

第 6 章

膜の形態解析

ケーブル構造と同様に、面で構成される膜構造においても、張力により成立する形態を見出す形態解析は常に必要である。この章の目的は、等張力により成立する膜の形態解析を具体的に示すことであるが、その前に膜構造の理解に参考になればと考え、6.1 節では建築の分野でその地位を確立している膜構造を思い付くままに概説する。6.2 節の膜の形態解析では、等張力膜が最小曲面であるため変分問題としての扱いもあるが、本章では等張力による力のつり合いに基づく解析を紹介する。6.3 節では、アイデアも含め膜構造の用途からその可能性に触れておく。

6.1 概説

図 6.1(a) は片持梁、(b) は門形ラーメンである。図の形をそのまま現実に再現することができる。軸力や曲げに対する抵抗能力のある鉄筋コンクリートや鉄という構造材料の使用や自重程度の荷重では形状の変化が無視できることを前提にするからである。しかし、曲げや圧縮抵抗のない糸で図 6.1 の形を作ることはできない。引張抵抗しか期待できない糸は、張力による安定形態を初期形態にする必要がある。図 6.2(a) の部材配置は張力で力のつり合いは満足できない。張力の作用下では図 (b) の形態でしか力のつり合い (自己つり合い形状) は成立し得ない。すなわち、糸のような構造材料である単一ケーブルに張力が作用すれば直線が基本形である。自重も考慮すると懸垂線 (カテナリー) になる。ケーブル材の利用においては、工学的に意味のある安定形態が張力や自重という力に依存することを理解できる。同じ引張材である布材においても同様である。図 6.3(a) に円筒を示す。いま張力の導入を考えると、上下方向に力がつり合うが、円周方向は中心向きに合力が残る。張力による不つり合い力である。この内向きの不つり合い合力を打ち消すには、上下方向の窪みによる外向きの合力が必要である。図 6.3(b) の形態である。この曲面は回転懸垂面 (カテノイド) であり、局所的には鞍形面である。この鞍形面が張力による布材の基本形態である。本章の目的は、境界形状と張力によって決

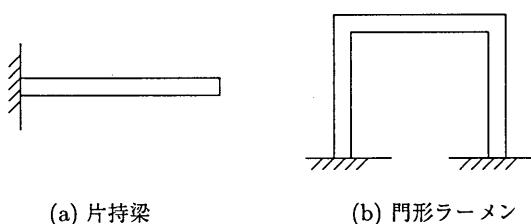


図 6.1: 片持梁と門形ラーメン

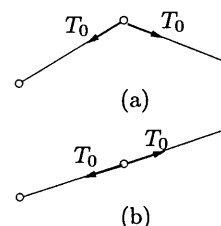


図 6.2: トラスの自己つり合い形状

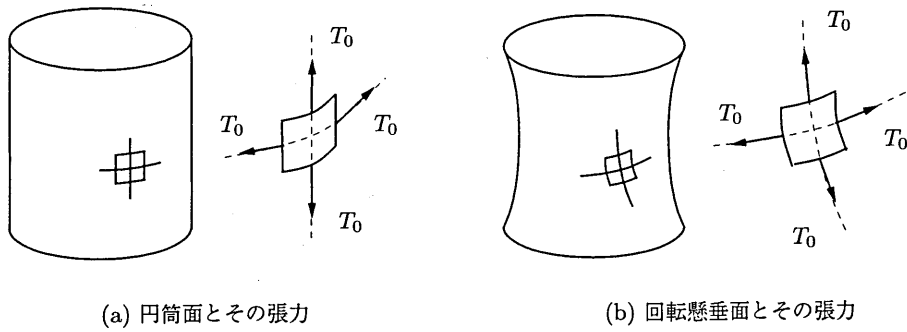


図 6.3: 張力膜の基本形態

まる膜の基本形態である等張力曲面を求める解析を紹介することである。

ところで、恒久建築物の一つとしてその地位を確立している膜構造であるが、その歴史は古くない。多少の概説を以下に示す。

膜構造の発展は、Frei Otto(フライ・オットー)と彼が活動拠点とした IL(ドイツ、シュツットガルト大学軽量構造研究所の略称)抜きには語れない。1967 年モントリオール博の西ドイツ館により、Otto は技術と思想も含め近代建築構造として力強く世界に膜構造を発信している³⁾。

等張力膜面は極小曲面である。この極小曲面は石けん膜や 2 方向ネット模型から実験的に見出すことができる。任意境界に張った石けん膜が表面張力の原理により極小曲面になるからである。この極小曲面を求める問題を Plateau(プラトー)問題と呼ぶこともある(石けん膜の曲面幾何の研究が Plateau 問題と呼ばれるためである)。2 方向ネット模型の実験では 2 方向の張力比を変えて等張力以外の曲面を得ることもできる。1972 年ミュンヘンオリンピック競技場のケーブルネット屋根形状は模型実験に拠っている。しかし進歩する計測技術を前提にしても、実験による極小曲面を得るには困難が多く、今日では計算機を利用して極小曲面を求めることが一般的である。この極小曲面の誘導に関しては、すでに Lagrange(ラグランジェ)が極小曲面方程式と呼ばれる次式を与えている。

$$(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} = 0 \tag{6.1}$$

添字はその変数による偏微分を意味する。上式は与えた平面上の境界を $z = z(x, y)$ で張る曲面が面積最小になる必要条件であり、その解はすべて極小曲面となる。ただし、 x, y, z を共に未知量とする場合に比べ、曲面を $z = z(x, y)$ で定義し、平面上の 1 つの座標点 (x, y) に対し座標 z を 2 個以上もつような曲面や境界が固定されていない問題を扱うときの不自由さもあり、上式を利用する数値解析は膜構造設計では一般的でない。もし偏平な曲面であれば、 z_x, z_y の項の影響は小さいと期待できる。この微小項を消去すると極小曲面方程式は Laplace 方程式になる。

いま、曲面のひずみを ϵ 、等張力を N_0 とすれば、曲面のひずみエネルギーが次式で定義できる。

$$\Pi(x, y, z) = \int N_0 \epsilon dS \tag{6.2}$$

この汎関数の停留値が等張力曲面であるとし、有限要素法で離散化する定式化が実用されている。ひずみ ϵ には Green ひずみ等を用い、得た変位から曲面形態を更新する。この変位が解析終了時には等張力を満足する曲面座標 x, y, z を与える。 x, y, z が変数である。このときの非線形解析に必要な収束性の改良に関する提案は今日も行われている。

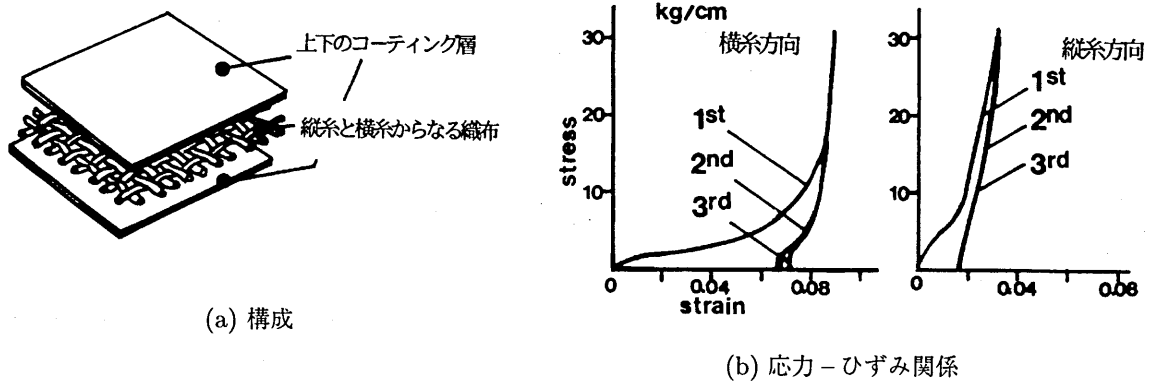


図 6.4: 膜材料

図 6.3(a) で示した円筒曲面は可展開曲面である。すなわち、母線(上下)方向をはさみで切断すれば平面に展開することができる。一方、鞍形面は平面に展開できないので、平面状の膜材料を裁断し繋ぎ合わせ、張力導入状態でしわの生じない曲面を合理的に得るための裁断解析が必要になる。また、一般的な膜材料は図 6.4(a) で示すように平織した織布をコーティングして作られているため、材料非線形性や粘弾性の影響も無視できない。例えば、縦糸と横糸方向を等張力で引張ったときに得られる応力とひずみの関係を図 6.4(b) に示す。材料非線形性が顕著である。図中 1st, 2nd, 3rd は载荷を 3 回繰り返したことを意味している。耐久性、耐火性に優れた膜材料の開発が恒久建築物として膜構造を可能としたのである。ここではその内容には触れないが、ケーブルや膜の形状解析においては動的弛緩法 (Dynamic Relaxation Method) や線形式を扱う応力密度法 (Force Density Method) も有力な手法として、特に欧州では利用されている。

なお、膜構造に関する学術的情報は、1987 年以後、(社)日本膜構造協会より毎年発行の膜構造研究論文集から広く得ることができる。

6.2 膜の形態解析

以下に有限要素法による膜の形態解析を示す。式 (6.2) のように曲面のひずみエネルギーを利用して極小曲面を求める変分問題ではなく、等張力による力のつり合い問題とする立場の形態解析⁵⁾を引用したものである。

6.2.1 有限要素の幾何

膜面を三角形要素に分割する。図 6.5(a) に示すように要素平面上に y^α ($\alpha = 1, 2$) 軸をとる。頂点を (1),(2),(3) で示せば、 y^2 は辺 (2)(3) に平行であり、 y^1 は y^2 に直交している。 y^α 方向に単位ベクトル a^α をとる。単位法線ベクトル a^3 は、 a^1, a^2, a^3 が右手系をなすようにとる。図 6.5(b) は三角形要素の全体座標系 $O-x_1, x_2, x_3$ に対する位置を示す。 e_i ($i = 1, 2, 3$) は単位ベクトルである。なお、ギリシャ文字 α, β, \dots などの添字は要素平面に設けた座標に用い、全体座標系の添字 i, j, \dots などのローマ字と区別している。

図 6.5(b) より、節点の位置ベクトル $r(n)$ を

$$r(n) = x_i(n)e_i \quad (6.3)$$

で表す。辺ベクトル $l(n)$ を

$$l(n) = l_i(n)e_i \quad (6.4)$$

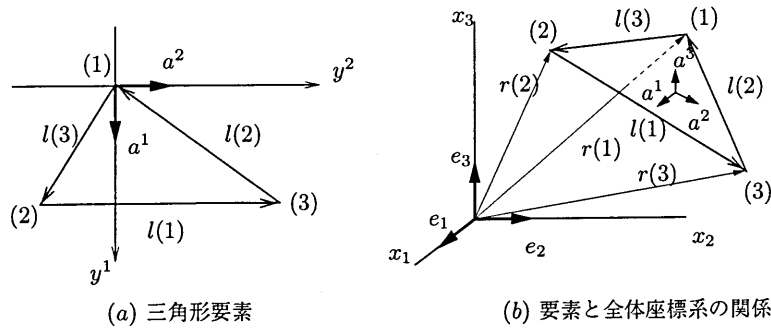


図 6.5: 三角形有限要素と座標系

で表すと、図から分かるように $l_i(n)$ と $x_i(n)$ の間には次の関係がある。

$$l_i(1) = x_i(3) - x_i(2), \quad l_i(2) = x_i(1) - x_i(3), \quad l_i(3) = x_i(2) - x_i(1) \quad (6.5)$$

ベクトル $l(n)$ の長さ $l(n)$ は

$$l(n) = \|l(n)\| = [l_i(n)l_i(n)]^{1/2} \quad (6.6)$$

三角形要素 (1)(2)(3) の面積ベクトルを $A/2$ とすると

$$A = l(2) \times l(3) = \epsilon_{ijk} l_j(2) l_k(3) e_i = A_i e_i \quad (6.7)$$

ここに、

$$A_i = \epsilon_{ijk} l_j(2) l_k(3) \quad (6.8)$$

ただし、 ϵ_{ijk} は Eddington (エディントン) の記号である。要素面積を $A/2$ とすると、

$$A = \|A\| = [A_i A_i]^{1/2} \quad (6.9)$$

である。 A は三角形要素の面積の 2 倍である。以上を準備として、 (a^1, a^2, a^3) と (e^1, e^2, e^3) の関係が次式で得られる。

$$a^\alpha = \lambda_i^\alpha e_i, \quad a^3 = \lambda_i^3 e_i \quad (6.10)$$

ただし、

$$\lambda_i^1 = \epsilon_{ijk} \lambda_j^2 \lambda_k^3, \quad \lambda_i^2 = l_i(1)/l(1), \quad \lambda_i^3 = A_i/A \quad (6.11)$$

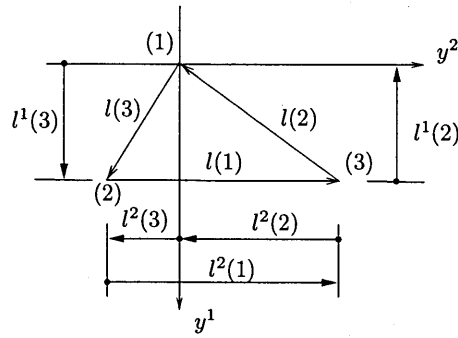
いま、任意ベクトル v の成分を全体座標と要素座標で次のように表したとき

$$v = v_i e_i = v^\alpha a^\alpha + v^3 a^3 \quad (6.12)$$

ベクトル成分の変換は方向余弦 $\lambda_i^\alpha, \lambda_i^3$ を用いて次式で行える。

$$v^\alpha = \lambda_i^\alpha v_i, \quad v^3 = \lambda_i^3 v_i \quad (6.13)$$

$$v_i = \lambda_i^\alpha v^\alpha + \lambda_i^3 v^3 \quad (6.14)$$

図 6.6: 辺ベクトルの y^1, y^2 軸への射影成分

辺ベクトル $\ell(n)$ の y^1, y^2 軸への射影を考える。図 6.6 に示すように、例えば、 $\ell(3)$ の y^2 への射影を $\ell^2(3)$ と書くことにすれば、このとき次式が成立する。

$$\ell^\alpha(n) = \ell(n) \cdot a^\alpha = \ell_i(n) \lambda_i^\alpha \quad (6.15)$$

図 6.6 から明らかなように

$$\ell^\alpha(1) + \ell^\alpha(2) + \ell^\alpha(3) = 0 \quad (6.16)$$

の関係が成立している。

6.2.2 適合関係

三角形要素内の任意点 (y^1, y^2) に生じる増分変位を $\Delta u^\alpha, \Delta u^3$ とし、節点 (n) の増分変位成分を $\Delta u^\alpha(n), \Delta u^3(n)$ とする。いま節点 (1) を原点、かつ $\Delta u^\alpha, \Delta u^3$ は要素内で線形変化すると仮定すれば次式が成立する。

$$\Delta u^\alpha - \Delta u^\alpha(1) = (\partial^1 \Delta u^\alpha) y^1 + (\partial^2 \Delta u^\alpha) y^2 \quad (6.17)$$

$$\Delta u^3 - \Delta u^3(1) = (\partial^1 \Delta u^3) y^1 + (\partial^2 \Delta u^3) y^2 \quad (6.18)$$

ただし、

$$\partial^\alpha () = \frac{\partial ()}{\partial y^\alpha} \quad (6.19)$$

節点 (2), (3) の座標値は図 6.6 より

$$y^1(2) = \ell^1(3), \quad y^2(2) = \ell^2(3) \quad (6.20)$$

$$y^1(3) = \ell^1(3), \quad y^2(3) = -\ell^2(2) \quad (6.21)$$

である。

式 (6.20), (6.21) を式 (6.17) に代入し、連立方程式を解けば、結果として次式が得られる。

$$\partial^1 \Delta u^\alpha = \sum_{m=1}^3 b^1(m) \Delta u^\alpha(m), \quad \partial^2 \Delta u^\alpha = \sum_{m=1}^3 b^2(m) \Delta u^\alpha(m) \quad (6.22)$$

$$\text{ただし,} \quad b^1(m) = \frac{-\ell^2(m)}{\ell^1(3)\ell^2(1)}, \quad b^2(m) = \frac{\ell^1(m)}{\ell^1(3)\ell^2(1)} \quad (6.23)$$

$\ell^1(1)$ は零であるが, 上式 (6.22) では $\ell^1(1)$ を含めて整理している. 式 (6.22) は1つの式で表現できる. すなわち,

$$\partial^\beta \Delta u^\alpha = \sum_{m=1}^3 b^\beta(m) \Delta u^\alpha(m) \quad (6.24)$$

同様にして, 式 (6.20), (6.21) を式 (6.18) に代入して $\partial^\beta \Delta u^3$ を求めると次式を得る.

$$\partial^\beta \Delta u^3 = \sum_{m=1}^3 b^\beta(m) \Delta u^3(m) \quad (6.25)$$

増分ひずみ $\Delta \varepsilon^{\alpha\beta}$ の定義は,

$$\Delta \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial^\alpha \Delta u^\beta + \partial^\beta \Delta u^\alpha) \quad (6.26)$$

上式に式 (6.24) を代入すれば, 増分ひずみの節点変位による表現が得られる. すなわち

$$\Delta \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 b^\alpha(m) \Delta u^\beta(m) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 b^\beta(m) \Delta u^\alpha(m) \quad (6.27)$$

増分ひずみと面積増加 ΔA は次式で関係付けられる.

$$\Delta A/A = \Delta \varepsilon^{11} + \Delta \varepsilon^{22} = \Delta \varepsilon^{\mu\mu} \quad (6.28)$$

上式に式 (6.27) を代入すると

$$\Delta A = A \sum_{m=1}^3 b^\mu(m) \Delta u^\mu(m) \quad (6.29)$$

図 6.7(a) より, y^3 軸に関する回転 $\Delta \omega^3$ は

$$\Delta \omega^3 = \frac{1}{2} (\partial^1 \Delta u^2 - \partial^2 \Delta u^1) = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} (\partial^\alpha \Delta u^\beta) \quad (6.30)$$

ただし, $e^{\alpha\beta}$ は2次元の Eddington 記号で, $e^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta 3}$ を意味する. y^1, y^2 軸に関する回転を, それぞれ $\Delta \omega^1, \Delta \omega^2$ で表すと, 図 6.7(b) より

$$\Delta \omega^1 = \partial^2 \Delta u^3, \quad \Delta \omega^2 = -\partial^1 \Delta u^3 \quad (6.31)$$

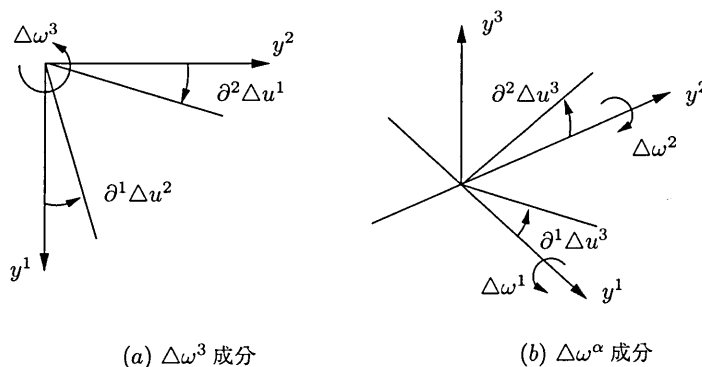


図 6.7: 回転成分

上記の2式は次式に整理できる.

$$\Delta\omega^\alpha = e^{\alpha\beta}(\partial^\beta \Delta u^3) \quad (6.32)$$

式(6.24)を用いて式(6.30)と(6.31)の右辺を節点変位で表現すると,

$$\Delta\omega^3 = \frac{1}{2}e^{\alpha\beta} \sum_{m=1}^3 b^\alpha(m)\Delta u^\beta(m) \quad (6.33)$$

$$\Delta\omega^\alpha = e^{\alpha\beta} \sum_{m=1}^3 b^\beta(m)\Delta u^3(m) \quad (6.34)$$

全体座標系の変位 $\Delta u_r(m)$ や回転成分 $\Delta\omega_p$ は, 式(6.13), (6.14)より, 要素座標系成分との間に次式で関係付けられる.

$$\Delta u^\alpha(m) = \lambda_r^\alpha \Delta u_r(m), \quad \Delta u^3(m) = \lambda_r^3 \Delta u_r(m) \quad (6.35)$$

$$\Delta u_r(m) = \lambda_r^\alpha \Delta u^\alpha(m) + \lambda_r^3 \Delta u^3(m) \quad (6.36)$$

$$\Delta\omega^\alpha = \lambda_p^\alpha \Delta\omega_p, \quad \Delta\omega^3 = \lambda_p^3 \Delta\omega_p \quad (6.37)$$

$$\Delta\omega_p = \lambda_p^\alpha \Delta\omega^\alpha + \lambda_p^3 \Delta\omega^3 \quad (6.38)$$

便宜上, 式(6.38)の右辺を次式で表現しておく.

$$\Delta\omega_p^{(\alpha)} = \lambda_p^\alpha \Delta\omega^\alpha, \quad \Delta\omega_p^{(3)} = \lambda_p^3 \Delta\omega^3 \quad (6.39)$$

方向余弦の増分 $\Delta\lambda_i^\alpha, \Delta\lambda_i^3$ と節点(n)における増分変位 $\Delta u_r(n)$ の関係を導く. まず, $\Delta\lambda_i^3$ は法線ベクトルの回転であるから, $\Delta\omega_p^{(\alpha)}$ と λ_p^3 のベクトル積で与えられる. つまり

$$\Delta\lambda_i^3 = \epsilon_{ipq} \Delta\omega_p^{(\alpha)} \lambda_q^3 \quad (6.40)$$

$\Delta\lambda_i^\alpha$ は $\Delta\omega_p$ と λ_q^α とのベクトル積であり,

$$\Delta\lambda_i^\alpha = \epsilon_{ipq} \Delta\omega_p \lambda_q^\alpha \quad (6.41)$$

式(6.40)には式(6.39), (6.34), (6.35)を, 式(6.41)に式(6.38), (6.33), (6.34), (6.35)を考慮すれば, 方向余弦の増分は次式で変位と関係付けられる.

$$\Delta\lambda_i^3 = \epsilon_{ipq} e^{\alpha\beta} \lambda_p^\alpha \lambda_q^3 \sum_{m=1}^3 b^\beta(m) \lambda_r^3 \Delta u_r(m) \quad (6.42)$$

$$\Delta\lambda_i^\alpha = \epsilon_{ipq} e^{\lambda\mu} \lambda_p^\lambda \lambda_q^\alpha \sum_{m=1}^3 b^\mu(m) \lambda_r^3 \Delta u_r(m) + \frac{1}{2} \epsilon_{ipq} e^{\lambda\mu} \lambda_p^3 \lambda_q^\alpha \sum_{m=1}^3 b^\lambda(m) \lambda_r^\mu \Delta u_r(m) \quad (6.43)$$

$\Delta\epsilon^{\alpha\beta}, \Delta A$ についても同様に, 全体系の変位成分 $\Delta u_r(n)$ で表現しておく. 式(6.27)より

$$\Delta\epsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 b^\alpha(m) \lambda_r^\beta \Delta u_r(m) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 b^\beta(m) \lambda_r^\alpha \Delta u_r(m) \quad (6.44)$$

式(6.29)より,

$$\Delta A = A\epsilon^{\mu\mu} = A \sum_{m=1}^3 b^\mu(m) \lambda_r^\mu \Delta u_r(m) \quad (6.45)$$

6.2.3 つり合い式

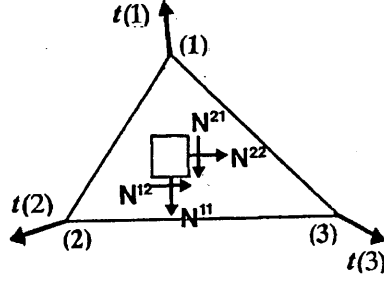


図 6.8: 節点力と応力

図 6.8 に示すように、三角形要素の節点に作用する節点力を $t(n)$ とし、応力を $N^{\alpha\beta}$ で表現する。 $N^{\alpha\beta}$ が仮想ひずみ $\underline{\Delta\varepsilon}^{\alpha\beta}$ (下線は仮想を意味する) に対してなす仮想仕事 W_i は、要素面積が $A/2$ であることを考慮して、

$$W_i = \frac{1}{2} AN^{\alpha\beta} \underline{\Delta\varepsilon}^{\alpha\beta} \quad (6.46)$$

$\underline{\Delta\varepsilon}^{\alpha\beta}$ は (6.27) より

$$\underline{\Delta\varepsilon}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 b^\alpha(m) \underline{\Delta u}^\beta(m) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 b^\beta(m) \underline{\Delta u}^\alpha(m) \quad (6.47)$$

一方、面内節点力 $t(n)$ のなす仮想仕事 W_e は

$$W_e = \sum_{m=1}^3 t^\gamma(m) \underline{\Delta u}^\gamma(m) \quad (6.48)$$

である。

$$W_i = W_e \quad (6.49)$$

と置き、 $m = n$ 節点に着目して、式 (6.49) を表現すると

$$\frac{A}{4} N^{\alpha\beta} \left[b^\alpha(n) \underline{\Delta u}^\beta(n) + b^\beta(n) \underline{\Delta u}^\alpha(n) \right] = t^\gamma(n) \underline{\Delta u}^\gamma(n) \quad (6.50)$$

上式を書き下すと、

$$\begin{aligned} & \frac{A}{2} \left[N^{11} b^1(n) \underline{\Delta u}^1(n) + N^{12} b^1(n) \underline{\Delta u}^2(n) + N^{21} b^2(n) \underline{\Delta u}^1(n) + N^{22} b^2(n) \underline{\Delta u}^2(n) \right] \\ & = t^1(n) \underline{\Delta u}^1(n) + t^2(n) \underline{\Delta u}^2(n) \end{aligned} \quad (6.51)$$

上式では $N^{12} = N^{21}$ を考慮している。 $\underline{\Delta u}^1(n)$ と $\underline{\Delta u}^2(n)$ は任意の値を取り得るから、式 (6.51) から次式を得る。

$$t^1(n) = \frac{A}{2} \left[N^{11} b^1(n) + N^{21} b^2(n) \right] \quad (6.52)$$

$$t^2(n) = \frac{A}{2} \left[N^{12} b^1(n) + N^{22} b^2(n) \right] \quad (6.53)$$

まとめて書くと、つり合い式が次式で得られる。

$$t^\beta(n) = \frac{1}{2}AN^{\alpha\beta}b^\alpha(n) \quad (6.54)$$

上式を全体座標成分で表現すると

$$t_i(n) = \frac{1}{2}AN^{\alpha\beta}b^\alpha(n)\lambda_i^\beta \quad (6.55)$$

等張力を扱うので $\Delta N^{\alpha\beta} = 0$ を考慮して、 $A \rightarrow A + \Delta A$, $\lambda_i^\beta \rightarrow \lambda_i^\beta + \Delta\lambda_i^\beta$ を式 (6.55) に代入すれば、増分つり合い式として次式を得ることができる。

$$\Delta t_i(n) = \Delta t_i(A, n) + \Delta t_i(\lambda, n) \quad (6.56)$$

ただし、

$$\Delta t_i(A, n) = \frac{1}{2}\Delta AN^{\alpha\beta}b^\alpha(n)\lambda_i^\beta \quad (6.57)$$

$$\Delta t_i(\lambda, n) = \frac{1}{2}AN^{\alpha\beta}b^\alpha(n)\Delta\lambda_i^\beta \quad (6.58)$$

式 (6.57) に式 (6.45) を代入し、式 (6.55) を用いると

$$\Delta t_i(A, n) = t_i(n) \sum_{m=1}^3 b^\mu(m)\lambda_r^\mu \Delta u_r(m) \quad (6.59)$$

式 (6.58) に式 (6.43) を代入し、式 (6.55) を用いると

$$\Delta t_i(\lambda, n) = \epsilon_{ipq}e^{\lambda\mu}\lambda_p^\lambda t_q(n) \sum_{m=1}^3 b^\mu(m)\lambda_r^3 \Delta u_r(m) + \frac{1}{2}\epsilon_{ipq}e^{\lambda\mu}\lambda_p^3 t_q(n) \sum_{m=1}^3 b^\lambda(m)\lambda_r^\mu \Delta u_r(m) \quad (6.60)$$

現在の $t = 0$ 時の節点位置を $x_i(n)|_{t=0}$ とし、 $t = \Delta t$ 時の節点位置を $x_i(n)|_{t=\Delta t}$ とすれば、

$$x_i(n)|_{t=\Delta t} = x_i(n)|_{t=0} + \Delta u_i(n) \quad (6.61)$$

すなわち、現在の節点位置に対応した節点力が式 (6.55) から計算できる。一般には $t_i(n) \neq 0$ であり、この不つり合い力が無くなるまで式 (6.61) で形状の更新を繰り返すことで、等張力 N による自己つり合い形状を求めることができる。

最後に本節で得た等張力曲面を求める形態解析に必要な基礎式を整理しておく。ただし、 $N^{\alpha\beta} = N$ に書き換えておく。

$$t_i(n) = \frac{1}{2}ANb^\alpha(n)\lambda_i^\alpha \quad (6.62)$$

$$\Delta t_i(n) = \Delta t_i(A, n) + \Delta t_i(\lambda, n) \quad (6.63)$$

ここに、

$$\Delta t_i(A, n) = t_i(n) \sum_{m=1}^3 b^\mu(m)\lambda_r^\mu \Delta u_r(m) \quad (6.64)$$

$$\Delta t_i(\lambda, n) = \epsilon_{ipq}e^{\lambda\mu}\lambda_p^\lambda t_q(n) \sum_{m=1}^3 b^\mu(m)\lambda_r^3 \Delta u_r(m) + \frac{1}{2}\epsilon_{ipq}e^{\lambda\mu}\lambda_p^3 t_q(n) \sum_{m=1}^3 b^\lambda(m)\lambda_r^\mu \Delta u_r(m) \quad (6.65)$$

6.2.4 例題

前節の基礎式を利用した簡単な例題を示す。図 6.9(a) に矩形平面上で表現した要素分割、(b) に初期形態を示す。変数 $unit, a, b$ で初期形態は特定できる。Z 方向の長さを、 $unit = 1$ とする。周辺固定で節点番号 1, 2 の x, y, z 方向が変数である。等張力によるつり合い形態は次の通りである。

- $a = 1, b = 1$ の場合

$$(x_1, y_1, z_1) = (0.9995, 0.9017, 0.5093), \quad (x_2, y_2, z_2) = (2.0005, 0.9017, 0.4907)$$

- $a = 1/3, b = 1$ の場合

$$(x_1, y_1, z_1) = (0.3571, 0.4785, 0.5209), \quad (x_2, y_2, z_2) = (0.6429, 0.4785, 0.4791)$$

2 番目の例題の初期形態を図 6.10 に示す。三角柱上下面の正三角形を固定している。節点番号 1, 2, 3 の x, y, z 方向が変数である。自己つり合いである等張力面は図 6.11 中の実線に対応する座標値で与えられる。ただし、 $unit = 1$ である。横軸は節点番号 1, 2, 3 の初期形態時の z 軸からの距離、縦軸は数値解析で得た等張力を満たす面の座標値を同じ節点で示している。図中、 $1/\sqrt{3}$ を掛けた目盛りは正三角形の一辺の長さを意味している。有意な解は正三角形の一辺の長さが 2.5 になる $r = 1/\sqrt{3} \times 2.5 = 1.4434$ から出現している。 $unit = 1$ のとき一辺がほぼ 2.5 より小さい形態では有意な解は存在しないこと、辺長が増すと実線は点線に近づきくぼむ量が少なくなることを図 6.11 は表現している。

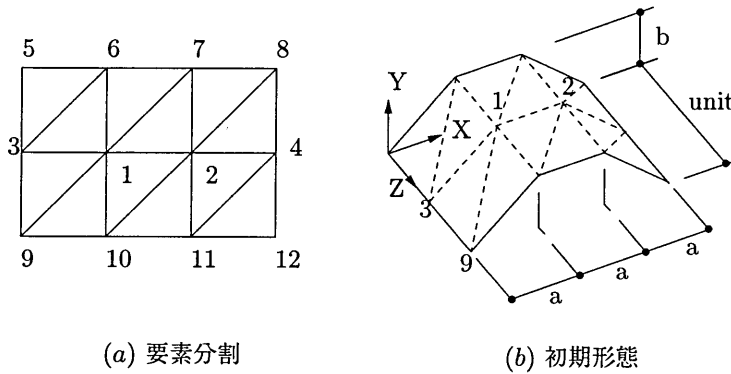


図 6.9: 例題 1

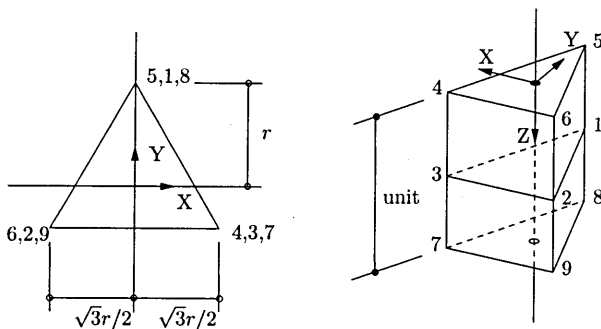


図 6.10: 例題 2 の初期形態

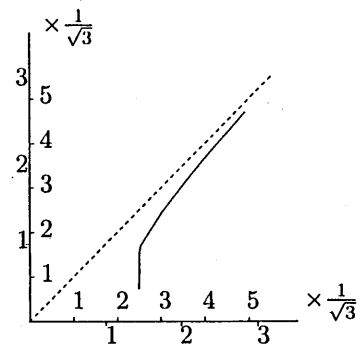


図 6.11: 三角柱を初期形態とした等張力面

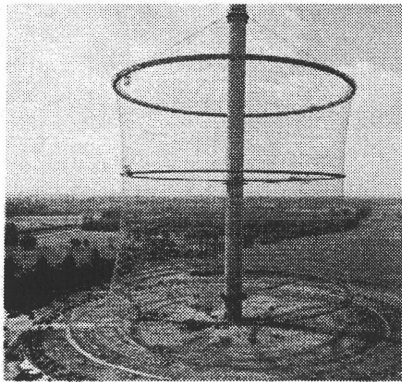
6.3 膜構造の利用

以下に、ケーブルや面材を利用した比較的新しい試みや興味あるアイデアのいくつかを紹介する。

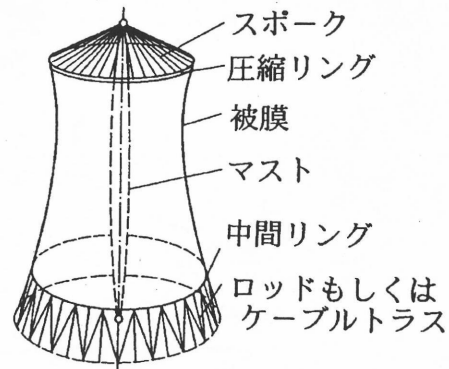
図 6.12は、三方向ケーブルネット構造による冷却塔である。ドイツ・シュメーハウゼン (Schmehausen, 1974～1991) に建設された。二方向ネット配置では四角形のメッシュ形状となり剛性が不十分なため、三方向ネットが採用されている。高さは 146m, 上下リングの直径はそれぞれ 92m と 141m である。RC シェルより大規模な冷却塔がケーブルネット構造で実現できる。

図 6.13は、地面近くの暖かい空気を効率よく集める部分 (グリーンハウス) と、暖まって軽くなった空気を上昇させる筒状構造からなり、上昇する気流で風力タービンを回し発電する。この発電の試験的試みとして、直径 10m, 高さ 195m の筒と高さ 1.85m, 直径 250m のグリーンハウスがスペイン Manzanares に、1980-81 年にかけて建設されている (図 6.13(a) 参照)。

図 6.14は、1993 年、庭園博覧会に向けてドイツ・シュツットガルトに建設されたケーブルネット構造の歩道橋である。剛性の低い 2 方向ケーブルネットに短棒 (short props) を配し、その上に剛なコンクリートスラブを敷いた構造となっている。

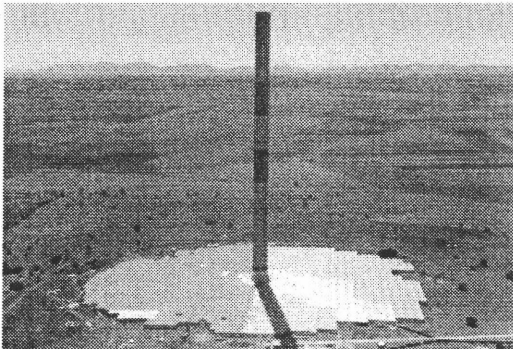


(a) 冷却塔の構造 [13], p91]

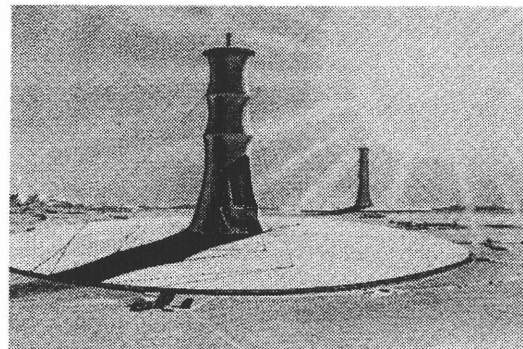


(b) ケーブルネットのリフテング風景 [13], p93]

図 6.12: 三方向ケーブルネット構造による冷却塔

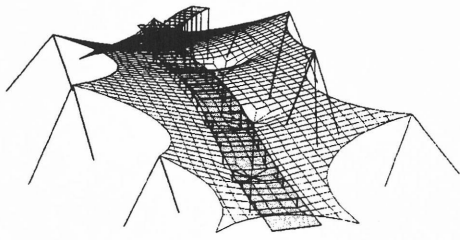


(a) 上昇気流発電塔の全景 [13], p276]

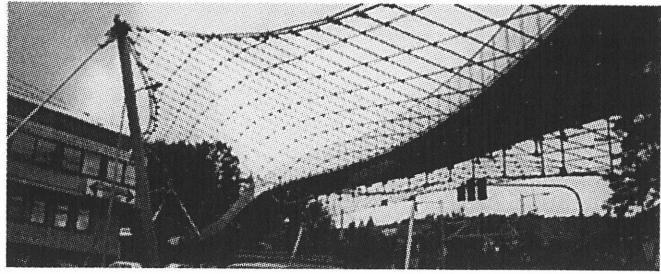


(b) ケーブルネット構造による構想 [13], p272]

図 6.13: クリーンエネルギー発電所

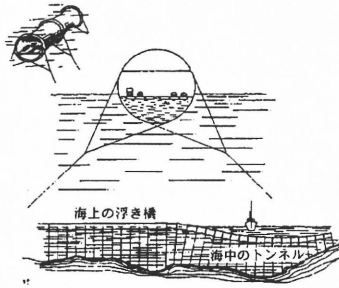


(a) CG 図¹³⁾[e,p226]

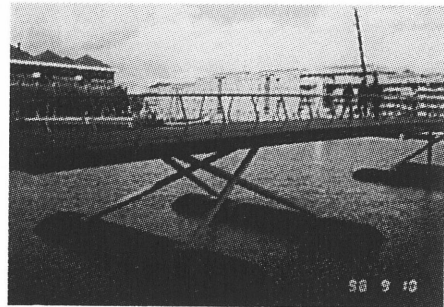


(b) 全景

図 6.14: ケーブルネットの歩道橋 (レーヴェントアー橋)

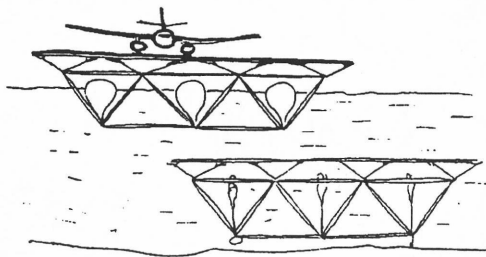


(a) 浮き橋 [10], p73]

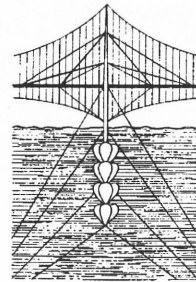


(b) 浮き支持歩道橋 (ロンドン:ドッグランズ)

図 6.15: 浮き橋構造

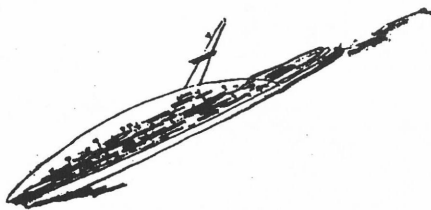


(a) 滑走路 [9], p216]



(b) 浮き基礎を持つ橋 [10], p143]

図 6.16: 浮体構造



(a) 船を膜で覆う [9], p211]



(b) 山間を膜で覆う [10],p56]

図 6.17: 大規模用途への可能性

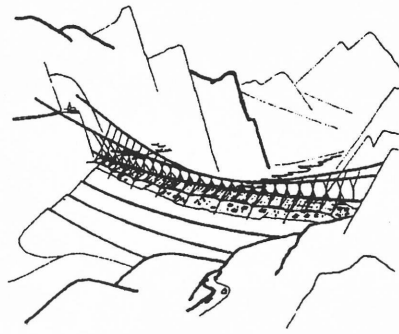
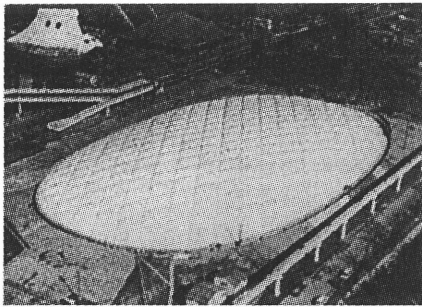
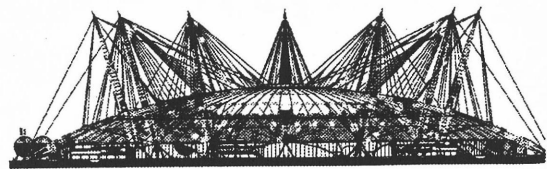


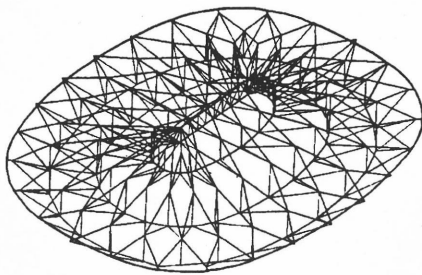
図 6.18: ダム工事全天候テント [12], p60]



(a) 大阪万博アメリカ館 [17], p113]



(b) グリニッジのミレニアムドーム [14], p30]



(c) アトランタ・ジョージアのケーブルドーム [19], p125/20), p572]

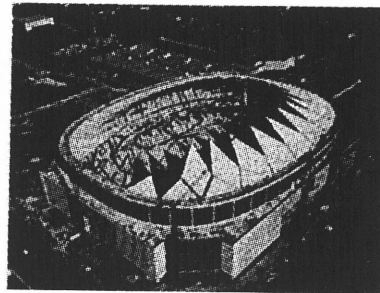


図 6.19: 大スパン屋根

図 6.15(a) は、リングを介してカテナイド状に張った膜を連続的に連ねた構造である。内部構造は、換気のための上層、全体の安定を増すため海水で満たした下層、および輸送部の 3 層構造となっている。中間層は内圧で安定を保ち、海中トンネルとしても機能するアイデアである。(b) は、開発の進むロンドンドッグランズに建設された浮き支持上の歩道橋である。

図 6.16 は空気膜の浮力に支えられた滑走路や橋のアイデア。海上構造物に生じる曲げモーメントの低減のために用いるケーブルが浮きの海中定着に利用できる (b)。

図 6.17(a)(b) は、それぞれ、風の抵抗低減と内部環境の管理のため船を膜で覆う、山間を膜で覆う例である。さらには、都市を膜で覆ったり¹⁸⁾、空中都市²¹⁾のアイデアもある。

スイスアルプス山岳地域にアースダム建設に際し、約 600m スパンの全天候吊り屋根を計画。5 年の工期短縮が可能としている(図 6.18)。ダム工事中全天候テントの開発は今日も試みられている²²⁾。

空気膜によるライズの低い大スパン膜屋根の試みは、1970 年の大阪万博アメリカ館の図 6.19(a) が最初である。この提案は米国で開花し、1973 年から 1983 年にかけて 7 棟建設された。1975 年ミシガン州ポンティアックのシルバードームはスパン 228m、8 万席を有する。その後、空気膜に代わりテンセグリティ構造によるケーブルと圧縮を負担するポストによるケーブルドーム図 6.19(c) が提案された。なお日本では、東京ドームの建設が 1988 年であり、その後、集成材を含めた各種構造材との組み合わせや開閉機能を持つ膜構造の新しい提案が精力的に行なわれている。最後に、図 6.19(b) に示す英国グリニッジに建設中のミレニアムドームの膜屋根直径は約 320m で、その面積は後樂園東京ドームの 3 倍の規模である。

参考文献

- 1) 石井一夫：膜構造の形状解析(形状決定の問題)概説, 膜構造研究論文集 '89-No.3-, 日本膜構造協会, pp.83-107, 1989.
- 2) 石井一夫：膜構造の応力・変形解析概説, 膜構造研究論文集 '90-No.4-, 日本膜構造協会, pp.69-105, 1990.
- 3) 石井一夫：膜構造の発展, 第 2 回(財)能村膜構造技術振興財団交流発表会論文・梗概集, pp.8-20, 1997.
- 4) 鈴木俊男：張力曲面構造の曲面形状に関する解析的研究, 東京大学学位論文, 1992.
- 5) 田中尚：膜の力学, 空間構造坪井善勝記念講演会, pp.55-103, 1996.
- 6) E.Haug and G.H.Powell: Analytical Shape Finding for Cable Nets and Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures, Proc. of IASS Pasific Symposium on Tension Structures and Shape Frames, Tokyo, pp.83-92, pp.165-176, 1971.
- 7) H.J.Schek: The Force Density Method for Form Finding and Computation of General Networks, Computer methods in applied mechanics and engineering 3, North-Holland Pubishing Company, pp.115-134, 1974.
- 8) M.R.Barnes: Dymanic Relaxation Analysis of Tension Networks, International Conference at Tension Roof Structures, pp.1-11, 1974.
- 9) IL 20 AUFGABEN TASKS, Institute for Lightweight Structures(IL), University of Stuttgart, Germany, 8 June 1979(date of issue).
- 10) Frei Otto, Editor: Tensile Structures Volume1 Pneumatic Structures, The M.I.T. Press, 1967.
- 11) Ludwig Glaeser, The Work of Frei Otto, The Museum of Modern Art, New York, 1972
- 12) Philip Drew, FREI OTTO: FORM and Structure, Crosby Lockwood Staples, 1976.
- 13) Alan Holgata: The Art of Structural Engineering -The Work of J. Schlaich and his Team, Edition Axel Menges, Stuttgart/London, 1997.
- 14) Construction study The Dome Experience, the Architects' Journal, 27, pp.27-36, 1997.
- 15) 膜構造 - その現状と展望 -, 社団法人日本膜構造協会, 平成 2 年 5 月改定版第 1 版発行, 1990.
- 16) シナジェティック・サーカス / バックミンスター・フラーの直観の海, 1989 年 4 月 25 日 - 8 月 5 日, 主催: P3 オルタナティブ ミュージアム 東京, 協力バックミンスター・フラー・インスティテュート, 1989.
- 17) クリスウィルキンソン著, 難波和彦・佐々木睦朗監訳, スーパーシェッズ - 大空間のデザインと構法 -, 鹿島出版会, 1995.
- 18) Thomas Herzog: Pneumatic Structures-A Handbook for the Architect and Engineer, Verlag Gerd Hatje, Stuttgart, 1976.
- 19) M. Levy, G. Castro and T. F. Jing: Hypar-Tensegrity Dome, Optional Configurations, Proceedings of IASS, Copenhagen Denmark, pp.125-128, 1991.
- 20) R. Wesley and M. Terry: Georgia Dome Cable Roof Construction Techniques, Spatial, Lattice and Tension Structures, Proceedings of the IASS-ASCE International Symposium 1994, edited by F. Abel J. W. Leonard and C. U.Penalba, pp.563-572
- 21) B. フラー / R.W. マークス共著, 木島安史 / 梅沢忠雄共訳: バックミンスター・フラーのダイマキシオンの世界, 鹿島出版会, 第 4 版, 1995.
- 22) 木村吉郎ほか: ダム施工時の防雨用吊膜屋根の対風挙動, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.42A, pp867-872, 1996.