

第4章 構造物の安定・不安定

4.1 概 説

本節では、静的荷重を受ける構造物の挙動を具体的に説明し、それらの不安定現象がどのようにして起こるかを言及する [土木学会, 1987].

4.1.1 構造物の挙動

構造物の安定・不安定の問題を考える前の準備として構造物の挙動に注目してみる. 今, 代表的な例として図 4.1.1 に示すような単純ばりを取り上げる. この単純ばりの中央に集中荷重 P のみが作用している状態を考えると, 荷重載荷点でのたわみ δ は荷重 P と比例関係にあり, 特別大きな荷重 P を作用させない限り, 線形挙動を示す. すなわち, つり合い条件を変形前で立てる微小変形理論に基づく挙動を示す. しかしながら, はりに軸方向力 N が作用する場合, 軸方向力が引張力のときには, 軸方向力 N による付加曲げモーメントの影響で, はり中央のたわみが減少し, 図 4.1.1(b) の曲線で表現されるような非線形挙動を示す. これとは逆に, 軸方向力が圧縮力であるときには, 軸方向力 N による付加曲げモーメントの影響 [福本, 1982; 西野ら, 1983] で, はり中央のたわみが増大し, 図 4.1.1(c) の曲線で表現されるような非線形挙動を示す, これらの例からも分かるように, はりに横力 P だけでなく軸方向力 N が作用する場合には, はりの変形状態を考慮してつり合いを考える必要があり, その結果, 荷重 P とはり中央のたわみ δ は比例関係でなくなる. すなわち, たとえばりが常にフックの法則を満たす線形弾性体であると仮定できたとしても, 荷重に対するはりのたわみは非線形性を示す. このような幾何学的形状変化に伴う非線形挙動を扱う問題を 幾何学的非線形問題と呼ぶ [鷺津ら, 1983; 土木学会, 1984; 吉田, 1986; 土木学会, 1996].

一般に, 図 4.1.1(b) のような荷重漸増型の幾何学的非線形挙動は, 軸方向引張力と曲げモーメントを受ける部材やつり橋などで見られる. また, 図 4.1.1(c) のような荷重漸減型の幾何学的非線形挙動は, 軸方向圧縮力と曲げモーメントを受ける部材 (はり一柱部材と呼ばれる) やアーチなどに見られる. 図 4.1.1 から分かるように, たわみが微小であるときには, (b), (c) の場合についても荷重-たわみ関係はほぼ比例関係にあるとみなせる. 一方, 図 4.1.2 に示すような引張力のみが作用する部材の挙動を観察してみると, 部材の材料として構造用鋼材 [土木学会, 1984] を用いた場合には引張力 P と荷重載荷点の変位 δ との関係は図 4.1.2(a) に示

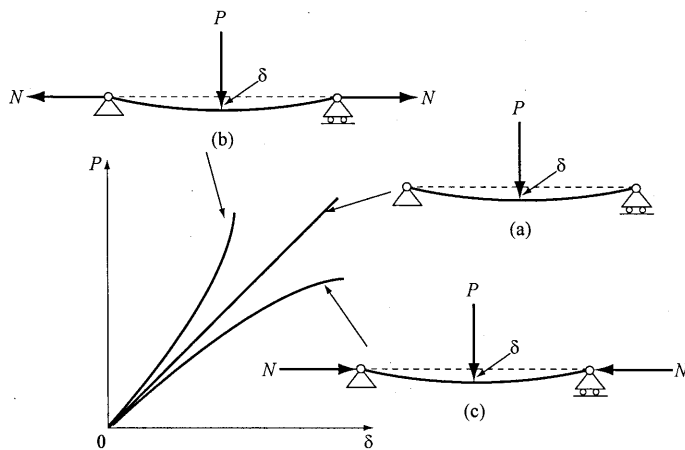


図 4.1.1 幾何学的非線形性

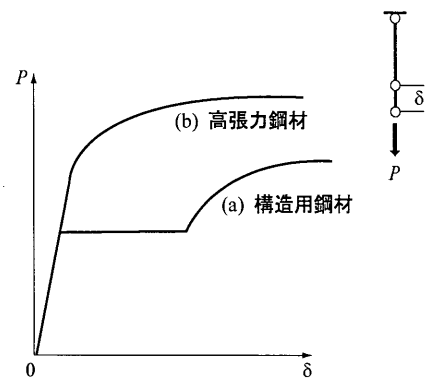


図 4.1.2 材料非線形性

すようになり、材料に高張力鋼材 [土木学会, 1984] を用いた場合には引張力 P と変位 δ の関係は図 4.1.2(b) のような関係になる。いずれの鋼材も力学的性質に応じた非線形挙動を呈するようになる。このような材料の非線形性に起因する非線形問題を 材料非線形問題 と呼び、前述の幾何学的非線形問題と区別している [鷺津ら, 1983; 土木学会, 1984].

ここでもう一度 図 4.1.1(c) の横力 P と軸方向圧縮力 N を受ける単純ばりを取り上げ、荷重 P を十分増大させ、たわみを大きくさせた状態を考える。このとき、単純ばりは大きく変形しており、それに伴う断面内の応力も大きくなっていると考えられるので、はりの一部に塑性領域が存在していることが想像される。たとえば、はりの使用鋼材を図 4.1.2(a) の構造用鋼材とし、鋼材の応力-ひずみ関係を 図 4.1.3(a) に示すような完全弾塑性体の応力-ひずみ関係で近似すると、荷重の増加につれて幾何学的非線形挙動のみならず、はりの一部が塑性化することによる材料非線形性が加わり非線形性の程度が強くなる。このため、図 4.1.3(b) の荷重-たわみ曲線に見られるように、荷重が最大荷重に到達した後は、荷重の増加は期待できず、構造物の荷重に対する抵抗力（耐荷力または極限強度と呼ぶ）が失われることになる。このように、幾何学的非線形性と材料非線形性を併せもつ非線形問題を 複合非線形問題 と呼ぶ [鷺津ら, 1983; 土木学会, 1984].

図 4.1.3 の実線で示される挙動は、構造物が崩壊に至るような段階まで荷重を増加させたときに見られ、必ず最高荷重点（極限点）が存在する。一般に、実際の構造物の非線形挙動は図 4.1.3 に見られるような、最高荷重点を持つ荷重-変位曲線になることが知られている。構造物には、初期形状の不整や残留応力などで代表される初期不整（第 6 章参照）が存在し、荷重の増加につれて幾何学的非線形性も関与すると共に、塑性領域が進展してくることが最大荷重点の存在と深く結びついてくる。

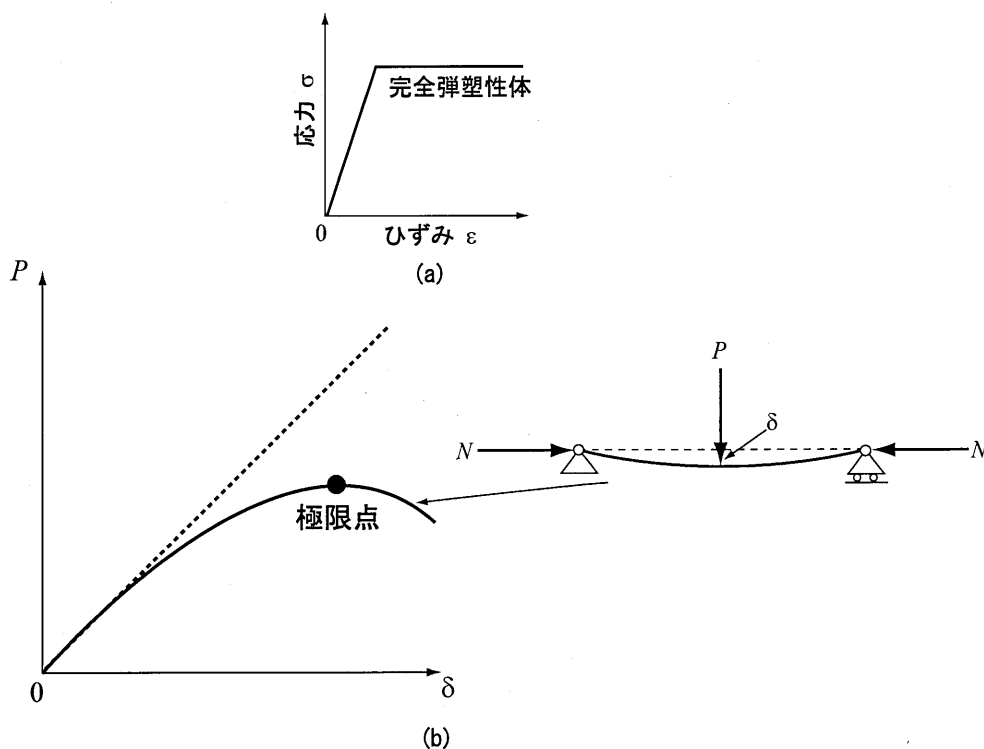


図 4.1.3 複合非線形性

4.2 構造物の不安定現象

線形問題においては、外力と構造物の応答とが1対1に対応するため、解は唯一つしか存在しない。しかしながら、図4.1.3の複合非線形挙動で見たように、構造物の形態、外力の種類、材料の特性によっては荷重-変位曲線上に特異な点(図4.1.3では極限点)が現われ、その点を境にして構造物の荷重に対する抵抗力が失われることがある。さらに特徴的な例として、鋼構造物でしばしば見受けられる真直ぐな細長い柱や薄い平板を一様に圧縮した場合を考える。このときの変形様式は一様な圧縮変形のみであり、目に見えるような横変位を生じてはいない。にもかかわらず、圧縮力が一定値を超えると微小な乱れを与えた瞬間に過大な横荷重変位が生じ、構造物は荷重をささえる抵抗力を増加させることなく、場合によっては急激に低下させることがある。以上のような現象は不安定現象と呼ばれ、鋼構造物の設計では最も注意すべき現象のひとつである。

弾性状態における不安定現象の例を荷重 P と変位 δ の関係で整理し、分類すると、図4.2.1のようになる。図中において、実線は安定なつり合い経路(荷重-変位曲線)を表わし、破線は不安定なつり合い経路を表わす(安定・不安定の判別のついては次節参照)。図4.2.1(a)の例は、つり合い経路が分岐点(4.3参照)の値の達すると、それまでの変形様式(初期変形様式と呼ぶ)から急激に別の変形様式に移行する現象で、分岐座屈あるいは単に座屈と呼ばれている[福本, 1982; 西野ら, 1982; 鷲津ら, 1983; 土木学会, 1984; 川井, 1974; 西

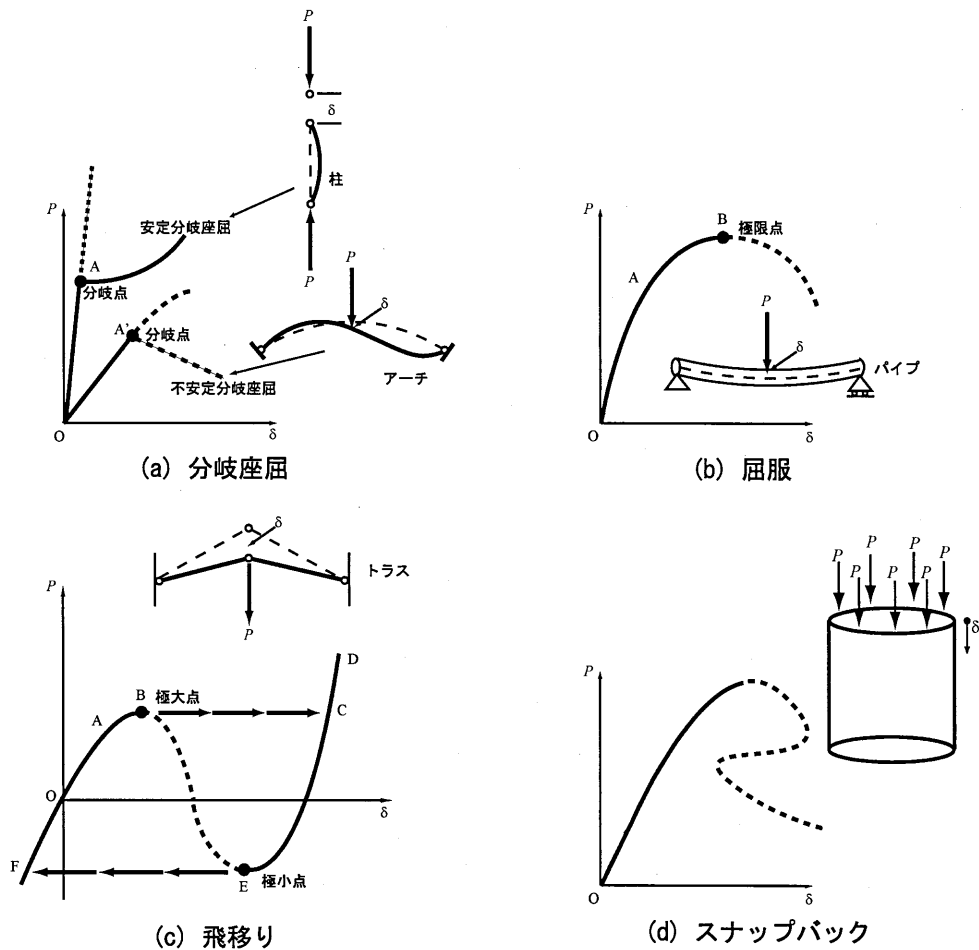


図 4.2.1 不安定現象の分類

野, 1984; 吉識, 1959]. そして, 分岐点に対応する荷重を座屈荷重と呼び, 座屈時の変形様式を座屈変形モードと呼ぶ. 数学的にいえば, 一般に座屈荷重は固有値問題における最小固有値に相当し, 座屈変形モードは最小固有値に対する固有ベクトルに相当している. 後述の 図 4.2.2 に示すような非対称分岐座屈の場合には, 最小固有値に対する固有ベクトルが, 座屈変形モードに相当しないので注意が必要である. しかしながら, 非対称分岐座屈の場合であっても実際にはその座屈変形モードにおいては固有ベクトルモードが支配的であることが細野 [細野, 1976a;1976b] によって報告されている.

図 4.2.1(a) に見られる中心圧縮を受ける柱の安定分岐座屈 (A 点) やアーチの不安定分岐座屈 (A' 点) は分岐座屈の代表例である [鷺津ら, 1983]. ただし実際の構造物の場合は, 初期不整があるため分岐座屈が生じることは少なく, つり合い経路そのものが分岐経路に擦り寄ったものになる場合が多い.

図 4.2.1(b) では, 荷重の増加につれて非線形性が増し, 荷重が極限点 (B 点) に達した後は不安定なつり合い状態に至る不安定現象で, 屈服と呼ばれている. たとえば, 図 4.2.1(b) に示すように, 薄肉のパイプが集中荷重を受けた場合, 断面の偏平化とともに断面剛性が低下することによる屈服現象, あるいは付加曲げモーメントの影響ではりのたわみが増大し, 断面内に塑性域が生じ, 剛性が低下することによる屈服現象が良く知られている.

図 4.2.1(c) では, 荷重が増大し, トラス部材には圧縮力が生じ, 極大点 (B 点) に達すると, 新しい変形状態に飛移り, さらに荷重を増加させるとトラス部材には引張力が生じ, CD 線上を動く. 逆に D 点から荷重を減少させていくと, 変位も減少し, 荷重が極小点 (E 点) に達したときに, F 点に飛移る. このような現象が飛移りと呼ばれる不安定現象である. たとえば, 偏平なアーチやシェルに生じる現象である [鷺津ら, 1983]. また, 図 4.2.1(d) のように変位の折り返し点が発生するスナップバックと呼ばれる不安定現象も存在する. このような不安定現象は, 圧縮力が作用する薄肉円筒シェル構造などで観察される.

広い意味では, 分岐座屈, 屈服, 飛移りを含めて座屈と呼ぶことがある. このときには, 不安定現象といえは座屈現象を指すことになる. 構造物を設計する際に行う構造物の安定性の照査においては, 座屈設計という表現の中にすべての不安定現象 (ただし, 剛体力学的な安定問題は除く) に関する検討を含めて考えている. 座屈点は数学的には特異点であり, これはすでに述べたように分岐点と極限点がある. 実用設計で問題となるのは主つり合い経路上の最初の特異点での挙動であり, 各種不整を含む実構造物でもこの最初の特異点の影響が最も大きいと考えられる. しかし, 2 番目, あるいは 3 番目の特異点が問題とならないという保証は必ずしもない. 主な座屈点の分類を図 4.2.2 に示すが, さらに詳しい分類については文献 [半谷ら, 1991] を参照されたい.

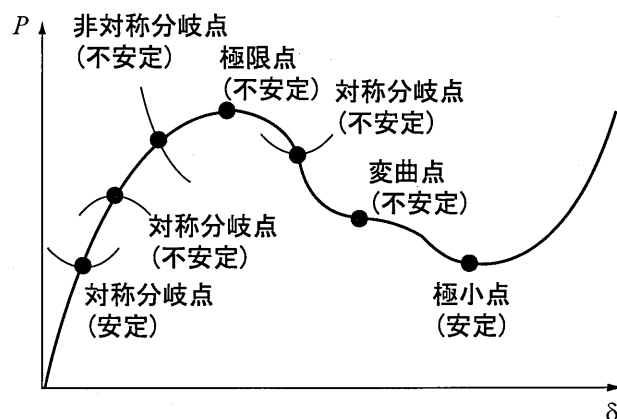


図 4.2.2 座屈点の分類

4.3 安定・不安定の判別

4.3.1 安定・不安定の概念

力のつり合い条件を満たしていても、その状態は必ずしも同じではない。その例として、図 4.3.1 に3個の小球を示している。これらの小球は、それぞれ凹状の面上(図 4.3.1(a))、凸状の面上(図 4.3.1(b))、水平面上(図 4.3.1(c))にあり、いずれもその位置で静止し、力のつり合い条件を満たしている。しかしながら、図中に示す矢印の方向に少し移動させると、3個の小球は全く異なった動きをする。すなわち、凹状の面上にある小球は元の位置に向かうのに対し、凸状の面上にある小球は矢印の方向に移動し続ける。水平面上の小球は移動させられた位置に留まる。こうしたつり合い状態は、それぞれ安定(図 4.3.1(a))、不安定(図 4.3.1(b))、中立(図 4.3.1(c))と呼ばれ、区別される。

この安定・不安定の考察を行うには、エネルギーの変化を調べるのが便利である。以下では剛体棒とばねからなるモデルでの安定・不安定の判別を行う。

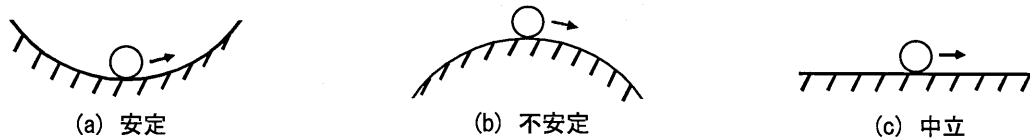


図 4.3.1 つり合い状態

4.3.2 エネルギー変化による安定・不安定の判別

(1) 1自由度系

エネルギー変化による安定性の検討を、図 4.3.2 に示す剛体棒とばねからなるモデルを用いて行う。剛体棒の上端(A点)には鉛直荷重Pが作用し、下端(B点)はピン支持とする。剛体棒が垂直の時にばねの伸びが0とすると、鉛直荷重Pの大きさに拘わらず、剛体棒は垂直位置でつり合い状態にある。ここで、この剛体棒に微小な乱れ(回転) $\theta(\ll 1)$ を与える。

ここで、全ポテンシャルエネルギーの変化を検討する。剛体棒が θ だけ傾いた状態での、ばねに蓄えられるひずみエネルギーは、

$$U(\theta) = \frac{1}{2}k(L \sin \theta)^2 = \frac{1}{2}kL^2 \sin^2 \theta \quad (4.3.1)$$

であり、荷重Pの持つ位置エネルギーは

$$U(\theta, P) = -PL(1 - \cos \theta) \quad (4.3.2)$$

である。

よって全ポテンシャルエネルギー π は次式のようなになる。

$$\pi = U + V = \frac{1}{2}kL^2 \sin^2 \theta - PL(1 - \cos \theta) \quad (4.3.3)$$

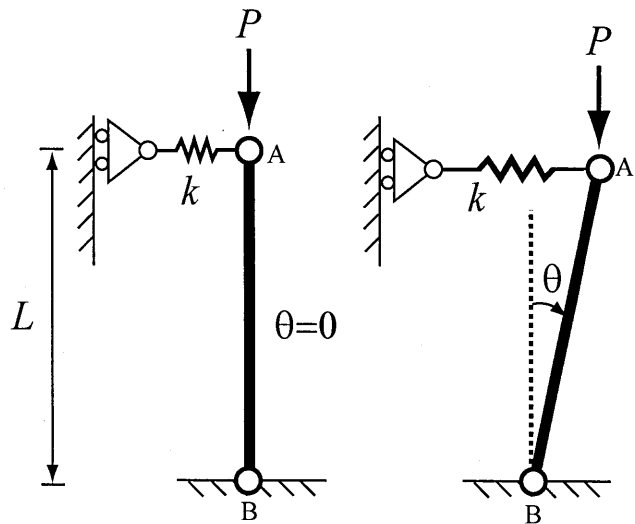


図 4.3.2 剛体-ばねモデル

前の考察からも分かるように、安定・不安定はつり合い状態に微小な乱 $\delta\theta$ を与えたときの全ポテンシャルエネルギー増分 $\Delta\pi$ の符号によって調べることができる。すなわち、図 4.3.1 を参照して、

$$\left. \begin{array}{ll} \text{任意の}\delta\theta\text{に対して、常に}\Delta\pi > 0\text{のとき} & : \text{安定} \\ \text{任意の}\delta\theta\text{に対して、常に}\Delta\pi = 0\text{のとき} & : \text{中立} \\ \text{ある}\delta\theta\text{に対して、}\Delta\pi < 0\text{のとき} & : \text{不安定} \end{array} \right\} \quad (4.3.4)$$

であることが分かる。

一般的に、 $\Delta\pi$ は高次の非線形性を有しており、 $\Delta\pi$ の符号は以下のように級数展開して評価することになる。

$$\Delta\pi = \delta\pi + \frac{1}{2!}\delta^2\pi + \frac{1}{3!}\delta^3\pi + \dots \quad (4.3.5)$$

ここで、 δ は変分演算子であり、

$$\delta\pi = \frac{d\pi}{d\theta}\delta\theta, \quad \delta^2\pi = \frac{d^2\pi}{d\theta^2}(\delta\theta)^2, \quad \delta^3\pi = \frac{d^3\pi}{d\theta^3}(\delta\theta)^3 \quad (4.3.6)$$

またこれらはそれぞれ第 1 変分、第 2 変分、第 3 変分と呼ばれている。

ポテンシャルエネルギーの停留原理によれば、つり合い状態では全ポテンシャルエネルギー π が極値をとる。

$$\delta\pi = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{d\pi}{d\theta} = 0 \quad (4.3.7)$$

よって、つり合い状態においては式 (4.3.5) の右辺第 1 項は常に零になるので、安定・不安定は $\delta^2\pi$ の正負によって支配されることになる。 $(\delta\theta)^2$ は常に正であるので、安定・不安定は $d^2\pi/d\theta^2$ の符号で以下のように決定される。

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{d^2\pi}{d\theta^2} > 0 & : \text{安定} \\ \frac{d^2\pi}{d\theta^2} = 0 & : \text{臨界} \\ \frac{d^2\pi}{d\theta^2} < 0 & : \text{不安定} \end{array} \right\} \quad (4.3.8)$$

ここで第 2 項が非零となる 臨界状態については、さらに高次の項を評価する必要がある。例えば第 2 項が零で、第 3 項が非零の場合は、 $(\delta\theta)^3$ は正負いずれの値にもなり得るので、この場合の臨界つり合い状態は不安定であることが理解できる。また第 2、第 3 項が零で第 4 項が非零の時には、 $(\delta\theta)^4$ は常に正であるので、臨界つり合い状態の安定・不安定は、 $d^4\pi/d\theta^4$ の正負で判別できる。なお安定でも不安定でもない中立なつり合い状態となるのは、すべての変分量が零のときに限られる。 $d^2\pi/d\theta^2 = 0$ となるつり合い曲線上の点は図 4.2.2 の座屈点に対応しており、臨界点 (Critical Point) とも呼ばれる。

図 4.3.2 の剛体棒-ばねモデルの全ポテンシャルエネルギーは式 (4.3.3) で得られており、つり合い状態では、

$$\frac{d\pi}{d\theta} = L \sin\theta(kL \cos\theta - P) = 0 \quad (4.3.9)$$

となる。よって、つり合い解は以下の 2 つである。

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \\ P = kL \cos\theta \end{array} \right\} \quad (4.3.10)$$

ここで、 $\theta = 0$ の解は P に無関係であるので、自明な解と呼ばれている。

さらに第2変分からこのモデルの安定・不安定を評価する。

$$\frac{d^2\pi}{d\theta^2} = kL^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - PL \cos\theta \quad (4.3.11)$$

$\theta = 0$ のつり合い状態においては,

$$\frac{d^2\pi}{d\theta^2} = L(kL - P) \quad (4.3.12)$$

であるので, $\theta = 0$ における安定・不安定の判別は以下ようになる。

$$\left. \begin{array}{l} P < kL \text{ のとき } \delta^2\pi > 0 \quad : \text{安定} \\ P = kL \text{ のとき } \delta^2\pi = 0 \quad : \text{臨界} \\ P > kL \text{ のとき } \delta^2\pi < 0 \quad : \text{不安定} \end{array} \right\} \quad (4.3.13)$$

ここに, $P = kL$ は安定なつり合い状態から不安定なつり合い状態への臨界つり合い状態である。

つぎに臨界つり合い状態の安定・不安定を調べるために, さらに高次の変分を評価して, 臨界点の値すなわち, $\theta = 0, P = kL$ を代入すると,

$$\delta^3\pi = 0, \quad \delta^4\pi < 0 \quad (4.3.14)$$

となる。したがって, $\theta = 0, P = kL$ における臨界点では不安定である。

(2) 多自由度系

一般的な多自由度の構造物の安定・不安定を判別する方法についても, 先に述べた1自由度系の場合と同様な手法を適用できる。今, n 個の自由度 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ と m 個の保存力 $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3, \dots, P_m)$ でその構造物の全ポテンシャルエネルギー π が表現できるとすると, つり合い状態においては以下のような全ポテンシャルエネルギーの停留条件が成立する。

$$\delta\pi(\mathbf{u}, \mathbf{P}) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial\pi(\mathbf{u}, \mathbf{P})}{\partial u_i} \delta u_i = 0 \quad (4.3.15)$$

よって, 式(4.3.15)を参照して, つり合い式は n 個求めることができる。

$$\frac{\partial\pi(\mathbf{u}, \mathbf{P})}{\partial u_i} = 0 \quad (4.3.16)$$

このつり合い状態での安定・不安定の判別は, 1自由度の場合と同様に, 第2変分の符号で評価できる。すなわち,

$$\delta^2\pi(\mathbf{u}, \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\pi(\mathbf{u}, \mathbf{P})}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j \quad (4.3.17)$$

の正負により,

$$\left. \begin{array}{l} \text{常に } \delta^2\pi(\mathbf{u}, \mathbf{P}) > 0 \text{ の状態であるとき} \quad : \text{安定} \\ \delta^2\pi(\mathbf{u}, \mathbf{P}) = 0 \text{ の状態であるとき} \quad : \text{臨界} \\ \delta^2\pi(\mathbf{u}, \mathbf{P}) < 0 \text{ の状態が存在するとき} \quad : \text{不安定} \end{array} \right\} \quad (4.3.18)$$

と評価できる。

実際の構造設計においては、式 (4.3.18) の臨界点を求めることが重要となる場面が多い。この臨界点の条件は以下のような行列式が零になることと等価である。

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 \pi}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial u_1 \partial u_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \pi}{\partial u_1 \partial u_n} \\ & \frac{\partial^2 \pi}{\partial u_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \pi}{\partial u_2 \partial u_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ SYM & & & \frac{\partial^2 \pi}{\partial u_n^2} \end{array} \right| \quad (4.3.19)$$

式 (4.3.19) の行列は有限要素解析における接線剛性マトリクスに対応している。有限要素解析による座屈解析については本書の第 7 章に詳しい。

4.3.3 弾塑性問題の安定・不安定

現実的な構造物ではいわゆる座屈点に到達する以前に材料に塑性化が生じるので安定問題においてはこの影響を考慮する必要がある。しかしながら、塑性領域における安定・不安定の扱いは弾性問題と較べその扱いは格段に難しくなる。安定・不安定の判定については弾性の場合と異なってポテンシャルエネルギーが存在しないので、仕事に基づく判定を行わなければならない。すなわち、死荷重などが作用した場合において、多自由度系については以下の式により判定することが可能と考えられる。

$$\left. \begin{array}{l} (\Delta P \cdot \Delta u) > 0 \quad : \text{安定} \\ (\Delta P \cdot \Delta u) = 0 \quad : \text{臨界} \\ (\Delta P \cdot \Delta u) < 0 \quad : \text{不安定} \end{array} \right\} \quad (4.3.20)$$

弾塑性問題における構造安定性の喪失は弾性と同様、分岐点や極限点などの特異点の存在と関係している。したがって、弾塑性構造物の安定性を詳細に検討するにはこのような特異点周りでの挙動を正確に解析する必要がある。極限点挙動に特徴的なつり合い経路は図 4.2.1 に示すとおりであるが、このようなつり合い経路の解析は実際の構造物の強度を特定するために実務においても多く用いられている。弾塑性領域での極限点の解析は材料の除荷・負荷挙動を考慮する点を除いて、基本的には弾性問題における極限点挙動の解析と同一であり、弧長制御や変位制御法にもとづき商用プログラムでも解析することができる。一方、弾性分岐同様、塑性分岐点での構造システムの解は本質的に一意性を持たないので、極限点と異なり弧長増分法などを用いても分岐点での特異性を除くことはできない。したがって、この問題を解くためには特別な方法が必要である。以下にその方法について説明する。

(1) 弾塑性分岐解析

弾性分岐と塑性分岐の大きな違いは主経路方向と分岐経路方向で材料の除荷と負荷の挙動により必ずしも同じ剛性をとらないことである。弾塑性分岐に関する研究は Shanley(1947) の柱を対象とした研究がはじめる。その後 Hill(1958) らにより一般化がなされたが、その表現が複雑であることと複合非線形解析の基盤が不十分であったことで、長い間、実用的な問題に適用されることはほとんどなかった。近年複合非線形解析の進展にもとづき、汎用的な有限要素離散化解析に Hill の分岐条件を導入し、分岐点と分岐経路の方向を特定する手法が後藤らより示され、各種問題の解析に適用された。具体的には荷重が増加する主経路から分岐する場合 [後藤ら, 1992; 1994] と荷重が減少する主経路から分岐する場合 [Goto et al., 1995; 後藤ら, 1995; 1996] について単一分岐点を対象として扱っている。弾塑性分岐の場合は Hill の分岐条件を導入することで分岐方向の変位増分が求められるのが特徴である。なお、弾性分岐同様、分岐点での接線剛性行列の零固有値に対応する固

有ベクトルを分岐経路探索のための近似的な増分ベクトルとして収束計算がなされる場合もあるが、この増分ベクトルは塑性分岐の場合、分岐方向とは一致しない。さらに、塑性問題では経路依存性があるので塑性分岐解析としては十分なものではない。

弾塑性分岐の場合は弾性の場合と異なり分岐点はつり合い経路上の独立した1点に存在するのではなく、ある領域で連続的存在している場合が多い。柱について具体的に説明すると、接線係数荷重 (*Tangent modulus load*) とオイラー荷重 (弾性分岐荷重) の間の領域に連続的に分岐点が存在している。分岐時において、柱の断面が負荷あるいは中立状態である場合が接線係数荷重であり、全断面で除荷する場合がオイラー荷重 (弾性分岐荷重) である。減少係数荷重 (*Reduced modulus load*) は中立軸より上あるいは下の断面領域の一方が負荷し他方が除荷する場合でオイラー荷重と接線係数荷重の中間に位置している。工学的に意味のあるのは最小分岐点に対応する接線係数荷重である。この場合、分岐直後は断面の部分的な除荷挙動により剛性が増加するため荷重が上昇するが、変形が増加すると幾何学非線形性により減少係数荷重に到達する以前に極限点を迎える。土木構造物では弾性座屈点に到達する以前に材料の塑性化が生ずるのでその耐力を評価する上で塑性分岐解析が重要であることはいうまでもないが、耐震設計などで構造物や材料の変形性能を評価する場合においても重要性が高まっている。

4.4 まとめと今後の展望

構造物の安定・不安定に関する研究は弾性問題に関しては、本書の 4.3.2 で述べたようにエネルギーをもとにした一般安定理論が完成している。この理論に関しては“座屈設計ガイドライン”の旧版において紹介されているが、それ以降、今日に至るまで安定・不安定に関する研究は大きく発展した。研究分野では弾塑性不安定現象の解明が進んだことが実務との関わりという観点では最も大きな進展と考えられる。これは、計算機と弾塑性離散化解析が進歩したことと阪神大震災以降、損傷を許容した耐震設計がなされるようになり、構造物の耐荷力のみならず変形性能の評価が重要になったためである。このなかで、構造物ならびに材料の変形性能を劣化させる局所化現象は実験的にはその存在が知られていたが、弾塑性分岐解析により各種局所化現象の理論的側面が解明されたのは成果の一つである [Goto et al., 1995; 1998; 後藤ら, 1996, Obata et al., 1997; 岡澤ら, 2000; 2001; 2002a; 2002b]。古くから研究の行われている動的安定問題 [ボローチン, 1972; ツィーグラ, 1973] については、本書ではスペースの関係から扱うことができなかったが、最近においても新しい研究成果が報告されている [Riks et al., 1996; Hunt et al., 1997; 藤井ら, 2003]。また、群論を用いた分岐理論の研究 [Ikeda et al., 2002] は分岐現象の解析に直接適用できないが弾性分岐現象を体系的に理解する上で有効なものと考えられる。

今後、この分野での静的問題で残された課題としては弾塑性多重分岐問題の解析があげられる。また、安定な弾塑性分岐解析を実施するための数値解析手法の整備も必要である。今回扱うことができなかった動的安定問題については材料の非弾性挙動が関与する実際的な問題については十分な検討がなされていないが、計算機のさらなる進歩により研究の進展が期待される。

参考文献

- Koiter, W.T. (1945): On the Stability of Equilibrium, Thesis Polytechnic Institute, Delft H.T., Paris, Amsterdam, 1945.
- Shanley, F. R. (1947): Inelastic column theory, J. Aeronautical Sciences, Vol.14, pp.261-268.
- Hill, R. (1958): A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids, J. Mech. Phys. Solids, 6, pp.236-249, 1958.
- 吉識雅夫, 山本善之 (1959): 弾性安定論, 共立出版, 1959.

- Britvec, S. J.(1973) : The Stability of Elastic Systems, Pergamon Unified Engineering Series, 1973.
- Thompson, J. M. T. and Hunt, G. W. (1973): A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, London, 1973.
- 川井忠彦 (1974) : 座屈問題解析, コンピュータによる構造工学講座-6-B, 培風館, 1974.
- 細野透 (1976a) : 弧長法による弾性座屈問題の解析 (その 1) 座屈点に於ける増分解の性質, 日本建築学会論文報告集, 242,pp.41-49,1976.
- 細野透 (1976b) : 弧長法による弾性座屈問題の解析 (その 2) 数値解析法としての弧長法, 日本建築学会論文報告集, 243,pp.21-31,1976.
- 福本嘸士 (1982) : 構造物の座屈・安定解析, 新体系土木工学, 技術堂出版, 1982.
- 西野文雄, 長谷川彰夫 (1983) : 構造物の弾性解析, 新体系土木工学, 技術堂出版, 1983.
- 鷺津久一郎他編 (1983) : 有限要素法ハンドブック, 基礎編, 1981, 応用編, 1983, 培風館
- 土木学会編 (1984) : 構造力学公式集, 土木学会, 1984.
- 西野文雄 (1984) : 連続体の力学 (II), 土木工学大系 6, 彰国社, 1984.
- 吉田裕 (1986) : 有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題, 土木学会論文集,374,pp.25-37,1986.
- 土木学会編 (1987) : 座屈設計ガイドライン, 土木学会, 1987.
- 半谷裕彦, 川口健一 (1991) : 形態解析-一般逆行列とその応用-, 計算力学と CAE シリーズ 5, 培風館, 1991.
- 後藤芳顯, 大鹿克敏, 川西直樹, 小畑誠 (1992) : 多自由度離散系の弾塑性分岐挙動の解析法とトラス構造物への適用, 土木学会論文集, 446, pp.117-126, 1992.
- 後藤芳顯, 宮下 敏, 松浦 聖 (1994) : 平面骨組の弾塑性分岐挙動の解析法と初期曲げを受ける剛結門型骨組の座屈特性, 構造工学論文集, 40A, 283-294, 1994.
- Wriggers, P.(1993) : Continuum Mechanics, Nonlinear Finite Element Techniques and Computational Stability, Progress In Computational Analysis of Inelastic Structure, edited by Stein,E.,pp.245-287,1993.
- Goto, Y., Toba, Y. and Matsuoka, H. (1995): Localization of plastic buckling patterns under cyclic loading, J. of Engrg. Mech., ASCE, vol.121, No.4, 493-501, 1995
- 後藤芳顯, 王慶雲, 小畑誠 (1996) : 塑性分岐解析に基づく圧縮板の座屈モードの局所化現象の解析, 土木学会論文集, 543, pp.55-70,1996.
- 土木学会編 (1996) : 構造工学における計算力学の基礎と応用, 土木学会, 1996.
- Riks, E., Rankin, C. C. and Brogan, F. A. (1996) On the Solution of Mode Jumping Phenomenon in Thin-Walled Shell Structures, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 136, pp.59-92, 1996.
- Hunt, G. W., Lawther, R. and Costa, P. P. E. (1997) Finite Element Modeling of Spatially Chaotic Structures, Int. J. Numerical Methods in Engineering, 40, pp.2237-2256, 1997.
- Obata, M., Shoji, T., Goto, Y.(1997):Analysis of strain localization of solids under cyclic loading using a corner theory of plasticity, Proc. SDSS'97pp.817-824,Nagoya, Japan
- Goto, Y., Zhang, C., Ono, K. (1998): Localization of buckling patterns in cylinders under cyclic loading, J. of Engrg. Mech., ASCE, Vol.124, No.11, 1249-1257, 1998.
- 岡澤重信, 宇佐美勉, 野口裕久, 藤井文夫 (2000) : 3次元塑性不安定解析による引張鋼材の局部くびれ挙動, 土木学会論文集, 654, pp.285-296, 2000.
- 岡澤重信, 寺澤大樹, 池田清宏, 寺田賢二郎 (2001) : 引張鋼材のくびれ挙動に関する形状効果, 土木学会論文集, 675, 351-354, 2001.
- 池田清宏, 室田一雄 (2001) : 構造系の座屈と分岐, コロナ社, 2001.
- Ikeda, K. and Murota, K. (2002) Imperfect Bifurcation in Structures and Materials: Engineering Use of Group-Theoretic Bifurcation Theory, Springer-Verlag,2002.
- Okazawa, S., Usami, T., Noguchi, H. and Fujii, F. (2002a) : Three-Dimensional Necking Bifurcation in Tensile Steel Specimens, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 128, pp.479-486, 2002.
- 岡澤重信, 藤久保昌彦 (2002b) : 金属引張試験片の塑性不安定メカニズムに関する研究, 日本造船学会論文集, 第 192 号, pp.629-637,2002.
- 藤井文夫, 萩原伸幸, 三井和男, 滝論, 本間俊雄 (2003) : 非線形構造モデルの動的応答と安定性, コロナ社, 2003.