

## 第5章 材料特性

### 5.1 概 説

構造物の力学的特性を支配する要因の一つが、それを構成する材料の降伏強度、応力-ひずみ関係といった材料特性である。構造物の終局強度設計の普及および性能照査設計の導入により精度の高い応力-ひずみ関係の重要性が増している。そこで、この章ではまず、材料強度特性一般について論じ、続いて鋼材を中心とした弾性、塑性の応力-ひずみ関係について述べる。

#### 5.1.1 基本的な概念

図 5.1.1 は金属の一軸載荷における応力と伸びひずみの関係を模式的に示したものである。応力  $\sigma$  は荷重  $P$  を棒の断面積  $A$  で除したものであり、伸びひずみ  $\varepsilon$  は  $\varepsilon = (\ell - \ell_0)/\ell_0$  で定義する。ここで、 $\ell_0$ ,  $\ell$  はそれぞれ変形前、変形後の長さである。荷重  $P$  を 0 から増加させていくとき、OA の範囲では応力  $\sigma$  はひずみ  $\varepsilon$  に比例する。すなわち線形弾性を示す。点 A を比例限と呼ぶ。さらに荷重を増加させると応力-ひずみ曲線の勾配が減少し上に凸な曲線となるが、点 B までの範囲であれば荷重を取り去ったとき同じ経路を通して変位も完全に 0 に戻る。すなわち弾性的な挙動をしめす。このとき点 B を弾性限界と呼びそのときの応力  $\sigma_Y$  を降伏応力という。降伏応力は最も基本的な材料特性のひとつである。しかしながら実験において点 A と点 B を明確に区別することは困難であり、大きな誤差を生じないので通常の場合は点 A と点 B を同一とみなして扱うことが多い。軟鋼のように明確な降伏点を示す材料もあるが降伏点自体も一般には実験的に明確に特定することが難しいために図 5.1.1 のような場合には、通常は降伏点を次のように定義する。図 5.1.1 で OA と同じ勾配で点 C を通る直線をひきその直線が  $P=0$  の軸と交わる点を図のように点 C' とする。このとき  $OC' = (\varepsilon_0)$  が

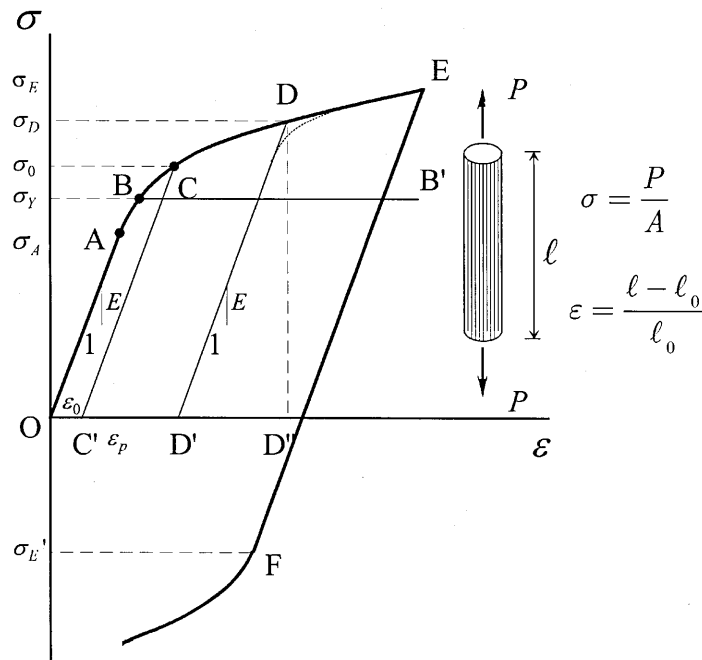


図 5.1.1 応力-ひずみ曲線

0.2% となるときの点 C を降伏点とするのである。このときの応力を 0.2% オフセット強度（耐力）と呼ぶことがある。負荷時と除荷時の勾配が等しければ、これは塑性変形による残留ひずみが 0.2% となるときに等しい。この勾配に関する仮定は金属材料を対象にする限り妥当である。降伏点 B（あるいは C）を超えてさらに変形させると一般には荷重も増加する。この性質を加工硬化（ひずみ硬化）とよび、領域を加工硬化領域と呼んでいる。この領域での変形は弾性変形と塑性変形の和として表される。降伏点 B を越えたのち BB' のように荷重の増加なしに変形が進むときには材料は完全弾塑性体と呼ぶ最も簡単にモデル化された塑性応力-ひずみ関係を示す。

## 5.2 材料強度

### 5.2.1 鋼材の機械的性質の変動要因

引張試験によって得られる鋼材の機械的性質を変動させる主な要因として、①鋼種、②板厚、③切り出し位置（板材または形鋼材か）があげられる。ここではこの 3 種の変動要因が各機械的性質に与える影響を示す。[Itoh, 1984, 福本ら, 1981] ただし、上、下降伏点応力 ( $\sigma_{Yu}$ ,  $\sigma_{Yl}$ )、引張強さ ( $\sigma_u$ ) および伸び ( $\Delta\ell$ ) は公称値によって無次元化し、ヤング率 ( $E$ ) とポアソン比 ( $\nu$ ) は通常用いられると 0.3 によって無次元化している。また降伏ひずみ ( $\varepsilon_Y$ ) は降伏点応力の公称値をヤング率で割った値で無次元化している。

#### (1) 鋼種による変動

ここで扱われている鋼種を大別すると一般構造用圧延鋼材である SS 材 (SS330(SS34)-SS490(SS50), JIS G3101) と溶接構造用圧延鋼材である SM 材 (SM400(SM41)-SM570(SM58), JIS G3106) および高張力鋼材である HT 材 (HT580(HT60)-HT780(HT80)) になる。SS 材と SM 材については JIS 規格に化学成分と機械的性質（降伏点応力、引張強さ、伸び）が規定されているが、HT 材については規定値がないので各メーカーのマニュアル値を使って無次元化を行った。なお、上記鋼種名で括弧内の表記、たとえば SM400(SM41) の SM41 は現行の名称 SM400 対応する旧名称である。

各機械的性質について鋼種の 3 つのグループに分けた実測ヒストグラムの一例を図 5.2.1(a),(b) に示す。F は頻度をあらわしヒストグラムの白字の部分が SS 材、片側斜線の部分が SM 材であり、両側斜線の部分が HT 材のものである。破線と実線はそれぞれ全体の平均と正規分布を適合させたものである。各グループのそれぞれの標本数  $N$ 、平均値  $M$ 、標準偏差  $S$  および変動係数  $\omega$  を表 5.2.1 に示した。

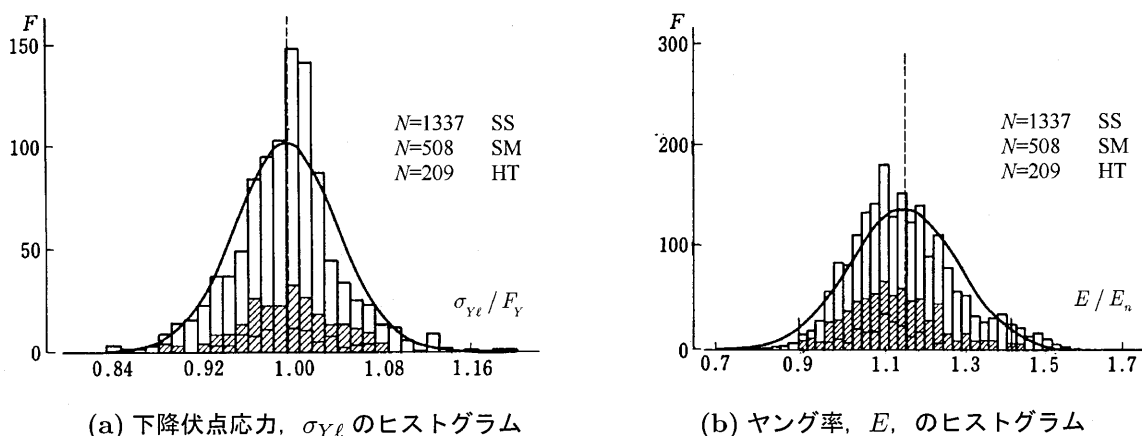


図 5.2.1 鋼材の機械的性質の鋼種による変動

表 5.2.1 鋼種別の鋼材の機械的性質の統計量

	SS(SS34-SS50)				SM(SM41-SM58)				HT(HT60-HT80)			
	N	M	S	$\omega$	N	M	S	$\omega$	N	M	S	$\omega$
$\sigma_{Yu}/F_Y$	169	1.410	0.156	0.111	5	1.174	0.175	0.149	0	-	-	-
$\sigma_{Y\ell}/F_Y$	1337	1.179	0.132	0.112	508	1.162	0.135	0.116	209	1.112	0.082	0.074
$\sigma_u/F_u$	1112	1.096	0.069	0.063	328	1.099	0.066	0.060	179	1.054	0.059	0.056
$\varepsilon_Y/\varepsilon_{Yn}$	239	1.322	0.171	0.129	9	1.253	0.211	0.168	5	1.173	1.099	0.084
$E/E_n$	775	0.988	0.044	0.044	161	1.006	0.045	0.045	88	0.999	0.054	0.054
$E_{st}$	242	0.382	0.108	0.284	19	0.323	0.098	0.295	4	0.314	0.127	0.403
$\varepsilon_{st}$	261	20170	4304	0.213	19	18.290	6327	0.346	1	-	-	-
$\nu/\nu_n$	412	0.936	0.075	0.086	117	0.952	0.114	0.120	59	0.912	0.076	0.083
$\Delta\ell/\Delta\ell_n$	526	1.586	0.285	0.180	100	1.393	0.265	0.190	41	1.207	0.290	0.240

$F_Y$  = 保証降伏点,  $F_u$  = 保証引張強さ,  $\varepsilon_{Yn}$  = 保証降伏点ひずみ,  $E_n = 206GPa$ ,  $\nu_n = 0.3$   
 $E_{st}$  = 初期ひずみ硬化係数 ( $\times 10^6$ ) $N/mm^2$ ,  $\varepsilon_{st}$  = 硬化開始ひずみ ( $\times 10^{-6}$ ),  $\Delta\ell_n$  = 保証伸び  
 $N$  = データ数,  $M$  = 平均値,  $S$  = 標準偏差,  $\omega$  = 変動係数

図 5.2.1(a) と各グループ間の平均値および分散の差を 分布と 分布を用いて検定した結果によると下降伏点応力は, SS 材と SM 材とでは平均値で約 1.5%の差であるが, HT 材ではあきらかな差が生じている. 同様なことは引張強さ, ポアソン比についてもいえる. ヤング率については鋼種によって平均値に差はなく, その値は通常用いられる と良く一致している. 伸びの平均値は, SS 材, SM 材, HT 材の順で小さくなっているが分散には差がない. 上降伏点応力, 降伏ひずみ, 初期ひずみ硬化係数および硬化開始ひずみについては標本数が小さいためはっきりしたことはいえない.

なお, ここにあげた機械的な性質については新しいデータも蓄積されているのでこれらも参照されたい [JSSC, 2004; 奈良ら, 2004]. これらの文献では鋼材の降伏点として上降伏点を使っているが, 本データでは下降伏点応力としているため直接的な比較は困難である. しかし, 引張り強度などの性質についてはほぼ同等の結果を得ている. さらに, 下降伏点応力の測定値については明確なひずみ速度依存性があり, 測定値は静的降伏応力にはほぼ等しい下降伏点応力を常に上回ることがわかっている [土木学会, 1994]. このようにデータの比較および解釈において注意が必要である. なお, 静的載荷時の耐荷力を問題にする場合は, ひずみ速度をほぼ零にした状態で測定される下降伏点応力 (静的降伏応力) が重要であり, 種々の無次元量には下降伏点応力を用いるべきである.

(2) 板厚による変動

板厚について 10mm を境にして 2つのグループに分け, 各グループの標本数, 平均値, 標準偏差および変動係数を表 5.2.2 にまとめた.

表 5.2.2 板厚  $\leq 10mm$ , 板厚  $> 10mm$  別の統計量

	$t \leq 10$				$t > 10$			
	N	M	S	$\omega$	N	M	S	$\omega$
$\sigma_{Yu}/F_Y$	173	1.396	0.161	0.115	0	-	-	-
$\sigma_{Y\ell}/F_Y$	1474	1.187	0.132	0.111	580	1.119	0.110	0.098
$\sigma_u/F_u$	1192	1.091	0.070	0.064	427	1.094	0.065	0.060
$\varepsilon_Y/\varepsilon_{Yn}$	240	1.328	0.168	0.127	13	1.104	0.127	0.115
$E/E_n$	885	1.000	0.044	0.044	139	0.991	0.053	0.053
$E_{st}$	243	0.372	0.108	0.284	22	0.421	0.127	0.305
$\varepsilon_{st}$	258	20496	4198	0.205	23	14560	4243	0.291
$\nu/\nu_n$	521	0.940	0.068	0.092	67	0.909	0.068	0.075
$\Delta\ell/\Delta\ell_n$	509	1.545	0.287	0.186	158	1.496	0.344	0.230

下降伏点応力  $\sigma_{Y\ell}$ , ヤング率  $E$  およびポアソン比  $\nu$  は平均値でそれぞれ 6.1%, 0.9%, 3.4% の差が生じており, 平均値, 分散ともに有意な差がある. 一般に, 降伏点応力は板厚の小さいものほど高い値を持つといわれており公称値は板厚について  $t \leq 16\text{mm}$ ,  $16\text{mm} < t \leq 40\text{mm}$ ,  $40\text{mm} < t$  の 3 つに区分してその影響を考慮している. SS400 (SS41) 材のみの機械的性質と板厚との関係を調べたが, 上降伏点と初期ひずみ硬化係数を除いて明確な相関関係を見いだすことはできなかった.

### (3) 切り出し位置による変動

試験片が切り出された場所が板材 (溶接断面, Plates) が圧延形鋼材 (Shapes) かによって分類したヒストグラムを作成し, また両者の 5% 有意水準による差の検定の結果, 切り出し位置に関する両者の統計量にはほとんど差がないことがあきらかになった.

### 5.2.2 鋼材の機械的性質のばらつきと適合分布

図 5.2.2 に  $\sigma_{Y\ell}$  のヒストグラムとそれに対応する累積度数曲線を示す. 図の中に示した滑らかな曲線は, 正規分布および KS 検定 (Kolmogorov-Smirnov Test) によってよい適合性を示した分布をあてはめたものである. ヒストグラムの中に示した矢印は M-2S 値の範囲を示している. 累積度数曲線中の矢印は, 各分布と累積度数関数との差の最大値の位置を示している. なお, 検定の対象とした分布形は次の 5 つである. ①正規分布, ②対数正規分布, ③ベータ分布, ④ガンベル分布, ⑤ワイブル分布. 表 5.2.3 には各機械的性質のデータ数, 平均値, 標準偏差, 変動係数, および K S 検定によって適合がよいとされた分布を示した.

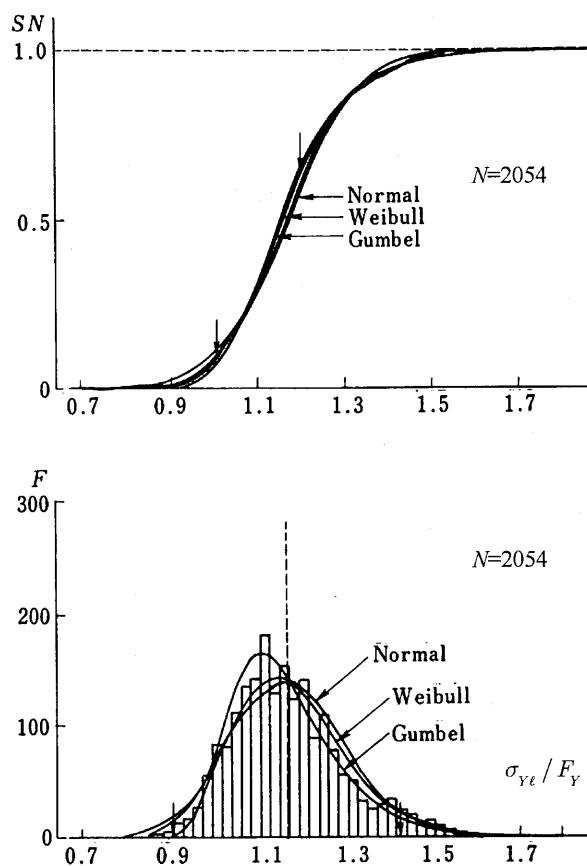


図 5.2.2 下降伏点応力  $\sigma_{Y\ell}$  のヒストグラムと累積度数ならびに適合分布

表 5.2.3 鋼材の機械的性質の統計量

	N	M	S	$\omega$	Good-fit Distributions		
					(1)	(2)	(3)
$\sigma_{Yu}/F_Y$	174	1.394	0.161	0.115	Gumb	Log	
$\sigma_{Y\ell}/F_Y$	2054	1.168	0.130	0.111	Gumb	Weib	Log
$\sigma_u/F_u$	1619	1.092	0.068	0.063	Nor	Beta	Weib
$\varepsilon_Y/\varepsilon_{Yn}$	253	1.317	0.173	0.131	Log	Gumb	
$E/E_n$	1024	0.999	0.045	0.045	Log	Nor	
$E_{st}$	265	0.372	0.108	0.289	Nor	Weib	
$\varepsilon_{st}$	281	20010	4500	0.225	Weib	Nor	
$\nu/\nu_n$	588	0.937	0.085	0.091	Gumb	Log	
$\Delta\ell/\Delta\ell_n$	667	1.534	0.302	0.197	Nor	Beta	

Nor=正規分布, Log=対数正規分布, Beta=ベータ分布, Gumb=対数正規分布, Weib=ワイブル分布,  $E_{st}(\times 10^6)N/mm^2$ ,  $\varepsilon_{st}(\times 10^{-6})$

(1) 下降伏点応力

下降伏点応力は、静的降伏応力 (Static Yield Stress) に近いものであるため公称値を下回るものが 7.0%ある。降伏点応力に対する適合分布は、一般に対数正規分布、ガンベル分布、ベータ分布などであるが、図 5.2.2 と検定結果によるガンベル分布、ワイブル分布、対数正規分布の順で、正のひずみのある非対称な分布がよく適合している。これは降伏点応力が公称値によって最低値が保証されていることから生じるものである。また分布形の適合は、ガンベル分布がデータのピーク部分を良く表しているのに対してワイブル分布は両端部を良く表している。下降伏点応力の平均値は公称値の 1.17 倍であり、変動係数は 11.1%である。これは文献 [Galambos et al, 1969] にあるアメリカ合衆国における鋼材の特性値とよく一致している。また、文献 [Alpsten, 1972] にあるスウェーデンにおける 57,000 体の静的降伏応力の分布形状とも良く一致している。ECCS (欧州鋼構造協会連合会) [Sfintesco, 1970] で行われた I 形もしくは H 型断面鋼柱についての短柱試験による降伏荷重を実測断面積で除して求めた実測降伏点応力と公称値の降伏点応力の比のヒストグラムを図 5.2.3(a) に示す。実測降伏点応力は平均値で公称値より 21%大きく、また実測降伏点応力の変動係数は 8.7%である。一方図 5.2.3(b) に示した実測断面積と公称断面積の比のヒストグラムによると平均値は 1.01 であり、変動係数も 3.1%と小さいため降伏荷重に与える断面積の変動の影響はかなり小さいものと考えられる。これらの図には適合する正規分布形が参考のため書き入れてある。

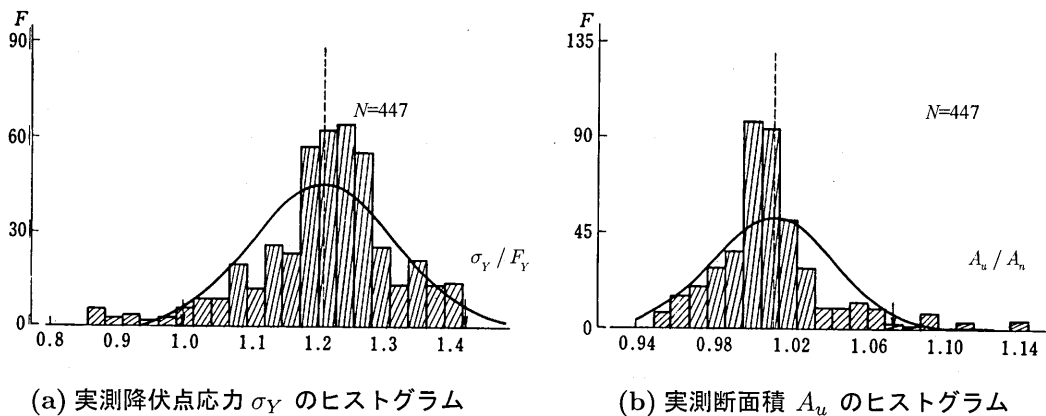


図 5.2.3 ECCS 短柱試験の結果

## (2) 引張強さ

引張強さの度数分布は、2,3 体の異常値を除いて平均値の周りに密にばらついており変動係数は 6.27%であり、この値は下降伏点応力の変動係数の 56%にあたる。適合分布は正規分布とベータ分布である。

## (3) 伸び

伸びの平均値は公称値（最低保障値）の 1.53 倍と他の機械的性質と違って公称値と実測平均値に大きき差が生じている。また、変動係数は 19.7%である。適合分布は正規分布とベータ分布の順で一致している。

## 5.3 弾 性

### 5.3.1 線形弾性

線形弾性は図 5.1.1 の OA 間のように応力とひずみが比例する性質をいう。鋼材では、この比例係数（ヤング率）はおおよそ 206GPa である。またポアソン比は 0.3 でありこれらの値は鋼種による依存性は少ない。圧延した板については圧延方向に関して若干の異方性がみられる程度である [Kuwamura, 1992]。

### 5.3.2 超弾性（ゴムの弾性）

土木構造物では免震支承等にゴムを用いることがあり、ゴムのような材料に対する応力-ひずみ関係が必要な場面が増えている。しかし、材料としては古くから使われており材料特性についての研究もなされてきた [Oden, 1980; Jones and Treloar, 1975; Treloar, 1940]。鋼材は金属原子が整然と並んだ結晶組織を持ち、弾性は金属の原子間力によるものである。これに対して、ゴムのような高分子材料では分子鎖の形状変化が弾性変形のメカニズムになっている。そしてほぼ非圧縮性を持つという特徴がある。ゴムのような材料に対して注意しなければならないことは、対象とするひずみの範囲が鋼材に比べて格段に大きく数 100 %にも及ぶことであり、そしてそのような大きな変形性能に期待してゴムを使用する機会が多いことである。したがって微小ひずみの範囲でゴムの応力-ひずみ関係を論ずるのは一般には十分ではなく有限変形理論の導入が必要となる。

弾性変形とは可逆的な変形である（図 5.3.1）。これよりただちに応力-ひずみ関係に対する一意性と経路独立性が導かれる。したがって、ポテンシャル関数を定義することができ、応力成分はポテンシャル関数のひ

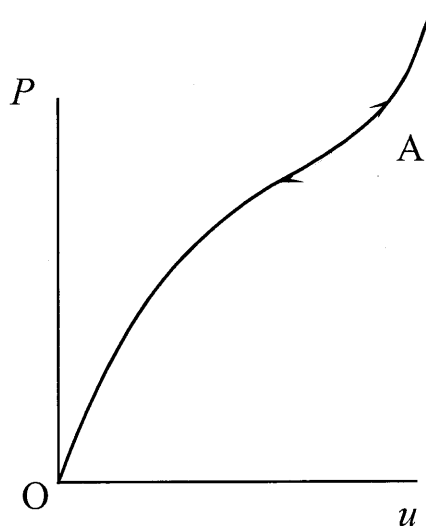


図 5.3.1 一般的な弾性変形における荷重変位曲線

ずみに関する微分によって与えられる。このポテンシャル関数はひずみエネルギー密度関数である。したがって次のような関係がある。

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (5.3.1)$$

これを超弾性 (*Hyperelasticity*) と呼ぶ。  $S_{ij}$  は応力、  $E_{ij}$  はひずみテンソルである。有限変形理論では  $S_{ij}$  は第2種の Piola-Kirchhoff 応力、  $E_{ij}$  は Green のひずみ、  $C_{ij}$  は Green の変形テンソルとする (これらのテンソルの定義については本章の末尾の補遺を参照)。ひずみエネルギー密度関数  $W$  の具体的な表現としてはいくつか提案されているが基本的なものとして Mooney-Rivlin 型 [Mooney, 1940] および Ogden 型 [Ogden, 1997] がある。変数として Mooney 型では  $C_{ij}$  の不変量を用いる。これに対し Ogden 型では伸びの方向間には相互作用がないとの仮定の下に、主伸びすなわち Green の変形テンソルの固有値  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ ) を変数とする。すなわち非圧縮性を持つ材料に対しそれぞれの場合にひずみエネルギー関数は次のようにしている。

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (\text{Mooney 型}) \quad (5.3.2)$$

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (\text{Ogden 型}) \quad (5.3.3)$$

ただし、  $I_1$  と  $I_2$  はそれぞれ  $C_{ij}$  の第1、第2不変量であり、Mooney 型の  $C_{01}$ 、  $C_{10}$ 、Ogden 型の  $\alpha_n$ 、  $\mu_n$  は材料定数である。ゴムはほぼ非圧縮性を示すので、その性質を用いれば Ogden 型モデルでは単純引張時および純せん断時の公称応力とひずみとの関係は次のようになる。

$$\sigma = \sum_{n=1}^N \mu_n (\lambda^{\alpha_n - 1} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_n - 1}) = \sum_{n=1}^N \mu_n \left( \left( \frac{\ell}{\ell_0} \right)^{\alpha_n - 1} - \left( \frac{\ell}{\ell_0} \right)^{-\frac{1}{2}\alpha_n - 1} \right) \quad (\text{単純引張}) \quad (5.3.4)$$

$$\sigma = \sum_{n=1}^N \mu_n (\lambda^{\alpha_n - 1} - \lambda^{-\alpha_n - 1}) \quad (\text{純せん断}) \quad (5.3.5)$$

上式からわかるようにひずみが大きくかつ多軸変形下にあるとき、ゴムは強い異方性を示す。そのためにゴムの弾性係数を決定するためにいくつかの実験方法が提案されている。また最近では有限変形を考慮した FEM を利用した弾性係数の決定法も提案されており、汎用有限要素法プログラムに組み込まれている例もある。[HKS, 1998]

## 5.4 塑性

### 5.4.1 概論

材料の塑性を考えるうえで最も重要なのは、材料が弾性状態にあるかあるいは塑性状態にあるかを画する条件である。5.1.1 で述べたように降伏点と呼ばれるものはその一例である。より一般的な変形経路においてそれは降伏条件と呼ばれる。そして降伏条件を表す式を降伏条件式と呼ぶ。一軸引張载荷においてそれは次のように表すことができる。

$$f = \sigma - \sigma_Y = 0 \quad (5.4.1)$$

このとき材料は降伏条件を満足しているという。降伏応力  $\sigma_Y$  は変形履歴や様々な状態に依存して変動する量である。図 5.1.1 に示されているように加工硬化する領域では降伏応力は増大する。そしてある状態における降伏応力はそれまでの変形の履歴に依存する。例えば加工硬化領域の点 D で除荷すると図 5.1.1 に示すように

応力-ひずみ曲線は  $DD'$  の経路をたどる. 先にも述べたように除荷して得られる  $OD'$  が点  $D$  にいたる変形で生じた塑性変形であり,  $D'D'' = \sigma_D/E$  は点  $D$  におけるひずみの弾性変形分である. 点  $D'$  から再び荷重  $P$  を増加させると理想的には点  $D$  が新たな降伏点となり降伏応力は初期のもの  $\sigma_Y$  より絶対値が大きくなる. ただし, 厳密にいうと, 無視できる範囲ではあるが実際には点線のような挙動をすることが多い. 次に点  $E$  において除荷し, 荷重が完全に 0 になった後にも逆方向に荷重を続けて圧縮した場合を考える. このときは  $EF$  の経路をたどり点  $F$  において再び降伏し塑性変形が生じることになる. 降伏点  $F$  における降伏応力を  $\sigma_F$  とすると一般には  $|\sigma_E| > |\sigma_F|$  となり, これをバウシニング効果と呼ぶ. バウシニング効果は鋼材が繰り返し荷重のように反転負荷経路を含むときの基本的な性質の一つであり, 鋼材が不均一な微細組織を持っていることから生ずる効果である. また降伏応力が変形履歴に依存していることを示す端的な例である.

5.1.1 で述べたように応力状態が弾性範囲を超えるとそれ以降の変形では, 応力とひずみは一对一の関係性を失う. 応力はそれまでの変形の履歴に依存したもの, 言い換えれば経路依存性を持つ量として与えられる. したがって降伏した後は, 応力はもはやひずみの一意的な関数として表すことはできず, 応力-ひずみ関係は応力増分とひずみ増分の関係として与えられる. 図 5.1.1 に見たように塑性ひずみは除荷後も残留するひずみなので応力増分に寄与するのは可逆なひずみ成分のみと考えて次のように与える.

$$d\sigma = E d\varepsilon^e = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p) = E_t d\varepsilon \quad (5.4.2)$$

ここに,  $d\varepsilon^e$  と  $d\varepsilon^p$  はそれぞれひずみ増分の弾性部分と塑性部分である. 接線剛性係数  $E_t$  は一般にひずみ  $\varepsilon$  とその履歴, 応力  $\sigma$ , その他の量 (内部変数) に依存する (図 5.4.1).

ただし, このように増分の関係で応力-ひずみ関係が与えられるとすれば, ある時点で応力-ひずみ関係は単に降伏しているかどうかだけではなく, そのときのひずみ増分もしくは応力増分に対して降伏し続けるか否かも問題にしなければならない. そこで荷重状態 (あるいは変形状態) を応力増分およびひずみ増分を用いて次のように 3 つに分類する.

$$\begin{aligned} d\sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} &> 0 && \text{塑性負荷 (塑性状態維持)} \\ d\sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= 0 && \text{中立負荷} \\ d\sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} &< 0 && \text{弾性除荷 (弾性状態へ遷移)} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

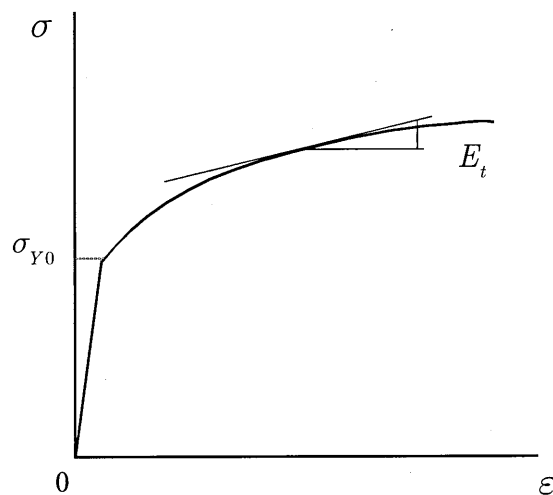


図 5.4.1 加工硬化域での応力ひずみ曲線



したがって、応力-ひずみ関係は塑性負荷状態および中立負荷状態に対しては次式で与えられる。

$$d\sigma = E d\varepsilon^e = E_t d\varepsilon \quad (5.4.4)$$

弾性除荷状態に対しては次式が成立する。

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (5.4.5)$$

また、耐震性能評価のための数値解析では塑性領域において数10%のひずみが生じることもあるのでゴムの弾性と同一ように有限変形理論を適用しなければならない場面がある。その場合には応力として真応力 (Cauchy 応力)、ひずみとしては対数ひずみを用いれば良い。真応力と公称応力、対数ひずみと伸びひずみ (工学ひずみ) の関係は以下で与えられる。

$$\text{真応力} \quad : \sigma = \frac{P}{A} = \frac{A_0}{A} \sigma_N \quad (5.4.6)$$

$$\text{対数ひずみ} : \varepsilon_L = \ln \frac{\ell}{\ell_0} = \ln(1 + \varepsilon_E) \quad (5.4.7)$$

ただし、 $P$  は荷重、 $A_0$ 、 $A$  は初期、変形後の断面積、 $\sigma$ 、 $\sigma_N$  は真応力、公称応力、 $\varepsilon_L$ 、 $\varepsilon_E$  は対数ひずみ、工学ひずみである。

#### 5.4.2 鋼材の加工硬化則の概要

一軸引張応力状態では降伏条件式は式 (5.4.1) で与えられる。降伏応力を考えるうえで実用上まず問題となり重要なのが、考えている載荷経路が除荷経路を含み応力の符号が反転した領域で降伏する場合の扱いである。これについては、必ずしも論理的必然性はないが次のように3つの場合に分けて議論することが多い。[山田, 1980]

##### (1) 等方硬化則

これは式 (5.4.1) を次のように拡張する。

$$f = |\sigma| - \sigma_Y = 0 \quad (5.4.8)$$

すなわち、反転負荷状態で降伏するときでも降伏応力の絶対値は変わらないとするものである。つまり引張り応力下で加工硬化により  $\sigma_Y$  が増加すれば、続けて除荷し圧縮応力を加えればそのときの降伏応力もまた増加したのになっているとする (図 5.4.2)。

次に降伏応力が変形とともに具体的にどのように変化するかが問題となるが、通常は降伏応力を塑性変形履歴の関数と見なし次のように表す。

$$d\sigma_Y = h_i d\varepsilon^p \quad (5.4.9)$$

ここで係数  $h_i$  は図 5.4.3 にある応力増分  $d\sigma$  (塑性負荷状態では  $d\sigma_Y$ ) と  $d\varepsilon^p$  の関係を表す係数  $h$  に等しい。ただし、式 (5.4.9) では  $d\varepsilon^p$  は塑性ひずみ増分の絶対値とする。

##### (2) 移動硬化則

図 5.1.1 にあるように載荷経路が除荷および反転負荷状態での降伏を含む場合にはバウシinger硬化を表現できず等方硬化の仮定は必ずしも良いものとはいえない。そこで一方向載荷以外の経路における鋼材の弾塑性挙動を適切に表現するために次のような移動硬化則が提案された。

$$f = |\sigma - \alpha| - \sigma_Y = 0 \quad (5.4.10)$$

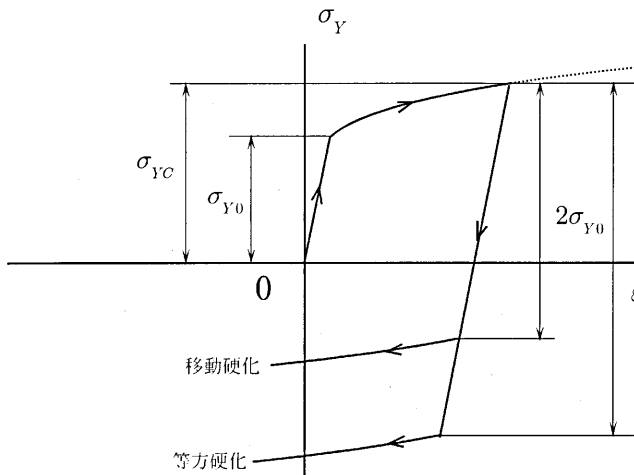


図 5.4.2 反転負荷時の応力ひずみ曲線  
(等方硬化と移動硬化)

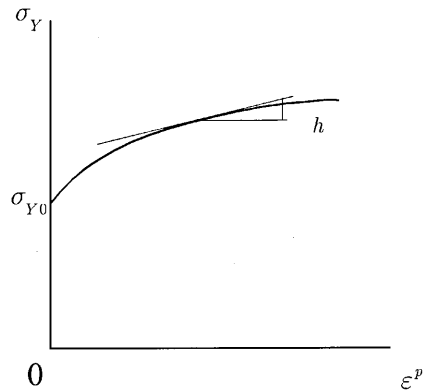


図 5.4.3 加工硬化域での応力-  
塑性ひずみ曲線

これはすなわち式 (5.4.8) に対し  $\sigma$  軸方向に  $\alpha$  だけ原点をオフセットしたものである。  $\alpha$  は応力の次元を持ち後背応力と呼ぶ。この場合には降伏応力  $\sigma_Y$  は一定であり後背応力  $\alpha$  を塑性履歴の関数とする。  $\sigma_Y$  が一定であれば弾性領域の大きさは加工硬化が生じても変わらないので図 5.1.1 のようなバウシinger 効果を表現できることはあきらかであろう (図 5.4.2)。  $\alpha$  が変形履歴のみに依存するとすれば形式的には式 (5.4.9) と同様に次のように表すことができる。

$$d\alpha = h_k d\epsilon^P \quad (5.4.11)$$

塑性変形状態では応力増分  $d\sigma$  が  $d\alpha$  に等しいから、単調載荷状態では上式の  $h_k$  は図 5.4.3 の  $h$  に等しいことがわかる。

### (3) 混合硬化および一般的な硬化則

上記の移動硬化則では  $\sigma_Y$  を一定とした。しかし、実際の鋼材の挙動を表すのに等方硬化則はいうまでもなくまた移動硬化則でも十分ではない。そこで、等方硬化と移動硬化を組み合わせるのが一般的である。また表現上も式 (5.4.9) で  $\alpha$  と  $\sigma_Y$  はともに塑性履歴の関数とする方が自然である。ともに変形履歴のみに依存するとすれば形式的には次のように表すことができる。

$$d\alpha = h_k d\epsilon^P \quad (5.4.12)$$

$$d\sigma_Y = h_i d\epsilon^P \quad (5.4.13)$$

これは等方硬化と移動硬化の性質を同時に持つ硬化則であり、混合硬化則と呼ぶこともある。単調載荷時の応力-ひずみ曲線から得られる加工硬化係数を  $h$  とすると既に見たように等方硬化則では  $h = h_i$ 、移動硬化則では  $h = h_k$  であるが混合硬化則では  $h = h_i + h_k$  となる。  $h_i$ 、  $h_k$  はそれぞれ変形履歴および内部変数の関数であり、その比も一定ではない。繰り返し載荷を含む一般的な載荷経路での鋼材の応力-ひずみ関係を正確に表すために加工硬化係数  $h_i$  および  $h_k$  をどのように表すかが重要である。これについては 2 曲面モデル [Dafalias et al, 1976]、修正 2 曲面モデル [Shen ら, 1993]、3 曲面モデル [後藤ら, 1998] 等が提案されており、特に鋼構造物の耐震性能の解析において有用な結果を与えている。

### 5.4.3 鋼材の加工硬化則の具体例

次に鋼材についてのいくつかの基本的で具体的な加工硬化則を示す。5.4.2に見たように加工硬化則とは塑性ひずみ増分の絶対値と降伏応力の関係である。これには単調な引張応力下での応力-塑性ひずみ関係を与えればよい。

(1) バイリニア型

図 5.4.4 にあるように降伏後も応力とひずみの関係が 1 次関数で与えられるものである。塑性ひずみが比較的小さい範囲での近似として用いられる。応力-ひずみ関係は次のようになる。

$$d\sigma = \frac{Eh}{E+h}d\varepsilon = E_t d\varepsilon \quad (\text{塑性負荷状態}) \quad (5.4.14)$$

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (\text{弾性範囲内 および 弾性除荷状態}) \quad (5.4.15)$$

ここで係数  $h$  は図 5.4.3 にあるように応力増分  $d\sigma_Y (= d\sigma)$  と塑性ひずみ増分  $d\varepsilon^p$  の関係を表す係数である。等方加工硬化則であれば  $h_i = h$  とし移動硬化則であれば  $h_k = h$  とすればよい。構造用鋼材では  $E_t = E/100 \sim E/50$  が多く用いられる。

(2) マルチリニア型

図 5.4.4 のように降伏後の応力-ひずみ関係を区分線形型の関数として近似するものである。分割を細かくすれば実験結果を容易に近似することができる。どのような応力-ひずみ関係にも対応しうるので、汎用の有限要素法プログラムなどで使われることが多い。  $m$  番目の区間では応力-ひずみ関係は次のようになる。

$$d\sigma = \frac{Eh_m}{E+h_m}d\varepsilon \quad (\varepsilon_{m-1}^p \leq \varepsilon^p \leq \varepsilon_m^p) \quad (\text{塑性負荷状態}) \quad (5.4.16)$$

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (\text{弾性範囲内 および 弾性除荷状態}) \quad (5.4.17)$$

(3) ベキ乗則型

図 5.4.4 のように降伏応力を塑性ひずみのべき乗則で表すものである。鋼材の応力-ひずみ関係を簡潔にかつ比較的良好に表すものとして使われている。べき乗則では降伏応力は次式のようなになる。

$$\sigma_Y = H(\varepsilon^p + \alpha)^n, \alpha = \left(\frac{\sigma_Y}{H}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (5.4.18)$$

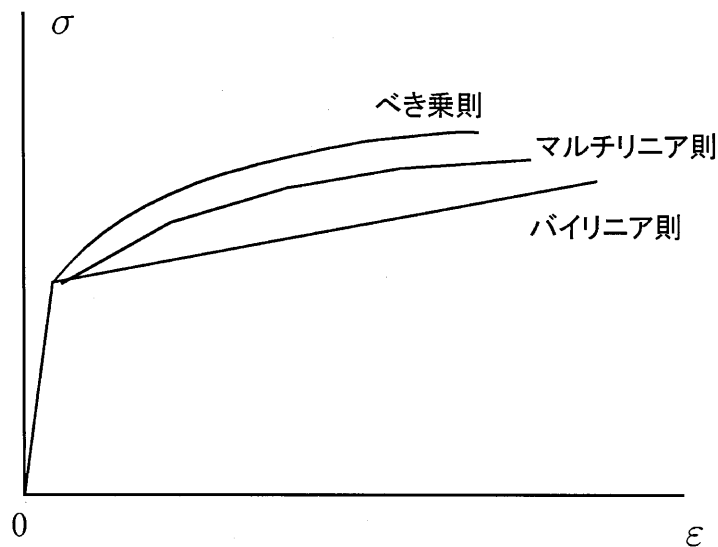


図 5.4.4 加工硬化則の例

また、応力-ひずみ関係は次のようになる。

$$d\sigma = \frac{Eh}{E+h}d\varepsilon, h = \frac{n\sigma_Y}{\varepsilon^p + \alpha} \quad (\text{塑性負荷状態}) \quad (5.4.19)$$

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (\text{弾性範囲内 および 弾性除荷状態}) \quad (5.4.20)$$

べき乗則のメリットはマルチリニア加工硬化則にくらべて少ない材料定数で現実の材料の挙動をよく近似できることである。

#### (4) その他の関係

鋼材の加工硬化のメカニズムは材料中の転位の発生や集積によるものであるが、加工硬化の式を理論的に定量予測するものは無い。そこで実験値との対応および目的に応じ、使いやすさの観点から多くの加工硬化則が提案されている。以下に代表的な例をあげておく。この詳細については [土木学会, 1996] を参照されたい。

$$\sigma = \left[ \frac{1}{\xi} \frac{E_{st}}{E} \left\{ 1 - e^{-\xi \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} - \frac{\varepsilon_{st}}{\varepsilon_Y} \right)} \right\} + 1 \right] \sigma_{Y0} \quad (5.4.21)$$

ただし式 (5.4.21) は公称応力と工学ひずみの関係式である。

#### 5.4.4 コンクリートの塑性

合成桁はいうに及ばず鋼製橋脚の中詰めなど鋼構造においてもコンクリートの特性を考慮しなければならない事例は少なくない。そこでコンクリートの材料特性についてもその概要をまとめておく。

コンクリートは典型的な脆性材料である。圧縮に対しては大きな強度を持つが引張りに対してはわずかししか抵抗せず、ひび割れが生じる。コンクリート材料の引張強度  $f_{tk}$  (MPa) と圧縮強度  $f'_{ck}$  (MPa) の関係式のひとつとして次の式があげられている。

$$f_{tk} = 0.23 f'_{ck}{}^{\frac{2}{3}} \quad (5.4.22)$$

これによれば通常強度のコンクリートでは引張強度は圧縮強度の 10 分の 1 程度である。このため塑性挙動の検討において圧縮と引張に峻別して議論が進められている。すなわち圧縮域では鋼材と同様に塑性流れ理論の枠組みを用いているが、引張領域ではひび割れ現象が卓越するのでその理論構成は破壊力学にもとづくものである。コンクリートでは比較的小さいひずみで材料が軟化を示すので加工硬化則もその性質を含めて数多く提案されている。

コンクリートは不均質でありかつ空隙やひび割れなど初期欠陥を多く含む材料なので応力-ひずみ関係も応力レベルの小さい領域をのぞいて線形弾性と見なすことはできない。設計において線形弾性と見なすのは使用限界状態に対する検討までである。耐震性能評価を数値解析によって行うときには応力-ひずみ関係は大ひずみでかつ履歴挙動を表すものでなければならない。そこで、例えば次のような式が提案されている [土木学会, 2002]。

$$\sigma' = 2K \cdot f'_{cd}(\varepsilon' - \varepsilon'_p) \quad (5.4.23)$$

$$K = \exp\left(-0.73\varepsilon'_{\max}\left(1 - \exp(-1.25\varepsilon'_{\max})\right)\right) \quad (5.4.24)$$

$$\varepsilon'_p = \varepsilon'_{\max} - 20\left(1 - \exp(-0.35\varepsilon'_{\max})\right)/7 \quad (5.4.25)$$

ここに  $\sigma'$  は応力 (圧縮の符号を正とする),  $\varepsilon'$  は軸ひずみを  $\varepsilon'_{peak}$  で除した正規化ひずみ (圧縮ひずみの符号を正とする),  $\varepsilon'_{peak}$  は圧縮強度時の軸ひずみ (0.002 としてよい),  $\varepsilon'_p$  は  $\varepsilon'_{peak}$  で正規化した残留軸ひずみ,

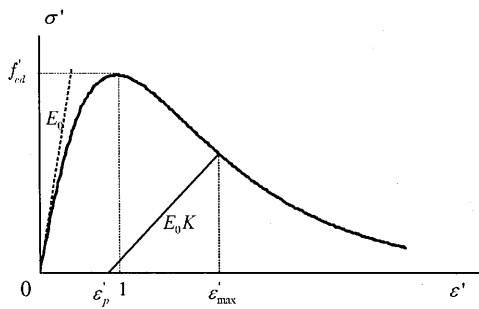


図 5.4.5 軟化域を含むコンクリートの応力-ひずみ曲線

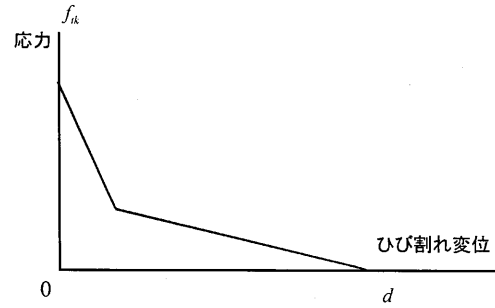


図 5.4.6 応力-ひび割れ変位曲線

$\epsilon'_{max}$  は過去に受けた最大の圧縮軸ひずみを  $\epsilon'_{peak}$  で正規化したもの、 $K$  は弾性剛性残存率、 $f'_{cd}$  は圧縮強度である。図 5.4.5 はこの式で表される応力-ひずみ曲線を示したものである。この式では鋼材と異なり塑性変形に伴う弾性係数の低減の効果が含まれている。

上にも述べたが、コンクリートにおいては引張応力下では、ひびわれが生じるので圧縮応力下とは異なるモデルを用いる。有限要素法において用いられる構成モデルは通常は分散ひび割れモデルである。分散ひび割れモデルとは材料にひび割れが生じても材料の不連続性は考慮せずなお連続体として扱うものである。そしてひび割れの効果は異方的な剛性の低下によって対応する。この剛性の低下の算定には引張軟化曲線(図 5.4.6)を指標として用いる。

このようにコンクリート構造では材料の軟化挙動が重要になる場面がありうる。したがって有限要素法を適用すると軟化領域において解の一意性が失われるので、解に要素分割に対する依存性がでてくることに注意しなければならない。

## 5.5 その他

### 5.5.1 ひずみ速度依存性

土木構造物において問題となるひずみ速度はそれほど大きなものではない。地震時でも局所的に  $10^{-1}$  /sec 程度であり十分にゆるやかな変形である。降伏応力、加工硬化係数、伸びなどの特性はひずみ速度に依存している。一般にひずみ速度が高いほど降伏応力は大きくなり応力-ひずみ関係もまた応力が高い方にシフトする。 $10^{-1}$  /sec 程度までのひずみ速度の引張試験においては降伏後のあるひずみにおける応力とひずみ速度の対数との間に線形関係が見られる。そして準静的な载荷による結果は下限を与えると考えてよい。この点については多くの実験データが蓄積されている [Blazynski, 1987]。したがって耐荷力を問題とする限り準静的な結果は安全側となる。しかしながら鋼構造物の耐震性能についていえば、強度のみにつきるものではないので準静的な特性を用いた結果をどう評価すべきかは個々の事例に応じて検討されなければならない。

### 5.5.2 一般応力状態への拡張

本章では主として土木構造におけるはりや柱への適用を念頭に材料の一次的な挙動について議論を進めてきた。しかし、例えば板およびシェル構造のように一般的な応力-ひずみ関係が必要となる場合も決して少なくない。そこで最も基本的な場合について、一般的な応力状態での応力-ひずみ関係の表現を与えておく。一般応力状態への拡張は形式的なものである。以下では直交座標系におけるテンソルの成分を使って表示し、添え字に関しては特に断らない限り総和規約を用いる。

一般応力状態では塑性ひずみ増分  $d\varepsilon_{ij}^p$  は塑性ポテンシャル関数  $\phi$  を用いて次式で表わす。

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.5.1)$$

塑性ポテンシャル関数  $\phi$  として降伏関数  $f$  をとるのが関連流れ理論，そうでないものを非関連流れ理論と呼ぶ [山田, 1980]。多くの場合関連流れ理論が用いられている。すなわち塑性ひずみ増分の方向は  $f$  の応力に関する微分として与えられる。一方降伏関数は一般応力状態に拡張される。鋼材のような材料では応力テンソルの不変量の関数になるが静水圧成分の影響はほとんどないので，偏差成分の第2不変量のみ関数とする Mises の降伏条件が基本となる。Mises の降伏条件は次のようになる。

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_Y = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} - \sigma_Y = 0 \quad (5.5.2)$$

この条件を満たす応力状態は応力空間上では曲面をなすので，この曲面を降伏曲面と呼ぶことがある。ここに， $\sigma'_{ij}$  は応力  $\sigma_{ij}$  の偏差成分である。これは式 (5.4.1) の拡張とみなすことができる。実際に一軸応力状態では式 (5.4.1) に一致する。 $\bar{\sigma}$  を相当応力（またはミゼス応力）と呼ぶことがある。次に式 (5.5.1) の係数  $d\lambda$  は材料が増分変形後も降伏しつづけるという条件（適合条件）から定めることができる。つまり次式を得る。

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_Y} \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \mu d\lambda = 0, \quad \mu = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \lambda} \quad (5.5.3) \quad (5.5.4)$$

さらに，これから次式が得られる。

$$d\lambda = \frac{1}{\mu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (5.5.5)$$

一方，応力増分について一般応力状態では式 (5.4.2) に対応する式は次式で与えられる。

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e = E_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (5.5.6)$$

これから，式 (5.5.1), (5.5.5) を (5.5.6) に代入して整理すると次のようになる。

$$d\sigma_{ij} = \left( E_{ijkl} - \frac{E_{ijab} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{cd}} E_{cdkl}}{\mu + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{qr}}} \right) d\varepsilon_{kl} \quad (5.5.7)$$

ここで相当応力  $\bar{\sigma}$  に対応するものとして相当塑性ひずみ ( $\varepsilon^p$ ) と呼ばれる変数を次のように増分式で定義する。

$$d\varepsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad (5.5.8)$$

塑性ひずみ増分  $d\varepsilon_{ij}^p$  の体積変化成分が0すなわち  $d\varepsilon_{11}^p + d\varepsilon_{22}^p + d\varepsilon_{33}^p = 0$  であれば相当塑性ひずみ増分  $d\varepsilon^p$  の大きさは一軸応力状態において塑性伸びひずみ増分の絶対値に一致する。さらに式 (5.5.1), (5.5.8) を使えば  $d\lambda = d\varepsilon^p$  となる。したがって式 (5.5.4) から次式を得る。

$$\mu = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \varepsilon^p} \quad (5.5.9)$$

$d\varepsilon^p$  は塑性ひずみ増分が体積変化成分を含まないとすれば（鋼材においてはこの仮定は十分に正しい）一軸における塑性ひずみ増分量と一致する。したがって上式の  $\mu$  は図 5.4.3 の  $h$  と一致する。以上まとめると塑性負荷状態に対して増分応力と増分ひずみの関係は次のようになる。

$$d\sigma_{ij} = \left( E_{ijkl} - \frac{E_{ijab} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{cd}} E_{cdkl}}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} E_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{qr}}} \right) d\varepsilon_{kl} \quad (5.5.10)$$

弾性除荷あるいは中立負荷状態に対しては次式となる。

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}d\varepsilon_{kl} \quad (5.5.11)$$

以上からわかるように一般応力状態への拡張における基本的な考え方は塑性変形増分のモードを塑性ポテンシャル関数を用いて式(5.5.1)であたえ、その大きさについては一軸の場合の結果との整合性を求めるものである。しかし、加工硬化則については一般的に考えるとかなり複雑になる。たとえば5.4.2で述べたような加工硬化、移動硬化あるいは混合硬化などを一般応力状態に拡張して考えることになる。等方硬化則については特に説明を要しないであろうが、移動硬化則では後背応力をテンソル量 $\alpha_{ij}$ で定義することになり、式(5.4.11)に相当する式はテンソル量に関するものになる [Pragar, 1956; Ziegler, 1959]。また一般応力状態では降伏曲面自体の変形(ゆがみ)もまた加工硬化則との関係で考慮しなければならない場合がでてくる [Nemat-Nasser, 2004]。

## 5.6 ま と め

土木鋼構造物に使用される材料の強度および応力-ひずみ関係についてその概略を述べた。構造物の耐震性能評価に対する要求は高度なものになってきており、それに応えるために数値解析における塑性状態での正確な応力-ひずみ関係に対する必要性は高い。コンクリート材料について履歴を考慮した塑性域での応力-ひずみ関係が示方書で与えられるようになったのもこのような状況に応じたものといえる。鋼材の塑性応力-ひずみ関係においては理論的な枠組みによる拘束はそれほど強いものではなく、それゆえに既に数多くの加工硬化則が提案されているのである。この章でみたように塑性領域での応力-ひずみ関係である加工硬化則の決定は各自が実験を良く再現するように決めるということにつきる。バイリニア硬化則とべき乗硬化則では適用範囲は自ずと異なる。バイリニア硬化則はひずみの比較的小さい領域で有効な近似であるのに対し、べき乗硬化則はひずみが数10%にも達する場合には有効である。さらに繰返し载荷を含むときには等方硬化を使うことは避けるべきである。したがってこのように各自がその適用範囲に配慮したうえで使うべきでなのである。また、注意しなければならないのは弾性変形であれば発生するひずみは小さく微小ひずみの仮定が当然に満たされていたにもかかわらず、塑性変形で生じるひずみは数10%にも達し、もはやひずみが微小であるとはいえないことである。したがって、工学ひずみと対数ひずみ、公称応力と真応力の区別といった有限変形への考慮が必要となるのである。数値解析に汎用プログラムを用いる場合などにはこれらの事項に関する配慮が必要であることを強調しておきたい。

付録(定義) ひずみおよび応力テンソルの定義 [Malvern, 1969]

### 1) 変形率テンソル

変形前の位置を $X_i$ 、変形後の位置を $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3)$ とすると変形勾配テンソルは次式で定義される。

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (5.A.1)$$

Greenの変形テンソル $C_{ij}$ は変形勾配テンソルを使って次式で定義される。

$$C_{ij} = F_{ki}F_{kj} \quad (5.A.2)$$

### 2) Greenのひずみテンソル

次式で定義されるテンソルを Green のひずみテンソルと呼ぶ。

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (5.A.3)$$

$\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。Green のひずみテンソルはいわゆる微小線素  $dX_i$  に対し変形前後の長さの変化にもとづくものである。すなわち次式が成立する。

$$2E_{ij}dX_i dX_j = (ds)^2 - (dS)^2 \quad (5.A.4)$$

ここに,  $dS, ds$  はそれぞれ変形前後の線素  $dX_i, dx_i$  の長さである。

### 3) 第2種の Piola-Kirchhoff 応力

真応力を  $\sigma_{ij}$  として第2種の Piola-Kirchhoff 応力テンソルは次のように与えられる。

$$S_{ij} = (\det F_{mn}) F_{ik}^{-1} \sigma_{kl} F_{lj}^{-1t} \quad (5.A.5)$$

これは式 (5.3.1) からあきらかであるが Green のひずみに共役な応力である。ここに  $F_{lj}^{-1t}$  は  $F_{lj}^{-1}$  の転置行列である。

### 参考文献

- Mooney, M. (1940): A theory of large elastic deformation, Journal of Applied Physics, 6, pp.582-592.
- Ogden, R. W. (1940): Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids, Proceedings of the Royal Society of London, A.326, pp.565-584.
- Treloar, L. R. G. (1940): Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation, Trans. Faraday Soc., 40, pp.59-70.
- Prager, W. (1956): A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids, J. Appl. Mech. Vol.23, pp.493-496.
- Ziegler, H. (1959): A modification of Prager's hardening rule, Q. J. Appl. Mech., Vol.17, pp.55-65.
- Galambos, T.V. and Ravindra, M. K. (1969): Properties of steel for use in LRFD, Proc. ASCE, Vol.104, No.ST1, pp.1459-1468.
- Malvern, L. E. (1969): Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall.
- Sfintesco, D. (1970): Fondement experimental des courbes europeennes de flambement, Construction metallique, No.3, p.5012.
- Alpsten, G. A. (1972): Variation in mechanical and cross-sectional properties of steel, Planning and Design of Tall Building, ASCE, Volume Ib, pp.755-805.
- Jones, D. F. and Treloar, L.R.G. (1975): The properties of rubber in pure homogeneous strain, J. Phys. D, 8, pp.1285-1304.
- Dafalias, Y. E. and Popov, E. P. (1976): Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity, J. of App. Mech., Vol.43, pp.645-651.
- 山田嘉明 (1980): 塑性・粘弾性, 培風館.
- Oden, J.T. (1980): 山田他訳, 非線形連続体の有限要素法, 1・2, 培風館.
- 福本啓士, 伊藤義人 (1981): 鋼構造部材の耐荷力評価システムのための数値データベースの作成と利用, 土木学会論文集, No.312, pp.59-72.
- Itoh, Y. (1984): Ultimate strength variations of structural steel members, Doctoral dissertation, Nagoya University.
- Blazynski, T. Z. (1987): Materials at High Strain Rates, Elsevier.
- Kuwamura, H. (1992): Mechanical behaviors of high Young's modulus steel, Proceedings of the Third Pacific Structural Steel Conference, Tokyo, Japan, Japanese Society of Steel Construction, pp.265-271.
- Shen, C., Mizuno, E. and Usami, T. (1993): Development of cyclic two-surface model for structural steels with yield plateau, NUCE Report, No.9302, March.
- 土木学会・土木学会鋼構造委員会・鋼構造強度研究小委員会 (1994): 鋼構造物の終局強度と設計



- 土木学会・土木学会鋼構造委員会・鋼構造新技術小委員会・耐震設計WG (1996): 鋼橋の耐震設計指針案と鋼橋の耐震設計のための新技術.
- Ogden, R. W. (1997): *Non-linear Elastic Deformations*, Dover Publications.
- 後藤芳顕, 王慶雲, 高橋宣男, 小畑誠 (1998): 繰り返し荷重下の鋼製橋脚の有限要素法による解析と構成則, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.189-206.
- HKS Inc. (1998): *ABAQUS Users Manual*.
- 土木学会 (2002): *コンクリート標準示方書*.
- 日本鋼構造協会・鋼橋の性能照査型設計対応研究委員会, 鋼橋の安全性・使用性部会 (2002): 鋼橋の要求性能と安全性評価技術
- 奈良敬, 中村聖三, 安浪博道, 川端文丸, 塩飽豊明 (2004): 橋梁向け構造用鋼板の板厚および強度に関する統計調査, 土木学会論文集, No.752/I-66, pp.299-310.
- Nemat-Nasser, S. (2004): *A Treatise on the Finite Deformation of Heterogeneous Inelastic Materials*, Cambridge University Press.