

塑性域の広がりを考慮した平面木骨組構造物の弾塑性解析

Elasto-plastic Analysis of Plane Timber Frame Structures Considering Spread of Plastic Portion

岩崎正二* ○佐々木寛幸** 山本亮*** 宮本裕****

IWASAKI Shoji, SASAKI Hiroyuki, YAMAMOTO Ryo and MIYAMOTO Yutaka

*博(工学) 岩手大学工学部建設環境工学科 (〒020-8551 盛岡市上田4丁目3-5)

**岩手大学大学院工学研究科 (〒020-8551 盛岡市上田4丁目3-5)

***博(工学) (株)昭和土木設計 (〒020-0891 紫波郡矢巾町流通センター南4丁目1-23)

****工博 岩手大学工学部建設環境工学科 (〒020-8551 盛岡市上田4丁目3-5)

ABSTRACT The purpose of this paper is to simulate the spread of plastic portion and the load-displacement relationship of plane timber frame structures which are imposed gradually increasing load. In order to do elasto-plastic analysis for plane timber frame structures, we introduce the stiffness matrix of wood beam element considering spread of plastic regions. From the result of the numerical calculation examples, the accuracy and the usefulness of this method is verified.

Keywords : 塑性域の広がり、平面木骨組構造物、弾塑性解析
spread of plastic portion, plane timber frame structures, elasto-plastic analysis

1. はじめに

今日、人々の地球環境への関心の高まりから、自然とのふれあいを求める傾向が強まる中で、橋梁に対しても単に強度、耐久性、経済性等だけでなく、周囲の環境との調和を保ちつつ美しい景観を提供するものが求められている。近年の木材加工技術の進歩に伴い、強度・品質の安定した長期耐久性に優れた構造用大断面集成材の製作が可能となったことにより、この集成材を木橋の主材料として使用することで、公園内の歩道橋等に限らず、25トン級の大型車が通る木車道橋にも集成材が積極的に採用されるようになってきた。しかし、我国における木橋に関する設計規準は、昭和15年内務省制定の「木道路橋設計示方書(案)」が残っているだけであり、近代木橋の設計に際しては、日本建築学会「木構造設計基準・同解説」や諸外国の設計法を参照している事例が多いようである。また、RC橋、PC橋などの一般橋梁の設計法が、これまでの許容応力度法から限界状態設計法に移行しつつある中で、土木学会木橋技術委員会でも、木橋の性能照査型設計指針の作成を目指した取り組みが現在行われている。なお、我国における木質構造の限界状態設計法に関する検討は、日本建築学会を中心に行われてきたが、日本建築学会ではそれらの成果を「木質構造限界状態設計指針(案)・同解説」¹⁾として出版している。このような現状を踏まえ、木橋などの木骨組構造物に限界状態設計法を適用するにあたり、その弾塑性挙動を明らかにし耐荷力を求めることは、極めて重要である。

著者らは文献²⁾で、平沢ら³⁾⁴⁾⁵⁾が鋼部材に適用するために誘導した弾塑性解析理論を木部材に適用することを試みた。そして、塑性域の広がりを考慮した木材梁要素の弾塑性剛性マトリックスを誘導するとともに、それらの公式を用いた数値計算例を示し、木材梁の弾塑性挙動と耐荷力を明らかにした。そこで本論文では、平面木骨組構造物の解析が出来るように、文献²⁾の木材梁要素の弾塑性剛性マトリックスを軸力項を考慮した公式に拡張した。そして、それらの公式を用いて、軸力の生じる簡単な平面木骨組構造物の数値計算例を示し、その耐荷力と塑性域の広がりについて検討する。本手法は、木骨組構造物において一部材一要素で解析可能であるため、塑性ヒンジ法と同様の利点を有するとともに、各部材の軸力、せん断力、曲げモーメントが求められれば直ちに塑性域を求めることが出来るといった簡便性を備えている。

2. 解析理論

薄木⁷⁾は木材において弾塑性解析を行うためには圧縮ひずみのひずみ軟化を考慮しなければならないものの、その程度は鋼などのひずみ軟化に比べて大きくないため、終局曲げ強さに及ぼす影響は少なく、材料強度特性のばらつき等を考えるならば、図-1に示すような圧縮側に対しては完全弾塑性性、引張側に対しては弾性とするbi-linear型の応力-ひずみ曲線を仮定する解法⁸⁾には十分根拠があると述べている。

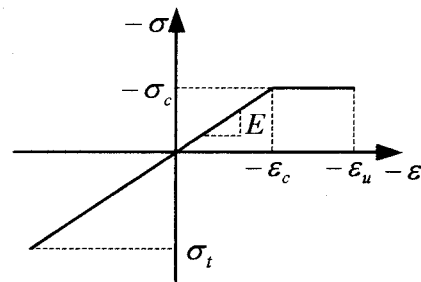


図-1 木材の応力-ひずみ曲線

また、著者らがJIS規格に基づき唐松材を用いて行った圧縮および引張破壊試験⁹⁾からも上記を裏付けるような試験結果が得られており、本論文においても、図-1に示すようなbi-linear型モデルを採用し、理論を展開していくものとする。

2.1 基本式誘導における仮定

基本式誘導に先立ち以下のような仮定を設定する。

- (1) 定式化するにあたり材料は図-1に示すような圧縮側で完全弾塑性モデル、引張側で弾性モデルとし、木材の圧縮ひずみに見られるようなひずみ軟化は考慮しないものとする。なお、図中の σ_c は圧縮強度、 σ_t は引張強度、 ϵ_c は降伏ひずみ、 ϵ_u は破壊ひずみ、 E は弾性係数を示す。
- (2) 木材梁の断面は二軸対称断面とし、Timoshenkoの仮定に基づき、曲げとせん断による変形を考慮するものとする。
- (3) 降伏および破壊は軸力と曲げモーメントの相互関係式⁶⁾により判別するものとし、せん断力による影響は無視する。
- (4) 部材における要素は弾性域では一定断面とし、塑性域においては降伏した部分を考慮しない変断面とする。

2.2 弾塑性状態の木部材

図-2(f)に示すような、幅 b 、高さ h の矩形断面を有する長さ l の木部材を考える。図-3に示すように部材左端(節点 i)から x の距離における断面の応力分布が図-2(b)のような弾塑性状態になったとする。ここで、 δh は弾塑性境界の位置を表している。すなわち、断面の高さが

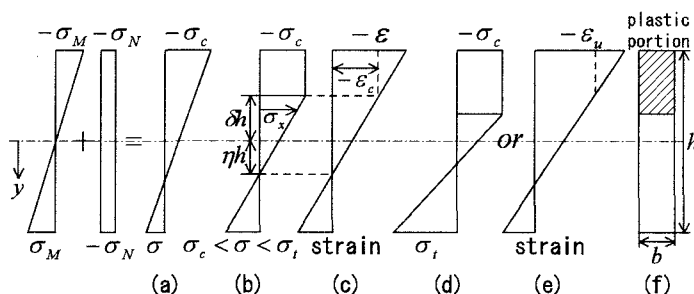


図-2 応力とひずみ分布の変化

$\delta \leq y/h \leq 0.5$ の範囲で弾性域、 $-0.5 \leq y/h \leq \delta$ の範囲で塑性域である。このとき、図-2(b)の応力分布から弾性域での応力、塑性域での応力 σ_x が次式で示される。

$$\sigma_x = \frac{\sigma_c(y/h - \eta)}{\eta - \delta} \quad (\delta \leq y/h \leq 0.5) \quad (1)$$

$$\sigma_x = -\sigma_c \quad (-0.5 \leq y/h \leq \delta) \quad (2)$$

ここで、 h は梁の高さ、 η は無次元化した断面重心から中心軸までの距離、 δ は無次元化した弾塑性境界の位置を表す。ただし、 η と δ は正負の符号を持つものとする。図-2(a)に示すよ

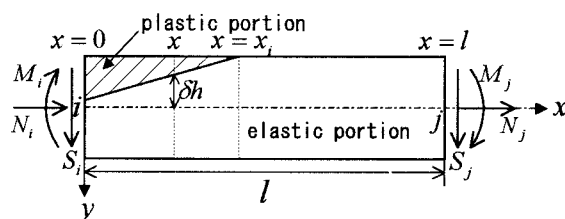


図-3 節点断面力と塑性域

うに、梁の上縁の応力度が圧縮強度 σ_c になるまで弾性状態であるが、さらに荷重を増分させると図-2(b)に示すように圧縮側断面で一部塑性状態に至り、引張側は弾性状態を維持する。さらに荷重が増えて、図-2(d)に示すように引張縁が引張強度 σ_t に到達した場合、もしくは図-2(e)に示すように圧縮縁が破壊ひずみ ε_u に到達した場合破壊に至る。任意断面に生じる軸力 N_x と曲げモーメント M_x は、図-2(b)の弾塑性状態に対して式(1)、(2)を用いると次式で示される。

$$N_x = \int_F \sigma_x dF = -\int_{-h/2}^{\delta h} \sigma_c b dy + \int_{\delta h}^{h/2} \frac{\sigma_c (y/h - \eta)}{\eta - \delta} b dy \quad (3)$$

$$M_x = \int_F \sigma_x y dF = -\int_{-h/2}^{\delta h} \sigma_c y b dy + \int_{\delta h}^{h/2} \frac{\sigma_c (y/h - \eta)}{\eta - \delta} y b dy \quad (4)$$

ここで、 F は断面積、 b は梁の幅である。

2.3 破壊相関曲線について

降伏および破壊の判別に用いる破壊相関曲線は、薄木らの理論⁶⁾に基づき式の展開を行うものとする。式(3)、(4)より軸力比 n 、曲げモーメント比 m はそれぞれ次式で示される。

$$n = \frac{N_x}{N_y} = \frac{(2\delta + 1)^2 - 8\eta}{8(\delta - \eta)}, \quad m = \frac{M_x}{M_y} = \frac{(\delta + 1)(2\delta - 1)^2}{4(\eta - \delta)} \quad (5)$$

ここで、 N_y は降伏軸力、 M_y は降伏曲げモーメントを表し、 $N_y = -\sigma_c b h$ 、 $M_y = \sigma_c b h^2 / 6$ である。式(5)の2式より η を消去すると、弾塑性状態における軸力と曲げモーメントの相互関係式が次式で表される。

$$m - 2(\delta + 1)(1 - n) = 0 \quad (6)$$

式(6)の無次元パラメータ δ に、弾性限界状態、引張破壊状態、圧縮破壊状態における条件式を代入することにより、図-4に示すような $m - n$ 破壊相関曲線を描くことが出来る。弾性限界、引張破壊、圧縮破壊における δ の条件式はそれぞれ次式で示される。

$$\delta = -\frac{1}{2}, \quad \delta = \frac{n_t + 4n - 3}{2(n_t + 1)}, \quad \delta = \frac{n_c - 2n + 1 + 2\sqrt{(1-n)(2n_c - n - 1)}}{2(n_c - 1)} \quad (7)$$

ここで、 $n_t = \sigma_t / \sigma_c$ 、 $n_c = \varepsilon_u / \varepsilon_c$ である。なお、図-4は $n_t = 2.0$ 、 $n_c = 3.0$ の場合の $m - n$ 破壊相関曲線である。図中、 m が負の場合の相関曲線は、右象限の図と対称となるため省略した。

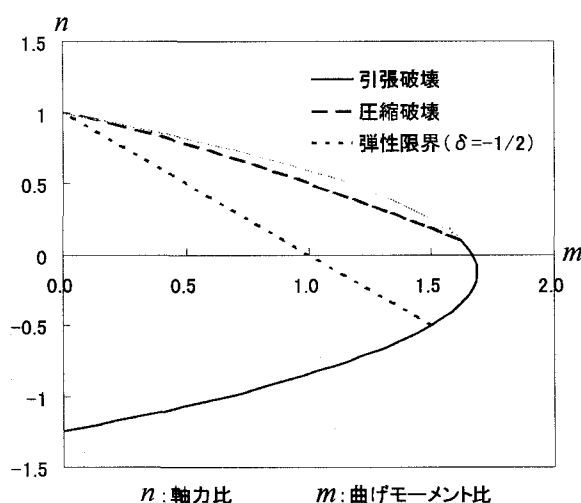


図-4 $m - n$ 破壊相関曲線

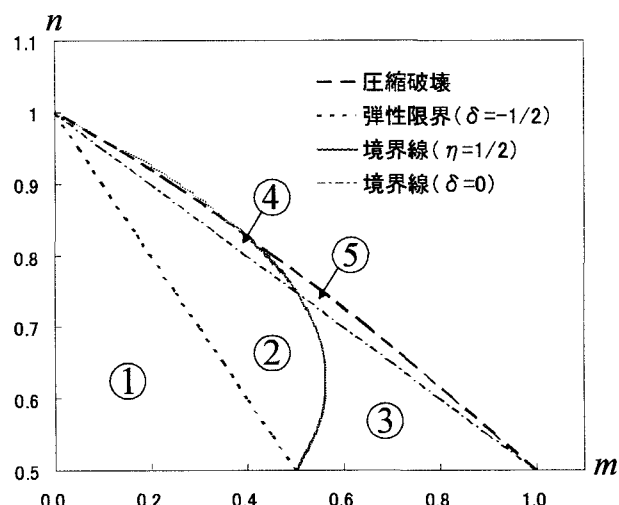


図-5 $n \geq 0.5$ の領域の拡大図

また、図-4中の軸圧縮力が大きく作用する $n \geq 0.5$ の領域において2つの境界線を用いることにより、図-5に示すように5つの領域に分けられる。境界線 $\eta = 1/2$ は、無次元化した断面重心から中心軸までの距離 η が下縁に達した場合の境界を表し、境界線 $\delta = 0$ は、無次元化した弾塑性境界の位置 δ が断面重心に達した場合を示している。図-5に示す①～⑤の各領域は、図-6に示すような①～⑤応力分布に対応している。

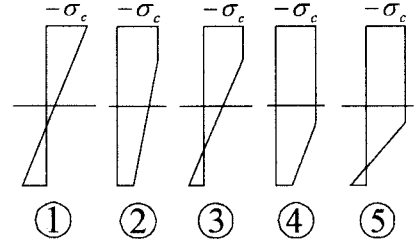


図-6 各領域の応力分布

2.4 塑性域の広がりを考慮した木材梁要素の弾塑性剛性マトリックスの誘導

本論文では、図-7に示すように矢印方向を正とした材端力と材端変位を定義した。この部材の左端(節点 i)に作用している軸力を N_i 、せん断力を S_i 、曲げモーメントを M_i とおき、中間荷重が作用しないものと仮定すれば、左端から x の距離における断面の曲げモーメント M_x 、軸力 N_x は次式で示される。

$$M_x = M_i - S_i x, \quad N_x = -N_i \quad (8)$$

式(6)、(8)より M_x を消去してまとめると無次

元化した弾塑性境界の位置 δ は次式のように x の1次式で示される。

$$\delta = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{S_i}{M_y(1-n_i)} x + 2 - \frac{M_i}{M_y(1-n_i)} \right\} \quad (9)$$

ここで、 $n_i = -N_i/N_y$ である。さらに、弾性限界の条件式 $\delta = -1/2$ を代入すると図-3に示すように、部材左端からの塑性化した距離 x_i が次式で示される。

$$x_i = \frac{M_i - M_y(1-n_i)}{S_i} \quad (10)$$

$x_i \geq 0$ のとき塑性化が始まるので、塑性化判別式として次式が得られる。

$$M_i \geq M_y(1-n_i) \quad (11)$$

従って、塑性域の広がりに伴う部材の剛性の低下を断面2次モーメントと断面積の減少としてとらえると、 $0 \leq x \leq x_i$ の断面2次モーメント I_x 、断面積 A_x はそれぞれ次式で示される。

$$I_x = \int_{\delta h}^{h/2} y^2 b dy = \frac{I}{2} (1 - 8\delta^3), \quad A_x = \int_{\delta h}^{h/2} b dy = \frac{A}{2} (1 - 2\delta) \quad (12)$$

ここで、 $I = bh^3/12$ 、 $A = bh$ である。また、補仮想仕事の原理を用いて剛性マトリックスを定式化³⁾すると次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ S_i \\ M_i \\ N_j \\ S_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_d} \begin{bmatrix} E_d/H & 0 & 0 & -E_d/H & 0 & 0 \\ & D & -C & 0 & -D & E_a \\ & & B & 0 & C & E_b \\ & & & E_d/H & 0 & 0 \\ sym. & & & & D & -E_a \\ & & & & & E_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここで、 u_i 、 v_i 、 θ_i 、 u_j 、 v_j 、 θ_j は、それぞれ i 端、 j 端の水平変位、たわみ、たわみ角を表す。なお、剛性マトリックスの成分は以下の式で示される。

$$B = \int_0^l \frac{x^2}{EI_x} dx + \kappa \int_0^l \frac{1}{GA_x} dx, \quad C = -\int_0^l \frac{x}{EI_x} dx, \quad D = \int_0^l \frac{1}{EI_x} dx, \quad H = \int_0^l \frac{1}{EA_x} dx,$$

$$E_a = Dl + C, \quad E_b = -Cl - B, \quad E_c = Dl^2 + 2Cl + B, \quad E_d = BD - C^2 \quad (14)$$

2.5 弾塑性状態の判別と塑性パターンの種類

部材要素の弾性、弾塑性、破壊状態の判別は、各荷重段階において*i*端の N_i と M_i 、*j*端の N_j と M_j が、 $m-n$ 破壊相関曲線図のどこに分布しているかによって判断する。また、塑性パターンは全部で12種類ある。図-8(a)は、左端上部に x_i の塑性域の広がり、右端下部に x_j の塑性域の広がりが生じているパターン

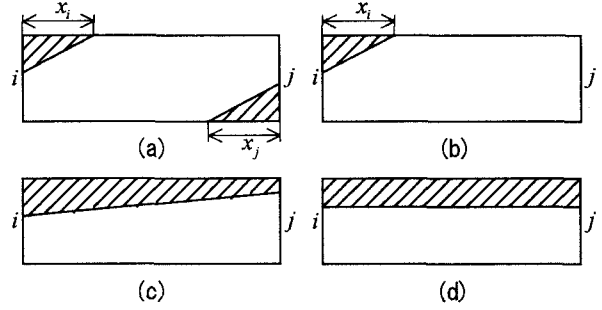


図-8 塑性パターン

ンである。その他に、左端下部と右端上部に塑性域が広がる場合がある。同様に対称性を考慮すると図-8(b)では4パターン、図-8(c)では4パターン、図-8(d)では2パターン存在することとなる。12種類の塑性パターンの選択については、各荷重段階において木材梁要素の両節点の断面力の大小関係および正負関係を用いて塑性パターンを判別する。

ここでは、図-8(b)となる部材要素について断面2次モーメント I_x および断面積 A_x を求めると、式(12)に式(9)を代入することにより次式が得られる。

$$I_x = \frac{I}{2} \left\{ \frac{S_i}{M_y(1-n_i)} x + 3 - \frac{M_i}{M_y(1-n_i)} \right\} \left[\left\{ \frac{S_i}{M_y(1-n_i)} \right\}^2 x^2 + \left\{ 3 - 2 \frac{M_i}{M_y(1-n_i)} \right\} \frac{S_i}{M_y(1-n_i)} x + \left\{ \frac{M_i}{M_y(1-n_i)} \right\}^2 - 3 \frac{M_i}{M_y(1-n_i)} + 3 \right] \quad (0 \leq x \leq x_i) \quad (15)$$

$$I_x = I \quad (x_i \leq x \leq l) \quad (16)$$

$$A_x = \frac{A}{2} \left\{ \frac{S_i}{M_y(1-n_i)} x + 3 - \frac{M_i}{M_y(1-n_i)} \right\} \quad (0 \leq x \leq x_i) \quad (17)$$

$$A_x = A \quad (x_i \leq x \leq l) \quad (18)$$

式(15)、(16)、(17)、(18)を式(14)に代入し、 B 、 C 、 D 、 H を求めることにより、部材要素の剛性マトリックスを得ることが出来る。 B 、 C 、 D 、 H は計算結果のみ示すと次式のようなになる。

$$B = \frac{1}{3EI} q^3 \left\{ 2(3-p^2) \ln \frac{2}{3-p} + (p^2 - 6p + 6) \ln |p^2 - 3p + 3| + 2\sqrt{3}p(p-2) \right. \\ \left. \times \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} - \tan^{-1} \frac{3-2p}{\sqrt{3}} \right) \right\} + \frac{2\kappa}{GA} q \ln \frac{2}{3-p} + \frac{1}{3EI} (l^3 - x_i^3) + \frac{\kappa}{GA} (l - x_i) \quad (19)$$

$$C = -\frac{1}{3EI} q^2 \left\{ -(3-p) \ln \frac{4|p^2 - 3p + 3|}{(3-p)^3} + 2\sqrt{3}(p-1) \right. \\ \left. \times \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} - \tan^{-1} \frac{3-2p}{\sqrt{3}} \right) \right\} - \frac{1}{2EI} (l^2 - x_i^2) \quad (20)$$

$$D = \frac{1}{3EI} q \left[\ln \frac{4|p^2 - 3p + 3|}{(3-p)^2} + 2\sqrt{3} \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} - \tan^{-1} \frac{3-2p}{\sqrt{3}} \right) \right] + \frac{1}{EI} (l - x_i) \quad (21)$$

$$H = \frac{2}{EA} q \ln \frac{2}{3-p} + \frac{1}{EA} (l - x_i) \quad (22)$$

ここで、 $p = M_i / \{M_y(1 - n_i)\}$ 、 $q = M_y(1 - n_i) / S_i$ である、その他の塑性パターンについても同様に計算することが出来るが、本論文では省略する。

3. 数値計算例

第2章で誘導した剛性マトリックスは、剛性マトリックスの成分に節点断面力を含んだ非線形方程式となっているため、数値解析手法としては、増分法に荷重増分法を用い、それぞれの増分に対して逐次近似法を用いて反復計算を行った。

本解析手法の有効性を確認するために、数値計算例として、矩形断面を持つ梁モデルと門形ラーメンモデルの2通りについて弾塑性解析を行った。それらの解析結果から平面骨組構造物の耐荷力と塑性域の広がりについて検討した。なお、解析に用いたモデルの材料特性値は、平成12年に著者らが行った唐松材の静的破壊試験⁹⁾より得られた値とし、表-1に示す数値を用いた。

表-1 材料特性値

σ_c : 圧縮強度 (N/mm ²)	47.5
σ_t : 引張強度 (N/mm ²)	81.8
E : 弾性係数 (N/mm ²)	9560
G : せん断弾性係数 (N/mm ²)	1130
n_c : ひずみ比	3.0

3.1 梁モデル

解析するモデルとしては、図-9に示すような軸力と曲げモーメントを受ける梁モデルを取り上げ解析を行った。最初に、スパン全体に作用する軸力と曲げモーメントの変化による耐荷力や破壊状態の違いを検討する。スパン中央点の集中荷重を0とし、支点上柱部材上端に水平荷重 P を載荷させ、支点上柱部材の長さ y を100、200、300mmと3通り変化させた場合についての解析を行った。次に、塑性域の進展の違いを検討するために、支点上柱部材の長さ y を300mmと固定し、支点上柱部材上端から水平荷重 P を作用させた上に、スパン中央点に $0.5P$ 、 P の集中荷重を載荷する2ケースの解析を行った。なお、梁部材と柱部材の断面形状は100×100mmの正方形断面とし、スパンは1000mmである。解析モデルの節点数は5、要素数は4とし、図-9中に節点番号を示す。

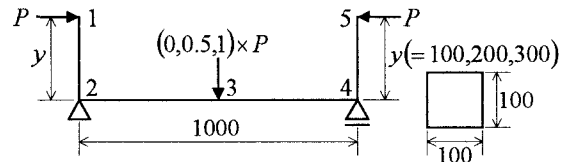


図-9 梁モデル (単位: mm)

以上の条件を用いて梁モデルの数値計算を行った結果、図-10に示すような荷重-たわみ曲線が得られた。最初に、支点上柱部材の長さ y を変化させた3ケースについて比較すると、破壊状態、破壊荷重において大きな違いが見られた。スパン全体にわたって作用する曲げモーメントが最も小さい $y=100$ mmのケースは、圧縮縁のひずみが破壊ひずみに到達したことによる圧縮破壊であったが、他の2ケースは引張による脆性破壊を示した。また破壊荷重は、図-10に示すように、圧縮破壊を起こした

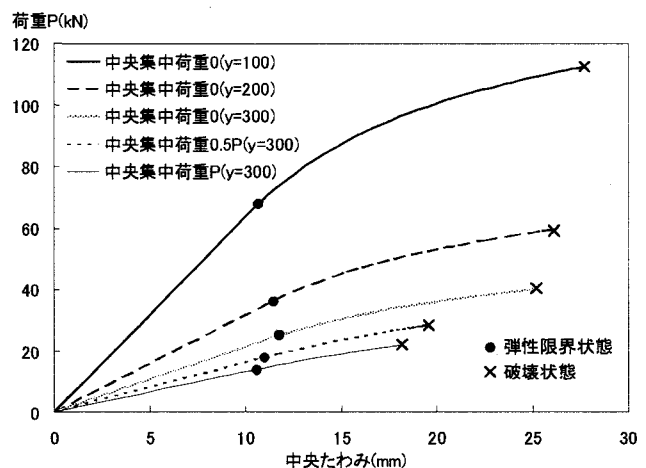


図-10 梁モデルの荷重-たわみ曲線

$y=100\text{mm}$ のケースが他の2ケースの1.9～2.8倍であることがわかった。次に、支点上柱部材の長さ y を 300mm に固定し、スパン中央点の集中荷重を 0 、 $0.5P$ 、 P と変化させた3ケースについて比較する。中央集中荷重が 0 のケースが、弾性限界状態および破壊状態において荷重、中央たわみともに最も大きい値となった。図-11はスパン中央点の集中荷重を 0 、 $0.5P$ 、 P とした3ケースの破壊時における塑性域の広がり方を示している。図中の P は破壊荷重、 X はスパン方向の塑性域進展長さ、 Y_2 、 Y_3 、 Y_4 は各節点の高さ方向の塑性域進展長さを表している。なお、点線で表された円は破壊節点を示している。3ケースを比較すると、柱の水平荷重に対するスパン中央点の集中荷重の割合を大きくすることにより、スパン方向の塑性域の進展が中央近傍に集中していくことがわかる。

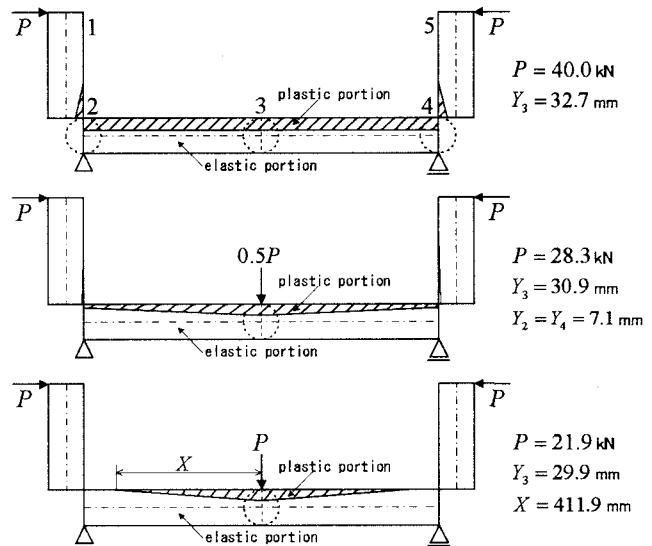


図-11 梁モデルの破壊時における塑性域の広がり

3.2 門形ラーメンモデル

門形ラーメンモデルは、図-12に示すように節点3に集中荷重 P を載荷させ、節点2に 0 、 $0.5P$ 、 P の水平荷重を載荷する3ケースを比較検討した。なお、断面形状は $100\times 100\text{mm}$ の正方形断面とし、スパンは 1000mm である。解析モデルの節点数は5、要素数は4とし、図-12中に節点番号を示す。

以上の条件を用いて数値計算を行った結果、節点3に着目すると、図-13に示すような荷重-変位曲線が得られた。破壊状態は、すべてのケースにおいて引張による脆性破壊であった。各ケースを比較すると、荷重、たわみともに、水平荷重が 0 のケースが弾性限界状態および破壊状態において最も大きい値となった。また、すべてのケースにおいて、荷重-変位曲線は破壊状態に到達するまで直線的な変化を示している。このことから、弾塑性状態時の荷重-変位関係に対して、塑性域の進展は大きな影響を与えないことがわかった。図-14は破壊時における塑性域の広がり方を示したものである。なお、点線で表した円は破壊節点を示している。水平荷重を載荷させることにより、塑性域の進展の違いだけでなく、破壊節点にも違いが見られた。すなわち、水平荷重 $0.5P$ のケースは破壊節点が3、水平荷重 P のケースは破壊節点が5となった。

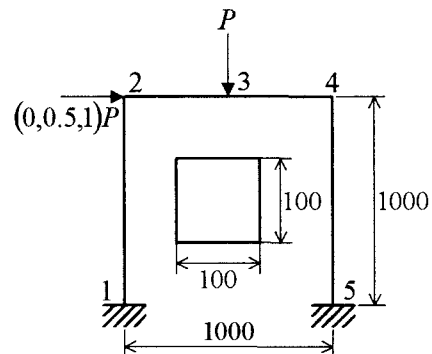


図-12 門形ラーメンモデル (単位: mm)

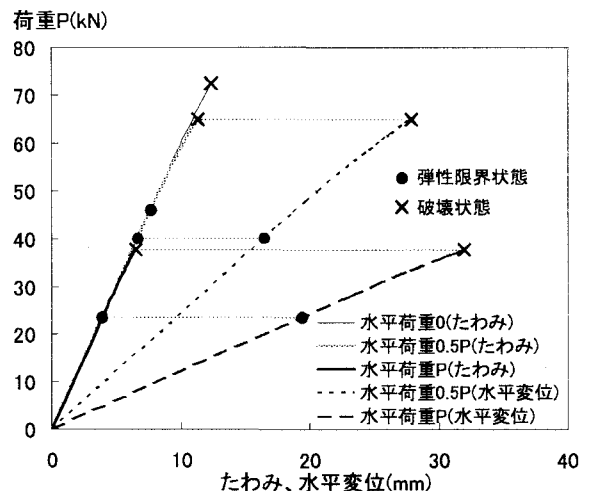


図-13 門形ラーメンモデルの荷重-変位曲線

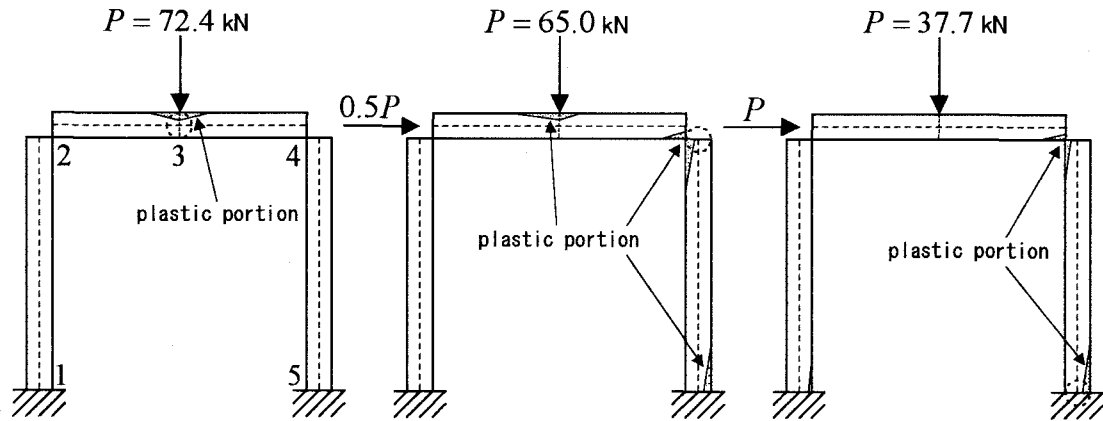


図-14 門形ラーメンモデルの破壊時における塑性域の広がり

4. おわりに

本論文では、塑性域の広がりを考慮した木材梁要素の弾塑性剛性マトリックスを誘導し、それらの公式を用いて、軸力の生じる簡単な平面木骨組構造物の弾塑性解析を行った。それらの数値解析結果から、平面木骨組構造物の荷重-変位曲線と破壊時における塑性域の広がりについて明らかにした。本論文の梁モデルと門形ラーメンモデルの解析結果から、本解析手法が平面木骨組構造物の弾塑性解析に十分適用可能であることがわかった。今後は本解析手法の実用性を証明するために、解析例を増やすとともにFEM解析等の解法との比較を行いたいと考えている。

今回は、降伏条件および破壊条件を曲げモーメントと軸力の相関曲線によって判断した。今後、大断面集成材を用いた木橋に本解析手法を適用していくにあたり、梁せいスパン比 h/l (h : 梁せい、 l : スパン) が大きくなった場合、せん断による破壊も無視出来なくなると思われる。従って、せん断破壊を考慮した解析法を確立させることが、今後の検討課題として考えられる。

参考文献

- 1) 日本建築学会：木質構造限界状態設計指針（案）・同解説、2003.
- 2) 岩崎正二・山本亮・出戸秀明・佐藤和也・宮本裕：塑性域の広がりを考慮した木材はりの弾塑性解析、構造工学論文集、Vol.48A, pp.1139-1145, 2002.
- 3) 平沢秀之・林川俊郎・佐藤浩一：塑性域の広がりを考慮したはりの一弾塑性解析、構造工学論文集、Vol.41A, pp.1-8, 1995.
- 4) 平沢秀之・林川俊郎・佐藤浩一：曲げと曲げねじりによるI型断面部材の相関曲線と塑性域、鋼構造年次論文報告集、第3巻、pp.349-354, 1995.
- 5) 平沢秀之・林川俊郎・佐藤浩一・植木広行：組合せ応力を受ける部材の弾塑性域の相関曲線について、鋼構造年次論文報告集、第4巻、pp.265-271, 1996.
- 6) 亀井義典・長谷部薫・薄木征三：曲げと軸力を受けるひずみ軟化部分の相互作用曲線、土木学会東北支部技術研究発表会講演概要、I-21、pp.40-41, 1988.
- 7) 長谷部薫・薄木征三：曲げとせん断を受けるひずみ軟化はりの弾塑性変位解析、土木学会論文集、第410号/I-12、pp.351-358, 1989.
- 8) 今俊三：木材の曲げ破損法則について、北海道大学工学部研究報告、pp.1-28, 1949.
- 9) 山本亮・佐藤和也・宮本裕・岩崎正二・出戸秀明・五郎丸英博：静的破壊試験による集成材ラミナの材料強度特性について、土木学会東北支部技術研究発表会講演概要、I-18、pp.36-37, 2000.