanmugam, N.E. (1987): Experimental study of thin-walled steel box columns, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.113, No.10, pp2208-2220, 1987.10.
- 青木徹彦, 福本嘔士 (1988): 軽量溶接H形鋼柱の局部座屈と全体座屈に関する実験的研究, 構造工学論文集, Vol.34A, pp161-170, 1988.3.
- 西村宣男, 吉田信博 (1988): 鋼H形断面柱の連成座屈強度特性と設計公式, 土木学会論文集, No.398, pp.161-170, 1988.10.
- 西村宣男, 青木徹彦, 西井学, 福本嘔士 (1989): 鋼柱部材の基本強度の統一評価, 土木学会論文報告集, No.410/I-12, pp325-333, 1989.10.
- 久保全弘, 小川春由樹 (1991): 薄肉鋼柱の極限強度の簡単な評価法, 構造工学論文集, Vol.37A, pp83-91, 1991.3.

- 宇佐美勉, 天雲宏樹 (1992) : 圧縮と曲げを受ける板要素の極限強度と有効幅公式, 土木学会論文報告集, No.441/I-18, pp77-85, 1992.1.
- Migita, Y., Aoki, T., Fukumoto, Y.(1992): "Local and interaction buckling of polygonal section steel columns", J. Struct. Engrg., ASCE, 118(10), 2659-2676. 1992.
- 奈良敬, 下野直己, 森脇良一 (1994) : 面内曲げ圧縮を受ける鋼板の極限強度の統計学的評価法, 構造工学論文集, Vol.40A, pp.316-329, 1994.3.
- 福本嘯士 (1994), 新体系土木工学 9 構造物の座屈・安定解析, 技報堂, p112, 1994.
- 織田博孝, 宇佐美勉 (1994) : 弾性 2 次解析による変断面骨組の設計法, 土木学会論文集, No.489/I-27, pp.129-138, 1994.4.
- 織田博孝, 宇佐美勉 (1995) : 弾性 2 次解析を用いた骨組み構造物の連成座屈強度解析, 構造工学論文集, Vol.31A, pp51-63, 1985.3.
- 織田博孝, 長谷川雄一, 宇佐美勉 (1996) : 初期不整の関数で表した連成座屈強度公式の実験データによる検証, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.31-40, 1996.7.
- Oda, H., Usami, T., and Ge, H.B.(1996) : Experimental reexamination of coupled buckling strength formula considering initial imperfection, proc. Of the Second International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, CIM '96, Imperial College Press, pp.133-140, 1996.
- Ge, H.b. and Usami, T.(1996): Ultimate strength formula of steel outstands in compression, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.122, No.5, pp573-578, 1996.5.
- Fukumoto, Y.(ed)(1997): Structural Stability Design, Pergamon, 1997.
- Usami, T.(1997): Structural Stability Design, Edited by Fukumoto, Y., Pergamon, 1997.Ch.10., pp328-329, 1997.
- 藤井伸彦, 堂垣正博, 三上市蔵 (1998) : 鋼H形部材の全体座屈と局部座屈の連成強度, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.44A, pp115-126, 1998.3.
- 青木徹彦, 佐藤徹也, 郭曉光 (2001) : 鋼管を頂点に持つ薄肉三角形断面鋼部材の局部座屈実験, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.47A, pp85-92, 2001.3 .
- 日本道路協会 (2002) : 道路橋示方書・同解説, p175, 平成 14 年.