

第7章 数値解析手法・ベンチマーク

7.1 概 説

実務において構造物の安定性を照査する場合、通常はモデルを用いた微小変位弾性解析により得られる部材断面力と弾性座屈解析で評価される有効座屈長をもとに構造物を部材単位に分解し各種部材の耐荷力照査式が用いられてきた。つまり、設計で用いる主たる数値解析としては弾性微小変位解析と有効座屈長を算定するための線形座屈解析であった。このような従来の安定照査法では断面力や有効座屈長の評価精度が不十分な場合も多く、しかも応力の再分配も考慮できないので、その精度や汎用性は必ずしも十分ではない。さらに、耐震設計などで重要な変形性能の評価もできないという問題点を有している。

近年の計算機と有限要素法に基づく構造解析ソフトの著しい進歩により部材のみならず、構造物の終局挙動はかなりの部分が数値計算により直接評価が可能になってきている。例えば、一般に、難しいと考えられていた局部座屈を伴う薄肉構造の座屈挙動も汎用プログラムのシェル要素を用いた複合非線形解析（幾何学的非線形性と材料非線形性を同時に考慮した解析）で直接解析可能になってきている。さらに、平成8年の道路橋示方書の改訂以来、レベル2地震動に対して損傷を許容するが、構造物の重要度に応じて致命的な被害の防止や損傷制限を目標とした耐震設計が行われているため[日本道路協会, 2002]、構造物の終局領域までの挙動が静的解析のみならず動的解析により直接予測される場合が増加している。

今後の計算機のさらなる進歩を考えると、非線形汎用ソフトを用いた構造物の終局挙動の解析法は近い将来、実務において広く採用されることは容易に予測される。しかしながら、有限要素法は近似の解析手法であるため、モデル化、要素分割、収束計算などでの許容誤差などにより解が影響をうけることは避けられない。とくに、耐荷力を計算する複合非線形解析ではこのような影響が顕著である。したがって、精度の良い解析を行うためには有限要素法による非線形解析に関する最低限の基礎知識が必要である。

構造物の不安定挙動はその非線形挙動に起因することから、これらを考慮するための非線形解析についてまず解説を行う。すなわち、構造物が大きく変形することで生ずる幾何学的非線形性の影響を反映するための幾何学的非線形解析 (*Geometrically nonlinear analysis*) と材料の降伏や塑性化などによって生じる材料非線形性 (*Material nonlinearity*) を構造物の終局挙動予測に反映するため幾何学的非線形解析に導入した複合非線形解析 (*Combined materially and geometrically nonlinear analysis*) について概説する。つぎに、構造物の安定照査の一環として用いられる各種解析のうち有効座屈長評価のための線形座屈解析、幾何学的非線形性による応力、変位の増加量を算定するための線形化有限変位解析、構造物の強度や変形能を評価する耐荷力解析、また地震などの動的荷重下での構造物の終局挙動を予測する複合非線形動的応答解析について解説するとともに、それらの制御法や収束計算法等のアルゴリズムなどについてもふれる。なお、鋼構造物の終局挙動を精度良く解析するために初期不整の導入が重要でこれについては耐荷力解析のところで行及する。さらに、いくつかの実例を挙げて解析手続きについて説明するとともに信頼できる解析結果をベンチマークとして示す。

7.2 幾何学的非線形解析と複合非線形解析

7.2.1 幾何学的非線形解析

構造物のひずみや変位が大きくなると、これらの影響を無視した微小変位解析の精度が低下するために、ひずみや変位の影響をつり合い式に反映した非線形解析を実施することが必要である。このような非線形性はひ

ずみや変位などの幾何学量に起因するので、幾何学的非線形解析と呼ばれる。とくに、座屈現象などが伴う終局状態を解析するときは必ず幾何学的非線形解析を行わねばならない。なお、微小変位解析の適用限界を一般的に示すのはむずかしいが鋼製橋脚の耐震解析においては指針が示されている [後藤ら, 2002]

幾何学的非線形解析は、微小変位解析に対応して有限変位解析とも呼ばれる。さらに、対象とするひずみの大小により有限変位解析は有限ひずみ・有限変位解析と微小ひずみ・有限変位解析とに分けられる [西野ら, 1975] [後藤ら, 1991]。微小ひずみ・有限変位解析はひずみが微小であるという条件により、有限ひずみ・有限変位解析を近似化したものである。微小ひずみ・有限変位解析で変位が比較的小さい場合には、2次解析 (2nd order analysis) [Goto et al., 1987] と呼ばれる簡易解析法が用いられる。2次解析ではつり合い式において、非線形項を最大限1次まで考慮しているが、ひずみ・変位関係においては変位の2次項まで考慮する場合と線形項のみ考慮した微小変位理論によるものを用いる場合とがある。後者は線形化有限変位解析とも呼ばれる。線形化有限変位解析は有効座屈長を求めるため座屈解析や変位が比較的小さい場合の解析に用いられる。有限変位解析の分類 [土木学会, 1994] を表 7.2.1 にまとめている。

表 7.2.1 幾何学的非線形解析の分類

解析法		変位	ひずみ
有限ひずみ・有限変位解析		大	大
微小ひずみ・有限変位解析		大	小
* 2 次 解 析	(I) ・つり合い式において、変位の1次項のみ考慮 ・ひずみ・変位関係において2次項まで考慮	比較的小	小
	(II) ・つり合い式において、変位の1次項のみ考慮 ・ひずみ・変位関係において線形項のみ考慮 (線形化有限変位解析)	比較的小	小
微小変位解析		小	小

注) *はりの2次解析においては、(I)の解析は、はり柱理論で図 7.2.1 の曲げによる軸方変位 (Bowling) を考慮した場合に対応する。一方、(II)は、曲げによる軸方変位が無視された場合に対応する。

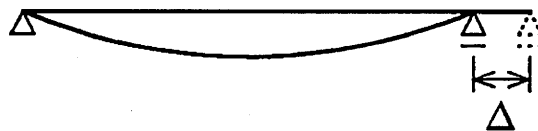


図 7.2.1 Bowing effect

はり理論を用いて解析する場合は、もともと、はりのモデル化においてひずみが小さなことを前提としているので、微小ひずみ・有限変位解析でほぼ十分と考えられる。一方、シェル要素を用いて、薄板構造物の局部座屈挙動を解析する場合や2次元平面要素や3次元ソリッド要素でひずみの集中化などを解析する場合、塑性化が生じるとひずみが大きくなるので、有限ひずみ・有限変位解析を行う必要がある。有限ひずみ・有限変位解析では、用いる応力とひずみの定義の差により大きな違いが生ずるので注意しなければならない。材料試験などでは一般に、公称応力・工学ひずみを用いて一軸の応力・ひずみ関係 ($\sigma^n \sim \varepsilon^e$) が提供されるが、汎用プログラムなどではこれを真応力・対数ひずみ関係 ($\sigma^t \sim \varepsilon^\ell$) に変換して入力しなければならない場合が多い。なお、弾性ひずみは微小として無視すると両者の変換式は次のようになる。

$$\sigma^t = \sigma^n(1 + \varepsilon^e), \quad \varepsilon^\ell = \ln(1 + \varepsilon^e) \quad (7.2.1)$$

7.2.2 複合非線形解析

構造物の終局状態での発生ひずみが大きい場合、塑性化などに伴う材料の非線形な応力・ひずみ関係（材料構成則）を幾何学的非線形解析に反映する必要がある。このような構造材料の非線形挙動を幾何学的非線形解析に考慮した解析を複合非線形解析と呼んでいる。ほとんどの土木構造物ではその終局挙動を直接解析する場合には複合非線形解析を適用することが必要になる。鋼材において、損傷は降伏現象と通常対応し、この挙動を表すモデルとしては第5章に述べられているように塑性モデルが最も一般的である。終局挙動を解析するには降伏棚を超えた硬化域の挙動も考慮する必要がある。硬化則として単調载荷の場合は等方硬化則、移動硬化則、混合硬化則（等方硬化+移動硬化）[山田, 1980]などが用いられる。一方、耐震解析などで繰り返し荷重を受ける場合、実務では移動硬化則が用いられることが多いが、より実際に即した2曲面モデル、修正2曲面モデル、3曲面モデルなどの繰り返し塑性モデル[Dafalias et al., 1976; Shen et al., 1993; 後藤ら, 1998; 西村ら, 1995]を用いると精度の高い解析が可能である。なお、単調载荷条件下の解析では、除荷挙動を無視した近似的な非線形弾性モデルが用いられることも多い。複合非線形解析では材料モデルの差により結果が大きな影響を受けるので、実情に合致したモデルを採用すべきである。汎用プログラムでは利用できる応力・ひずみ関係に制約があるが、利用者が必要な応力・ひずみ関係をユーザーサブルーチン[Hibbit et al., 1999]として準備すれば任意の構成則を設定することができるようになってきているものも最近では増えている。

7.3 有限要素法による各種安定解析

7.3.1 不安定挙動と実務における解析の現状

構造物の静的解析における不安定挙動は主として図7.3.1(a)に示すような分岐挙動（分岐座屈）と図7.3.1(b)極限点挙動（屈伏）に分けることができる。このような不安定挙動を解析するためには特別な配慮が必要である。分岐挙動は初期不整のない対称性を持つ構造について現れる現象であり、初期たわみなどの不整が避けられない現実の構造では厳密な意味での分岐挙動となることはほとんどなく、極限点挙動により終局状態に至る場合が多い。このため、分岐挙動の解析は理想的な場合を対象として構造物の不安定挙動が生ずる理由を理解する手段として用いられる場合、後述する骨組部材の有効座屈長算定に用いられる場合、あるいは座屈モードに基づき初期たわみの形状を決定する場合がほとんどである。初期不整のある実際の構造物の終局挙動を追跡する場合は極限点挙動の解析が中心になる。

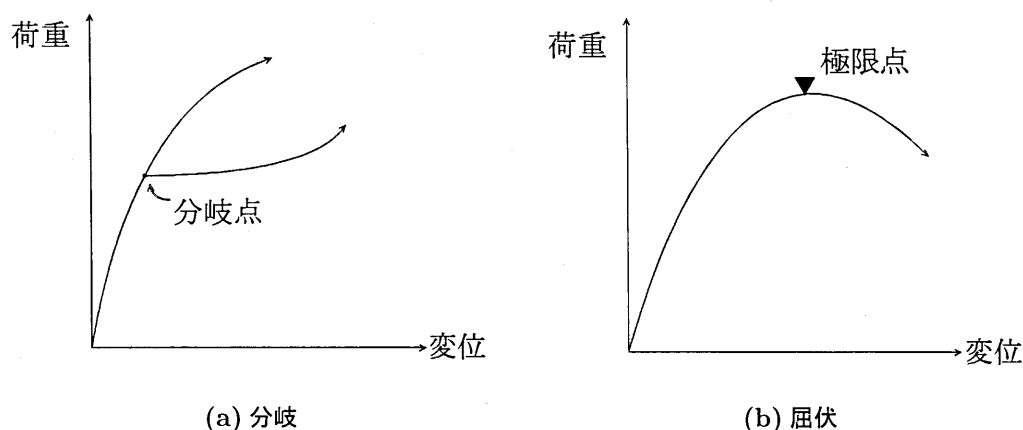


図 7.3.1 構造物の不安定挙動

実務分野では座屈解析，耐荷力解析という名称で座屈安定挙動の解析の分類がなされる．座屈解析は座屈荷重の計算に基づく各部材の有効座屈長の評価や座屈モードに基づき初期たわみの形状を決定する場合に用いられることが多い．この解析は，変形が十分小さいことを前提に座屈前の変形を無視した線形固有値解析により分岐荷重や極限点荷重を座屈荷重として求める．このような解析を線形座屈解析と呼ぶ場合がある．一方，耐荷力解析は複合非線形解析に基づき構造物の極限点挙動を追跡することで，終局状態を含む変形挙動を直接予測するものである．この解析は構造物の耐震設計などで変形能を評価する場合での適用も多い．各種商用ソフトも上記のような実務分野での線形座屈解析や耐荷力解析に対応できるようになっている．耐荷力解析でのピーク点近傍やピーク以降の挙動は実務においては変位制御で解析される場合が多いが，一般的に扱うには弧長制御 (Riks 1979) の機能が無ければならない．多くのソフトにある荷重制御や変位制御の機能では適用できる範囲に制限がある．この他，直接不安定挙動を解析するものではないが幾何学的非線形性による応力や変位の影響を考慮するために実務では線形化有限変位解析がよく用いられる．

動的解析では時間積分を行うため数値計算では解の安定性や精度を確保するためには時間増分について配慮が必要である．これが十分でないと見かけ上，発散する挙動を示す．一般に，動的解析では静的解析において不安定な構造であっても必ずしも動的不安定（発散振動）とはならない．このため，7.3.3 で後述するような静的解析における増分方程式の解法のように特別な配慮は必要ない．実務分野で重要である構造物の動的な終局挙動は地震時の終局挙動であり，この解析には各種商用ソフトの複合非線形動的応答解析が用いられる．

ここでは，実務分野での重要性を考慮して，座屈解析，耐荷力解析，線形化有限変位解析および複合非線形動的応答解析について説明する．

7.3.2 座屈解析

実務において用いられる座屈解析はいわゆる有効座屈長算定や初期たわみの形状を求めるための線形座屈解析が中心である．線形座屈解析では座屈前に生じる変形を完全に無視している．この場合，7.2.1 で述べた線形化有限変位理論に基づく要素剛性方程式 $f = (k_E^e + k_G^e)d$ をもとに通常 of 有限要素法の手順どおりに要素節点でのつり合い条件，変位の連続条件，境界条件を考慮して全体の剛性方程式を組み立てる．このようにして作成された平面骨組構造の剛性方程式は一般に次のような形になる．なお，平面骨組要素の要素剛性行列は微小変位剛性行列 k_E^e と幾何剛性行列 k_G^e からなり補遺に示すとおりである．

$$\lambda \bar{F} = (K_E + K_G(N_\alpha))D \quad (7.3.1)$$

ここで， K_E は微小変位理論による剛性行列， $K_G(N_\alpha)$ は荷重ベクトル $\lambda \bar{F}$ が作用した場合の幾何剛性行列でこの荷重ベクトルにより要素 α に生ずる軸力 N_α ($\alpha = 1 \sim n$: $n =$ 要素数) の線形関数である． λ は荷重モードベクトル \bar{F} の荷重係数を表す．荷重モードベクトルは荷重の載荷パターンを表すベクトルで $|\bar{F}| = 1$ となるように選ばれる場合が多い． D は節点変位ベクトルである．ここで，荷重モードベクトル \bar{F} が同じ構造に作用したときの微小変位理論で計算される要素軸力を \bar{N}_α とした場合，近似的に $N_\alpha \cong \lambda \bar{N}_\alpha$ が成立する．この関係を式 (7.3.1) の剛性方程式の軸力 N_α 項に代入すると幾何剛性行列 $K_G(N_\alpha)$ が N_α の線形関数であることより剛性方程式は次のようになる．

$$\lambda \bar{F} = (K_E + \lambda K_G(\bar{N}_\alpha))D \quad (7.3.2)$$

この式より，座屈条件式は次式となる．

$$|K_E + \lambda_{cr} K_G(\bar{N}_\alpha)| = 0 \quad (7.3.3)$$

式 (7.3.3) より固有値問題として座屈が生ずる荷重係数 λ_{cr} を求めることができ、座屈荷重に対応する座屈時の荷重ベクトルは $\lambda_{cr} \mathbf{F}$ 、また座屈時の要素軸力は $\lambda_{cr} \bar{N}_\alpha$ となる。ここで座屈荷重は対象とする構造物において分岐が生ずる場合は分岐荷重、分岐が生じない場合は極限点荷重にそれぞれ対応する。ただし、線形弾性体を仮定した構造では線形化有限変位解析によると極限点はつり合い経路上のピーク点として現れることはなく、最大荷重に漸近するだけである。部材 α の有効座屈長 $l_{\alpha ef}$ は次の関係より算定される。

$$l_{\alpha ef} = \pi \sqrt{\frac{EI_\alpha}{\lambda_{cr} \bar{N}_\alpha}} \quad (7.3.4)$$

ただし、この方法では設計荷重での軸力が小さい部材については有効座屈長が非常に大きくなる問題が生じる。この問題については第15章により詳しく示されている。

座屈前の変形が小さい場合は、上に示した線形座屈解析で十分であるが座屈前の変形が無視できない場合 (15.2.2 参照) は非線形座屈解析による必要がある。非線形座屈解析は有限変位解析によりつり合い経路を追跡しながら接線剛性行列式の値が零となる点として分岐点や極限点などの臨界点 (*Critical point*) を特定するものである。

7.3.3 耐荷力解析

耐荷力解析では、材料学的非線形性と幾何学的非線形性を考慮して誘導された増分型の要素剛性方程式 (接線剛性方程式) をもとに組み立てられた構造全体に対する次の増分型の剛性方程式が解析の基礎になる。

$$\Delta \lambda \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{D} \quad (7.3.5)$$

ここで、 \mathbf{K}_t は接線剛性行列で $\Delta \lambda, \Delta \mathbf{D}$ はそれぞれ荷重係数増分、節点変位増分をあらわす。耐荷力解析では、式 (7.3.5) をもとに逐次増分計算を行う。逐次増分計算は荷重係数の増分を規定し増分変位を求める荷重増分法、増分変位を規定し荷重係数の増分を求める変位増分法、荷重係数増分と変位増分で定義される次式の弧長増分 Δr

$$\Delta r = \sqrt{C \Delta \lambda^2 + (\Delta \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{D})} \quad (7.3.6)$$

を規定し荷重係数の増分と変位増分を求める弧長増分法 (Riks, 1979) などがある。ここに、 $(\Delta \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{D})$ は内積を示す。また C はスケーリングファクタで $\Delta \lambda^2$ と $(\Delta \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{D})$ のオーダーが異なることを補正する定数である。

最大荷重点に対応する極限点近傍の挙動を解析する場合、荷重増分法では極限点で接線剛性行列が特異となるため解析不能となる。このような場合は変位増分法や弧長増分法によらねばならないが、変位増分法では図 4.2.1 のようなスナップバック挙動が扱えないので、最も一般性のあるのは弧長増分法である。各増分段階での計算は一般にニュートン・ラプソン法のような繰り返し計算により行われる [Zienkiewicz et al., 2000]。このとき、塑性の材料構成則でひずみ増分に対して応力増分を計算する場合、応力点が常に降伏曲面上にのるようにリターンマッピング (*Return Mapping*) の手法 [日本塑性学会, 1996; Zienkiewicz et al., 2000] が用いられる。

第6章で述べたように、構造物の耐荷力は偏心や初期たわみのような幾何学的な初期不整とともに残留応力などの材料的な初期不整に影響される。したがって、耐荷力解析ではこのような初期不整を考慮する必要がある。この場合、幾何学的な初期不整のみの導入は容易であるが、板・シェル要素、3次元要素などでは残留応力の導入を正確に行うことは難しい。汎用プログラムによる解析では初期応力により残留応力値を導入すること

が多いが、この場合、目標となる残留応力に等しい初期応力を導入すると残留応力値のみならず初期たわみが変化し目標となる初期不整を正確に再現することができない [川西ら, 1999]。これを防ぐために、外力（仮想外力）を加える方法 [小松ら, 1980] も用いられているが、この外力が終局挙動に与える影響や精度については明らかでない。初期たわみと残留応力は独立ではなく相互に関係しているので、これらを正確に導入するためには設定された初期たわみと残留応力を目標値として導入初期応力と無応力状態の構造物の形状をいわゆる逆解析により決定することが必要である。ただ、目標として与えられる初期たわみと残留応力は実測値をもとに設定されているので、一般に両者が整合しておらず、逆解析の解が存在しない場合が多い。このような場合は、目標値との誤差が最小となるように導入値を設定する方法が提案されている [川西ら, 1999]。現実的には、残留応力に等しい初期応力を導入し、得られる残留応力が目標値と大きく異なる場合はこれを試行錯誤で修正するという方法が用いられることが多い。なお、残留応力は初期応力の代わりに温度荷重を用いて導入される場合もあるが、残留応力の目標値に合致するような温度分布を求めるためには初期応力と同様な手続きが必要である。

7.3.4 線形化有限変位解析

線形化有限変位解析では式 (7.3.1) に示す剛性方程式により作用節点荷重 $\lambda \bar{F}$ に対応した節点変位ベクトル D を計算するが、各部材の軸力 N_α は未知であるので、正確には繰り返し計算により軸力 N_α と整合する節点変位を求める必要がある。変位が比較的小さい場合は次のような繰り返し計算が用いられる。すなわち、節点変位の第 1 近似値は幾何剛性行列の $K_G(N_\alpha)$ を無視した微小変位の剛性方程式により求め、これにより各部材の軸力 N_α を算定する。つぎに、求めた軸力 N_α を幾何剛性行列に代入した剛性方程式により、節点変位の第 2 近似値を求める。これから、各部材軸力の第 2 近似値を算定できる。この過程を繰り返し節点変位の収束解を求める。実務においては、第 2 近似値を計算するだけで収束性については検討されない場合も多いが、変位が大きい場合は第 2 近似値では不十分な場合もある。

7.3.5 複合非線形動的応答解析

地震応答解析を対象とした複合非線形動的応答解析に用いる全体構造の運動方程式は次のように表される。

$$M(\ddot{D} + \ddot{D}_g) + C\dot{D} + R = F \quad (7.3.7)$$

ここで、 M は質量マトリックス、 C は減衰マトリックス、 R は構造物の復元力、 F は静的外力また \dot{D} 、 \ddot{D} はそれぞれ変位の時間に関する 1 階ならびに 2 階の微分を表す。 \ddot{D}_g は地盤での地震入力加速度である。

式 (7.3.7) の時間に関する数値積分法として、陰解法と陽解法に大別されるが [日本塑性加工学会, 1994]、地震応答解析などで多く用いられているものは陰解法であるのでこれについて主に解説する。

陰解法では式 (7.3.7) を増分した次式をもとにする。

$$M(\Delta\ddot{D} + \Delta\ddot{D}_g) + C\Delta\dot{D} + \Delta R = \Delta F \quad (7.3.8)$$

ここで復元力の増分が $\Delta R \equiv K_T \Delta D$ となることと、地震力が外力であること考慮すると、式 (7.3.8) は次のようになる。

$$M\Delta\ddot{D} + C\Delta\dot{D} + K_T\Delta D = \Delta F - M\Delta\ddot{D}_g \quad (7.3.9)$$

式 (7.3.9) の時間積分については線形加速度法、ニューマーク β 法やウィルソン θ 法などが用いられる。非線形問題では各時間増分区間でニュートン・ラプソン法のような収束計算により慣性力を含めた不釣り合い力が

許容誤差になるまで反復計算がなされる。

減衰マトリックス C の与え方は議論の多いところであるが、次のようなレーリー型として与えられることが多い。

$$C = \alpha M + \beta K_T \tag{7.3.10}$$

定数 α, β は通常、解析対象の構造物にとって重要な振動モードを2つ選び、そのモードに対する減衰定数により決定される。式 (7.3.10) において K_T は時間とともに変化するため α, β も逐次計算する必要があり C も変化するが、便法として初期の C をそのまま用いる場合もある。

陽解法では時間増分区間での反復計算は不要であり、この区間での計算時間は陰解法に比べ短縮されるが、時間増分区間を十分小さくとる必要がある。このように陽解法は解の収束性や安定性に難点があると言われている。陽解法はもともと時間増分を小さくとる必要のある衝撃や衝突解析などに用いられる場合が多いようである。

7.4 数値計算結果

本節では、ABAQUS [Hibbit et al., 1999] を用いた数値解析例を記述する。すべてにおいて、弾性変形のみを対象とし、材料非線形性は考慮しない。収束判定条件にはデフォルト値を使用する。線形座屈解析における固有値解析は式 (7.3.3) をもとにしているが、剛性行列 K_E 、幾何剛性行列 K_G は、要素レベルでも陽な形で成分を表示できないことがある。補遺には、例として、成分を陽な形で表せる場合の要素剛性行列 k_E^e 、要素幾何剛性行列 k_G^e を示す。

7.4.1 柱の座屈 (オイラー座屈)

図 7.4.1 に解析対象の柱を示している。いずれの柱も図 7.4.1(c) の断面を有している。端部の拘束条件は表 7.4.1 にまとめている通りであり、 $x-y$ 平面内の2次元問題となっている。使用する要素タイプは B23 で、形状関数が3次多項式の2次元2節点はり要素である。せん断変形は考慮されない。

表 7.4.2 に固有値解析結果 (最小座屈荷重) を示す。いずれの問題においても、要素数の増加に伴い、厳密解 [西野ら, 1983] に収束している。

固有値解析で得られた最小座屈荷重のモードを初期変形状とし、最大変位を部材長の 1/1000 とした初期変形を用いて有限変位解析を行った。解析結果として、荷重 P と y 軸方向の最大変位 v の関係を図 7.4.2 と

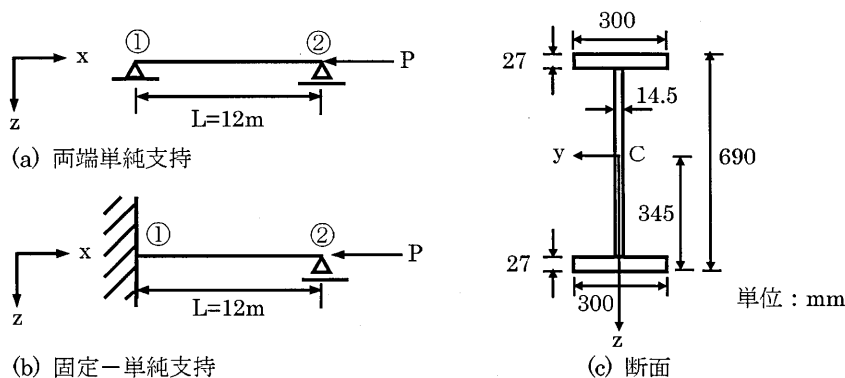


図 7.4.1 解析対象 (柱の座屈)

表 7.4.1 拘束条件 (柱の座屈)

	境界	自由度					
		x 軸方向	y 軸方向	z 軸方向	x 軸まわり	y 軸まわり	z 軸まわり
両端単純支持 (図 7.4.1(a))	①	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	自由
	②	自由	拘束	拘束	拘束	拘束	自由
固定-単純支持 (図 7.4.1(b))	①	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束
	②	自由	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束

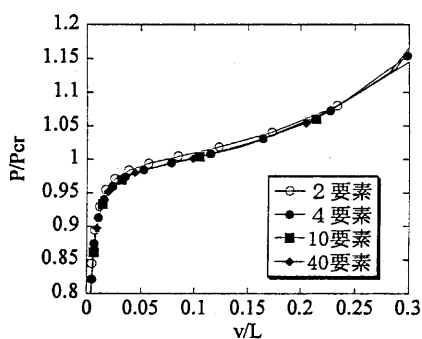
表 7.4.2 固有値解析結果 (柱の座屈)

(a) 両端単純支持 (厳密解 $P_{cr} = 1.751 \times 10^3$ kN)

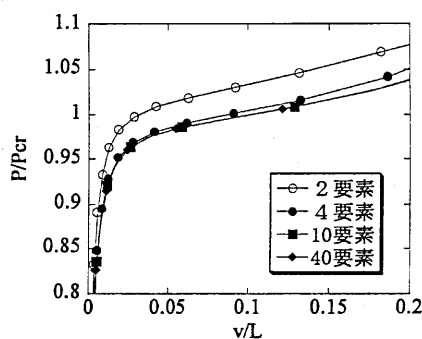
	要素数				
	1	2	3	5	10
最小座屈荷重 ($\times 10^3$ kN)	2.129	1.764	1.752	1.751	1.751

(b) 固定-単純支持 (厳密解 $P_{cr} = 3.582 \times 10^3$ kN)

	要素数						
	1	2	3	5	10	20	40
最小座屈荷重 ($\times 10^3$ kN)	5.323	3.674	3.604	3.585	3.583	3.582	3.582



(a) 両端単純支持



(b) 固定-単純支持

図 7.4.2 荷重 P - 変位 v 曲線 (柱の座屈)

表 7.4.3 にまとめている。要素数が増加するにつれ、解が収束していくのが確認される。

表 7.4.3(a) には、エラスティカの厳密解 [Timoshenko et al., 1961] も示している。エラスティカは初期変形がない場合の解であり、軸線の伸張や収縮も無視している。本数値解析結果との差はおもに初期変形の有無に起因する。ただし、変形が大きくなるに伴い初期変形の影響は小さくなり、エラスティカの厳密解と数値解析結果の差は減少している。

7.4.2 横ねじれ座屈

図 7.4.3 に解析対象のほりを示している。両端に同じ大きさの y 軸まわりの曲げモーメントが $z = 0$ において作用する長さ 12m の単純ばりであり、端部の拘束条件は表 7.4.4 にまとめている。このほりの横ねじれ座屈モーメントの厳密解は

$$M_{cr}^a = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left(GJ + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2} \right)} = 5.192 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (7.4.1)$$

表 7.4.3 荷重 P - 変位 v 関係 (柱の座屈)

(a) 両端単純支持

		P/P_{cr}			
		1	1.015	1.063	1.152
v/L	厳密解	0	1.100×10^{-1}	2.110×10^{-1}	2.965×10^{-1}
	2 要素	6.543×10^{-2}	1.097×10^{-1}	2.086×10^{-1}	3.060×10^{-1}
	4 要素	9.058×10^{-2}	1.306×10^{-1}	2.148×10^{-1}	2.968×10^{-1}
	10 要素	9.250×10^{-2}	1.317×10^{-1}	2.164×10^{-1}	2.986×10^{-1}
	40 要素	9.275×10^{-2}	1.318×10^{-1}	2.164×10^{-1}	2.987×10^{-1}

(b) 固定-単純支持

		P/P_{cr}		
		1	1.02	1.05
v/L	2 要素	2.672×10^{-2}	6.312×10^{-2}	1.385×10^{-1}
	4 要素	8.850×10^{-2}	1.434×10^{-1}	2.006×10^{-1}
	10 要素	1.012×10^{-1}	1.606×10^{-1}	2.235×10^{-1}
	40 要素	1.015×10^{-1}	1.608×10^{-1}	2.239×10^{-1}

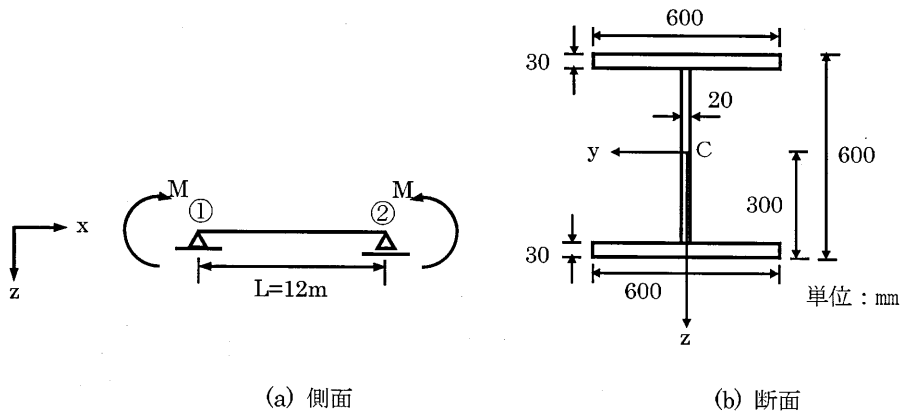


図 7.4.3 解析対象 (横ねじれ座屈)

表 7.4.4 拘束条件 (横ねじれ座屈)

境界	自由度						
	x 軸方向	y 軸方向	z 軸方向	x 軸まわり	y 軸まわり	z 軸まわり	そりねじり
①	拘束	拘束	拘束	拘束	自由	自由	自由
②	自由	拘束	拘束	拘束	自由	自由	自由

$$M_{cr}^b = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_z}{L^2(1 - I_z/I_y)} \left(GJ + \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} \right)} = 7.270 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (7.4.2)$$

で与えられる (第9章 参照). ここに, I_y , I_z , I_ω は y 軸および z 軸まわりの断面2次モーメント, そりねじり定数である. 式 (7.4.1) の M_{cr}^a は座屈前の面内変形を無視した場合, 式 (7.4.2) の M_{cr}^b は座屈前の面内変形を考慮した場合のより厳密な解である [西野ら, 1983]. なお, ここで比較的幅が広い I 形断面を採用したのは, この2つの厳密解に差を生じさせるためである. 式 (7.4.2) からわかるように, 弱軸まわりに曲げモーメントが作用する場合には, 横ねじり座屈は発生しない.

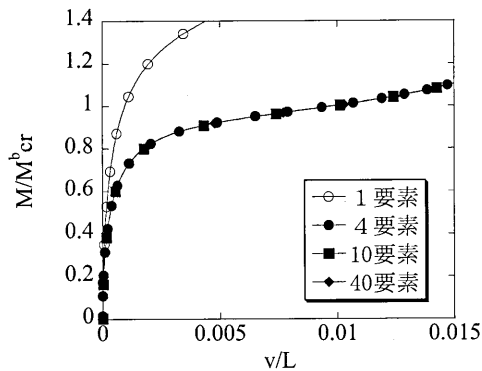
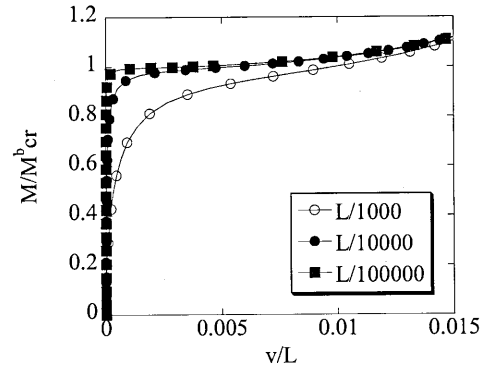
本解析では, 要素タイプ B320S のはり要素を使用する. これは, 形状関数が2次多項式の3次元2節点はり要素で, そりねじりおよびせん断変形が考慮される. ただし, 解析対象のはりでは, ウェブ高さがはり長さ

表 7.4.5 固有値解析結果 (横ねじれ座屈; 厳密解 $M_{cr}^a = 5.912 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}$)

	要素数					
	1	2	4	6	10	100
最小座屈荷重 ($\times 10^3 \text{ kN}$)	6.902	5.981	5.916	5.913	5.912	5.912

表 7.4.6 曲げモーメント M - 変位 v 関係 (横ねじれ座屈)

		M/M_{cr}^b				
要素数		1	1.02	1.05	1.1	1.2
v/L	1 要素	9.733×10^{-4}	1.044×10^{-3}	1.161×10^{-3}	1.390×10^{-3}	2.030×10^{-3}
	4 要素	9.792×10^{-3}	1.110×10^{-3}	1.275×10^{-3}	1.485×10^{-3}	1.733×10^{-3}
	10 要素	9.917×10^{-3}	1.118×10^{-3}	1.281×10^{-3}	1.489×10^{-3}	1.733×10^{-3}
	40 要素	9.917×10^{-3}	1.118×10^{-3}	1.281×10^{-3}	1.489×10^{-3}	1.733×10^{-3}

図 7.4.4 曲げモーメント M - 変位 v 関係 (横ねじれ座屈)図 7.4.5 曲げモーメント M - 変位 v 関係 (横ねじれ座屈; 初期変形の影響)

の $1/20$ と小さいため、曲げ変形挙動に及ぼすせん断変形の影響は無視できる程度である。

表 7.4.5 に固有値解析結果 (最小座屈荷重) を示す。 M_{cr}^a と比較するため、面内変形を抑制すべく I_y のみ 1000 倍している。要素数の増加に伴い、 M_{cr}^a に収束することが確認される。2 要素でも誤差は 1.2% に過ぎず、10 要素では、厳密解と 4 桁とも一致した結果となっている。

固有値解析で得られた最小座屈荷重のモードを初期変形性状とし、最大変位を部材長の $1/1000$ とした初期変形を用いて有限変位解析を行った。解析結果として、曲げモーメント M と y 軸方向の最大変位 v の関係を表 7.4.6 と図 7.4.4 にまとめている。要素数が増加するにつれて解が収束する傾向が認められ、10 要素による解析結果は 40 要素の結果と 4 桁まで一致している。

図 7.4.5 には 3 種類の初期変形 (初期最大変位が部材長の $1/1000$, $1/10000$, $1/100000$) を用いた場合の $M-v$ 曲線を示している。初期変形が小さくなるにつれて、より急激な変位の増加が認められる。変位が急増する現象は、式 (7.4.2) で計算される M_{cr}^b の近傍で発生している。有限変位解析では座屈前の面内変形も必然的に考慮されることから、図 7.4.5 は、解析結果の有効性を実証するものとなっている。

7.4.3 板の座屈

図 7.4.6 に解析対象の四辺単純支持板を示している。辺長が 1m と 2m の長方形板で、相対する 2 辺に等分布圧縮応力 q が作用している。使用する要素タイプは S4R で、3 次元 4 節点低減積分シェル要素である。せん断変形は考慮されるが、解析対象の板では、辺長に比して板厚が小さいため、その影響は無視できる程度である。2 軸対称であるため、実際には板の $1/4$ 領域のみを解析する。したがって、 x 軸に平行な境界辺では z

軸方向と y 軸まわりの自由度, y 軸に平行な境界辺では z 軸方向と x 軸まわりの自由度を拘束するのに加え, x 軸に平行な対称軸 (辺) では y 軸方向と x 軸まわりの自由度, y 軸に平行な対称軸 (辺) では x 軸方向と y 軸まわりの自由度を拘束する。

表 7.4.7 に固有値解析結果 (最小座屈荷重) を示す。要素数の増加に伴い, 厳密解 [西野ら, 1983] に収束している。なお, いずれの要素分割においても, すべての要素は正方形としている。したがって, 長辺に沿った要素の数は短辺の2倍となる。表 7.4.7 の要素数として示す 2×4 等は, 前者の数字が短辺に沿った要素数, 後者が長辺に沿った要素数を表している。(表 7.4.8 でも全く同様に要素数を表す。)

固有値解析で得られた最小座屈荷重のモードを初期変形状とし, 最大変位を短辺長さの $1/1000$ とした初期変形を用いて有限変位解析を行った。解析結果として, 荷重 q と z 軸方向の最大変位 w の関係を 図 7.4.7 と表 7.4.8 にまとめている。要素数の増加に伴い, 解が収束していることが確認される。

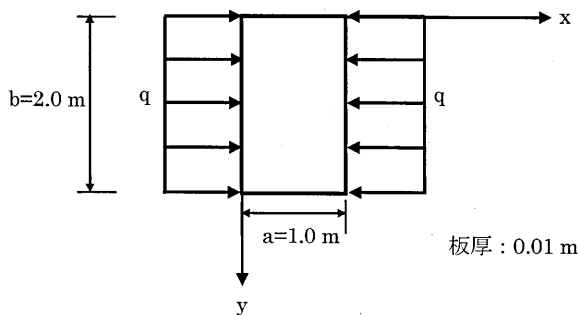


図 7.4.6 解析対象 (板の座屈)

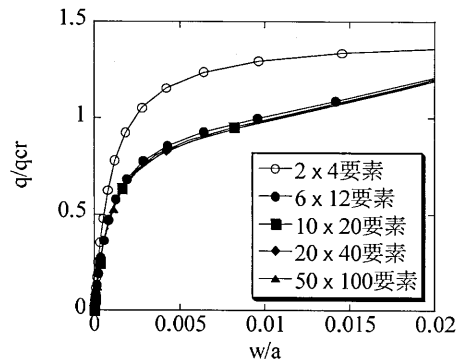


図 7.4.7 荷重 q - 変位 w 曲線 (板の座屈)

表 7.4.7 固有値解析結果 (板の座屈; 厳密解 $q_{cr} = 2.991 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}$)

	要素数					
	2 × 4	6 × 12	10 × 20	30 × 60	40 × 80	50 × 100
最小座屈荷重 ($\times 10^3 \text{ kN}$)	4.276	3.090	3.025	2.994	2.992	2.991

表 7.4.8 荷重 q - 変位 w 関係 (板の座屈)

		q/q_{cr}				
要素数		1	1.02	1.05	1.1	1.2
w/a	1 × 2 要素	2.336×10^{-3}	2.499×10^{-3}	2.776×10^{-3}	3.350×10^{-3}	5.246×10^{-3}
	3 × 6 要素	9.697×10^{-3}	1.070×10^{-2}	1.223×10^{-2}	1.478×10^{-2}	1.958×10^{-2}
	5 × 10 要素	1.051×10^{-2}	1.151×10^{-2}	1.299×10^{-2}	1.549×10^{-2}	2.014×10^{-2}
	10 × 20 要素	1.084×10^{-2}	1.184×10^{-2}	1.332×10^{-2}	1.577×10^{-2}	2.036×10^{-2}
	25 × 50 要素	1.094×10^{-2}	1.193×10^{-2}	1.342×10^{-2}	1.581×10^{-2}	2.041×10^{-2}

7.5 まとめと展望

非線形解析法の発展と計算機能力の向上で構造物の終局挙動を非線形解析により直接予測する手法の実用化が進んでおり, このような方法を実務設計に積極的に導入する傾向にある。しかしながら, 非線形解析では, モデル化, 要素分割, 増分量, 収束計算の許容誤差などに影響を受けるため, これらの諸項目が適切でないと, 妥当な解析ソフトであっても正確な解を得ることはできない。現状では, 実用化されている非線形解析ソフトにおいても, 上記各項目のすべては自動化されておらず, 逆に使用者の判断にゆだねられているものも多い。非線形解析の自動化については, その困難さと市場の狭さから急速に進むことは考えられない。したがって,

信頼性のある解析を実施するには、今後、使用者への非線形解析の基礎教育と使用者が自分自身で解析の妥当性を検証するためのオープンなベンチマークの充実などが重要であると考えられる。

付録

(1) 平面骨組の座屈解析のための要素剛性行列

(微小変位理論による剛性行列)

$$k_E^e = \begin{bmatrix} EA/\ell & {}^t\mathbf{0} & -EA/\ell & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{k}_{11}^1 & \mathbf{0} & \bar{k}_{12}^1 \\ -EA/\ell & {}^t\mathbf{0} & EA/\ell & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{k}_{21}^1 & \mathbf{0} & \bar{k}_{22}^1 \end{bmatrix} \quad (7.A.1)$$

ここに

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^1 & \bar{k}_{12}^1 \\ \bar{k}_{21}^1 & \bar{k}_{22}^1 \end{bmatrix} = \frac{EI_y}{\ell^3} \mathbf{K}_1 = \frac{EI_y}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \\ 6\ell & 4\ell^2 & sym & \\ -12 & -6\ell & 12 & \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (7.A.2)$$

$$\mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad {}^t\mathbf{0} = (0 \quad 0) \quad (7.A.3)$$

(幾何剛性行列)

$$k_G^e = -\frac{N_\alpha}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & {}^t\mathbf{0} & 0 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{k}_{11}^2 & \mathbf{0} & \bar{k}_{12}^2 \\ 0 & {}^t\mathbf{0} & 0 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{k}_{21}^2 & \mathbf{0} & \bar{k}_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (7.A.4)$$

ここに

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^2 & \bar{k}_{12}^2 \\ \bar{k}_{21}^2 & \bar{k}_{22}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 6/5 & & & \\ \ell/10 & 2\ell^2/15 & sym & \\ -6/5 & -\ell/10 & 6/5 & \\ \ell/10 & -\ell^2/30 & -\ell/10 & 2\ell^2/15 \end{bmatrix} \quad (7.A.5)$$

ここに、 EA は要素の引張圧縮剛性、 EI_y は要素の曲げ剛性 (y 軸まわり)、 ℓ は要素長、 N_α は要素 α に作用する軸圧縮力である。節点力 \mathbf{f} と節点変位 \mathbf{d} に含まれる変数は次のものであり、符号の定義は 図 7.A.1 に示す。

$$\mathbf{f} = \{F_{xi} \quad F_{zi} \quad M_{yi} \quad F_{xj} \quad F_{zj} \quad M_{yj}\}^T \quad (7.A.6)$$

$$\mathbf{d} = \{u_i \quad w_i \quad w'_i \quad u_j \quad w_j \quad w'_j\}^T \quad (7.A.7)$$

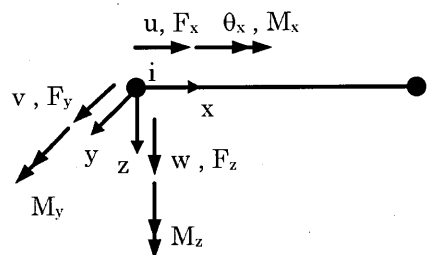


図 7.A.1 節点物理量の符号

(2) 横ねじれ座屈解析のための要素剛性行列

横ねじれ座屈の解析に有限要素法を利用すると、任意の荷重や境界条件を考慮できるので汎用性が高い。このとき使用する要素は純ねじりだけでなく、そりねじりを考慮したはり要素を使用する必要がある。例えば、Hasegawa ら (1985) はマトリクスを次のように表わしている。

$$k_E^e = \begin{bmatrix} \frac{EI_z}{\ell^3} K_1 & 0 \\ 0 & (\frac{EI_\omega}{\ell^3} K_1 + \frac{GJ}{\ell} K_2) \end{bmatrix} \quad (7.A.8)$$

$$k_G^e = -\frac{M_0}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & K_3^T \\ K_3 & \beta_y K_2 \end{bmatrix} \quad (7.A.9)$$

上式に含まれる部分行列 K_1, K_2 は式 (7.A.2), (7.A.5) と同じであり, K_3 の成分は次のように表わされている。下式を見るとわかるように, K_3 の成分は (1,2) および (3,4) の項を除いて $-K_2$ と同じである。

$$K_3 = \begin{bmatrix} -6/5 & -11\ell/10 & 6/5 & -\ell/10 \\ -\ell/10 & -2\ell^2/15 & \ell/10 & \ell^2/30 \\ 6/5 & \ell/10 & -6/5 & 11\ell/10 \\ -\ell/10 & \ell^2/30 & \ell/10 & -2\ell^2/15 \end{bmatrix} \quad (7.A.10)$$

ここに, M_0 は要素に作用する面内 (y 軸回り) の曲げモーメント, EI_z は面外方向の曲げ剛性 (z 軸回り), EI_ω はそりねじり剛性, GJ は純ねじり剛性 (St.Venant のねじり剛性), β_y は断面形状の非対称性に関する定数であり, 具体的な式は 第9章 に示されている。さらに, 節点力と節点変位の変数には次のものが含まれており, 符号の定義は 図 7.A.1 に示す。

$$f = \{F_{yi} \ M_{zi} \ F_{yj} \ M_{zj} \ M_{xi} \ M_{\omega i} \ M_{xj} \ M_{\omega j}\}^T \quad (7.A.11)$$

$$d = \{v_i \ v'_i \ v_j \ v'_j \ \theta_{xi} \ \theta'_{xi} \ \theta_{xj} \ \theta'_{xj}\}^T \quad (7.A.12)$$

このマトリクスを使用した解析では, 式 (7.A.9) の対角項に零があるため標準的な固有値解析を適用できない。したがって, 剛性方程式の行列式が零となる条件から座屈荷重を求める必要がある。ただし, 2 軸対称断面で $\beta_y = 0$ ならば面内変位 v, v' かねじり θ_x, θ'_x のいずれかの変数を消去することで固有値解析を適用することが可能になる。

上記のマトリクスは横ねじれ座屈解析に特定したものであるが, [Hasegawa et al., 1985; Goto et al., 1997] の文献には 3 次元の骨組構造の座屈解析に必要な (14 × 14) のマトリクスも示してある。

参考文献

Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.(1961): Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961.
 西野文雄, 倉方慶夫, 後藤芳顕 (1975): 一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論, 土木学会論文報告集, No.237, pp.11-26, 1975.
 Dafalias, Y.E. and Popov, E.P. (1976) : Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity, Journal of Applied Mechanics, Vol.43, pp.645-651, 1976.
 Riks, E. (1979) : An incremental approach to the solution of snapping and buckling problem, International Journal of Solids and Structures, Vol.15, pp.529-551, 1979.
 山田嘉昭 (1980): 塑性・粘弾性, 有限要素法の基礎と応用シリーズ 6, 倍風館, 1980.

- 小松定夫, 北田俊行 (1980) : 補剛された圧縮板の弾塑性有限変位挙動の一解析法, 土木学会論文報告集, No.296, pp.1-12, 1980.
- 福本嘯士 (1982) : 新体系土木工学 9 構造物の座屈・安定解析, 技報堂, 1982.
- 西野文雄, 長谷川彰夫 (1983) : 構造物の弾性解析, 新体系土木工学 7, 技報堂出版, 1983.
- Hasegawa, A., Liyanage, K., Ikeda, T. and Nishino, F.(1985) : A concise and explicit formulation of out-of-plane instability of thin-walled members, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.2, No.1, pp.81-89, 1985.
- Goto, Y. and Chen, W.F. (1987) : Second order elastic analysis for frame design, J. Struct. Engineering, ASCE, Vol.113, No.ST7, pp.1501-1519, 1987.
- 後藤芳顕, 吉光友雄, 小畑誠, 西野文雄 (1991) : 平面骨組の有限ひずみ・有限変位理論の解に収束する 2 種類の数値解法と精度特性, 土木学会論文集, No. 428/I-15, pp.67-76, 1991.
- Shen, C., Mizuno, E. and Usami, T. (1993) : Development of cyclic two-surface model for structural steel with yield plateau, NUCE Report, No.9302, 1993.
- 土木学会 (1994) : 鋼構造物の終局挙動と設計, 付録編 第 3 編 2 有限変位解析と設計, pp.15-58, 土木学会, 1994.
- 日本塑性学会 (1994) : 非線形有限要素法, コロナ社, 1994.
- 西村宣男, 小野潔, 池内智行 (1995) : 単調載荷曲線をもととした繰り返し塑性を受ける鋼材の構成式, 土木学会論文集, No.513/I-31, pp.27-38, 1995
- 後藤芳顕, 王慶雲, 高橋宣男, 小畑誠 (1998) : 繰り返し荷重下の鋼製橋脚の有限要素法による解析と材料構成則, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.189-206, 1998.
- Goto, Y. and Fujii, F. (1997) : Structural Stability Theory and Numerical Analysis, Capter 2 in STRUCTURAL STABILITY DESIGN - Steel and Composite Structures edited by Fukumoto, Y., Pergamon, 1997.
- 川西直樹, 後藤芳顕 (1999) : 鋼構造物の有限要素解析における残留応力と初期たわみの導入方法について, 構造工学論文集, Vol.45A, pp.137-205, 1999.
- Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc. (1999) : ABAQUS/Standard User's Manual, Ver.5.7, 1999.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (2000) : The finite element method, Volume 2, Solid mechanics, Butterworth-Heinemann, 2000.
- 日本道路協会 (2002) : 道路橋示方書・同解説, V 耐震設計編, 丸善, 2002.
- 後藤芳顕, 奥村徹, 鈴木昌哉 (2002) : 非線形はりモデルを用いた鋼製橋脚の耐震解析における幾何学的非線形性とせん断変形の影響, 土木学会論文集, No.696/I-58, pp.157-172, 2002.