

## 第 5 章

### シェル・膜構造の力学

ロングスパンを構成するのに、はりよりアーチが、アーチよりケーブルが力学的に有利であるのと同じように、大空間を構成するためには、平板よりもシェル、膜、立体トラス構造が力学的に有利な構造である。本章では、まず、大空間構造を構成するシェル構造と膜やケーブルネットなどの張力(テンション)構造の構造特性について概説する。次に3次元弾性論から工学的シェル理論の基礎方程式を誘導するとともに、シェルの膜理論、曲げ理論、偏平シェル理論、および膜・ケーブルネット構造を解析する際の基礎理論について述べる。

#### 5.1 スペース構造の概説

本節では、シェル構造および膜・ケーブルネット構造の力学的な構造特性について、主に建築学分野のテキスト<sup>1)</sup>を参考にして概説する。

建築分野においてシェル構造は典型的な空間構造であり、1950年頃はスペース構造の代表的な構造形態であった。コンクリート構造が建設されるようになった初期の頃から1960年代までには、コンクリートのもつ力学特性や強度特性に応じたシェル構造が数多く建設されたが、今日ではあまり建設されなくなった。型枠工事費、賃金、材料費の高騰によりシェル構造の建設には非常に高い費用がかかるようになったからである。しかし、J. Schlaichは美観的な観点からもコンクリートシェルの技術は継承すべきだと述べている<sup>2)</sup>。一方、1960年代後半以降には、ケーブルネットと膜などを主要構成部材とする張力構造がスペース構造として多く建設されている。張力構造は、型枠を必要とせず、軽量でかつ鋼のもつ強度をフルに活用できるなど、シェル構造にはない長足を有しているからである。さらに、この時期に、高張力鋼やケーブルなど材料技術の進歩(長大吊橋の先駆として建設された若戸大橋と同一のケーブルが国立代々木屋内総合競技場体育館<sup>3)</sup>の主ケーブルに使用されている)、ケーブル定着技術の進歩、およびコンピュータの出現による構造解析法の進歩のおかげで、張力構造の発展につながった。

建築構造のうちシェル構造は最も「自然な」構造といわれている。これは、筒形シェルが草木の茎に、二重に湾曲したシェルが貝殻や卵や蟹殻に、その原形を見出すことができるように、シェル構造の形と自然の動植物の形との間に多くの類似性を発見することができるからである。一方、張力構造に関しては、石けん膜に膜構造の原形を、またくもの巣にケーブルネット構造の原形を見出すことができる。ドイツのシュツットガルト大学とテュービンゲン大学のグループ(建築学や土木工学の工学の研究者のみならず、心理学、社会科学、自然科学の分野の研究者から構成されている)は、このような自然界に存在する構造体と人工の構造物との類似性に注目した研究を精力的に進めており<sup>4)5)</sup>、IL(軽構造研究所 Institut für Leichtbau)シリーズの研究報告書<sup>6)</sup>として多数出版されている。

5.1.1 シェルの構造特性

(1) 力の流れ

自然界に存在するシェルは曲面形状で、その材質が引張り、圧縮およびせん断に抵抗できることである。構造力学的にも、この特質が大空間構造としてシェル構造が採用される基本的要因である。ここでは、シェルの抵抗機構を概説し、詳細については 5.3 節で説明する。

シェル構造に荷重が作用したとき、抵抗できる応力は図 5.1 に示すように、面外合応力(曲げモーメント、ねじりモーメント、面外せん断力)と面内合応力(軸力、面内せん断力)である。曲げ応力による合モーメント(曲げモーメント、ねじりモーメント)は応力の中立軸に関するモーメントであるから、薄肉シェル構造であれば、シェルの曲げ剛性( $Eh^3/12(1-\nu^2)$ )はシェル厚( $h$ )の 3 乗に比例して小さくなり、合モーメントが小さくなる。合モーメントが小さくなれば面外せん断力も小さくなる。したがって、薄肉シェルが適切な曲率と支持構造を有する場合には、厚さ方向に一様に分布する面内合応力( $N_x, N_y, N_{xy}$ )を用いて応力解析を行うことができる。

一方、薄いゴム膜やビニル膜に生じる応力は膜応力といわれる。これらの膜は引張りには抵抗できるが、圧縮や純せん断状態の面内せん断には抵抗できない。純せん断状態ではせん断力により対角線方向に圧縮応力が発生する。また、膜状構造である石けん膜は膜応力が表面張力と同じになるように曲面形状が決定され、その結果常に表面張力と同じ応力が発生する。

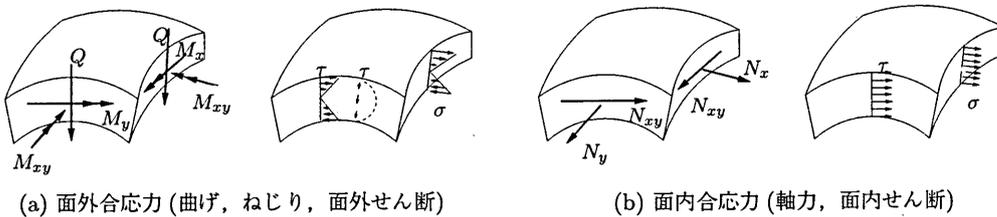


図 5.1: シェル要素に作用する力<sup>1)</sup>

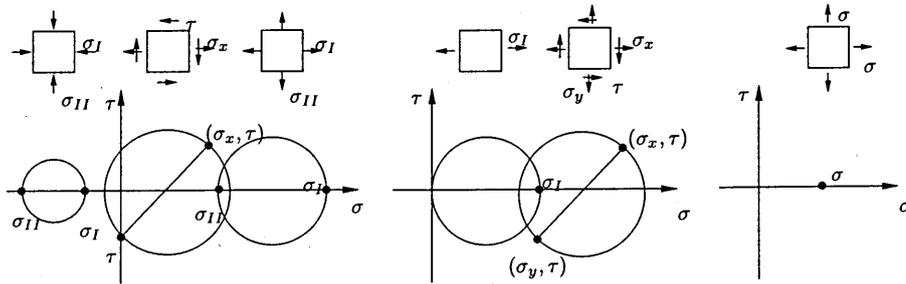


図 5.2: シェル, 膜, 石けん膜の応力円<sup>1)</sup>

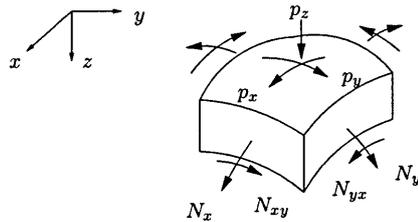


図 5.3: 曲面の微小要素<sup>1)</sup>

以上の応力状態をMohr円で表せば図5.2のようになる。図(a)は、合応力、合モーメントに抵抗できるシェルの応力状態である。図(b)はゴム膜の状態を表す。主応力が引張応力であれば任意の応力分布になり、またせん断応力も生じている。図(c)は石けん膜の応力円である。応力が一定値であるから点で表される。

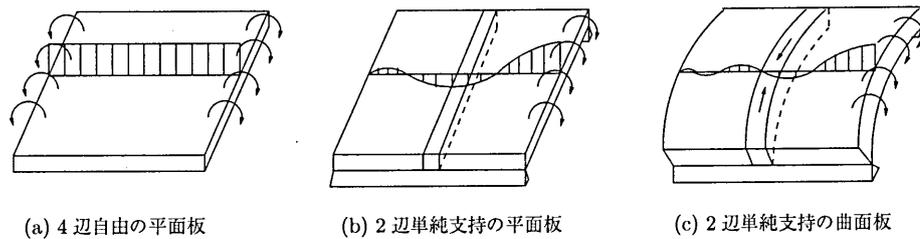
図5.3の薄肉シェルの微小曲面要素のつり合い条件は次式で与えられる。

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0 \quad (\text{並進}) \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0 \quad (\text{回転})$$

このうち、 $M_z = 0$  からせん断力の共役性  $N_{xy} = N_{yx}$  が、また、作用荷重が連続分布であれば、 $M_x = 0, M_y = 0$  が成立し、結局、3個の合応力  $N_x, N_y, N_{xy}$  が作用する面内力状態となる。3個の未知量に対して並進しないつり合い条件式が3個あるので静定構造である。このような理論をシェルの膜理論という。

表 5.1: 膜理論の前提条件と曲げの発生

前提条件	膜理論		
	適用可能	適用不可	曲げ発生原因
[1] 中央面は滑らかな 勾配と曲率をもつ			aでのつりあいは成立しない  曲げ発生
[2] シェル厚は急変しない			a-a断面での適合条件は 成立しない
[3] 滑らかな分布面荷重 (a) 集中荷重でない			aでの要素におけるつりあいは 成立しない  $ds \rightarrow 0$
(b) 波状に変動しない			大きな曲率の変化 ⇒ 曲げモーメント (適合条件は乱される)
[4] 境界は中央面の接線方向 に作用する			支承でのつりあいは 成立しない  曲げ発生
[5] 境界の変形は支承や 接合部の影響を受ける			境q界での適合条件は 成立しない  変形したシェル 2つのシェル 曲げ

図 5.4: 板の支持と曲率による曲げの収束<sup>1)</sup>

## (2) 曲げの発生

シェルは作用荷重に対して主に面内力で抵抗する構造である。これが薄肉シェルでも大空間構造を形成する理由である。しかし、このような面内力状態とするためには、適切な曲面形状と適切な支持構造と適切な荷重作用が必要である。表 5.1 は膜理論が成立する前提条件と曲げが発生する原因を示したものである。シェル構造の抵抗メカニズムは面内力が支配的な力であるにもかかわらず、曲げの発生によってシェル構造の限界が左右される。したがって、適切な曲面形状と適切な支持をつくり出すことが、シェル構造にとって重要なこととなる。表 5.1 の [4] および [5] に示すように、曲げの多くは境界領域のつり合い条件と変形の適合条件を満たすために生じる。この曲げが内部領域へ及ぼす影響はシェルの曲率に左右される。

図 5.4(a) の自由境界辺をもつ平板では、右側境界辺に作用する曲げは内部に一樣曲げを起こして対辺の境界辺の曲げとつり合わなければならない。また、(b) 図の 2 辺単純支持他対辺自由の場合は、板の支持辺に垂直な方向の曲げ剛性が補剛材の役割をする。さらに、(b) 図の板に (c) 図のように 1 方向に曲率をつければ、アーチが補剛材となる。曲率が大きいほどアーチ効果は大きくなるから、曲げの収束の度合いも大きくなる。さらに、二重曲率をもつシェルの場合、曲げは急速に収束して境界近傍に限定される特徴をもつ。

## (3) シェルの形状とその力学特性

図 5.5 はシェル構造に多く用いられている曲面の基本形である。実構造では、これらを複合した構造として建設されている。構造設計で求められる条件は、型枠の形成が容易であること、解析が可能であることである。後者の条件はコンピュータの出現により構造解析法が進歩した今日ではその比重は小さくなっているが、前者の条件はシェル構造のプレキャスト化を考慮してもなお重要である。

曲面形状は、線織面(直線を推動させてできる曲面)か非線織面かで分類することができる。線織面であれば細い帯状の直線材で型枠が作れる。シドニーのオペラハウスの設計者として有名な Felix Candela は、数多くあるシェル構造の中で一貫して HP シェルを追求した。HP シェルが二重曲面であり、膜理論が成立し簡単な数学で解析可能で、さらに線織面であるため型枠の形成が容易であるからである。また、曲面は推動曲面か、回転曲面かで分類することもできる。両者ともシェル構造のプレキャスト化により、同じ型枠の繰返し使用と部材の統一化が可能な曲面である。これはシェル構造建設の曲面形状決定において重要な要因となっている。さらに、曲面の 2 つの主曲率のうち一つが 0 であるものを単曲面(可展面)、ともに 0 でないものを複曲面(非可展面)という分類法もある。この可展か非可展の違いは、シェル構造の抵抗のメカニズムに多くの影響を与える。可展面の形状変化に対する抵抗メカニズムは曲げであるのに対して、非可展面では面内力による抵抗が大きい。例えば、石膏などの脆い材料でつくられたシェルの破壊パターンは、可展面では曲げ破壊であり、非可展面では引張破壊となる。このため単曲面形状のシェルでは、隔壁や曲げ材を設け、全体として非可展面

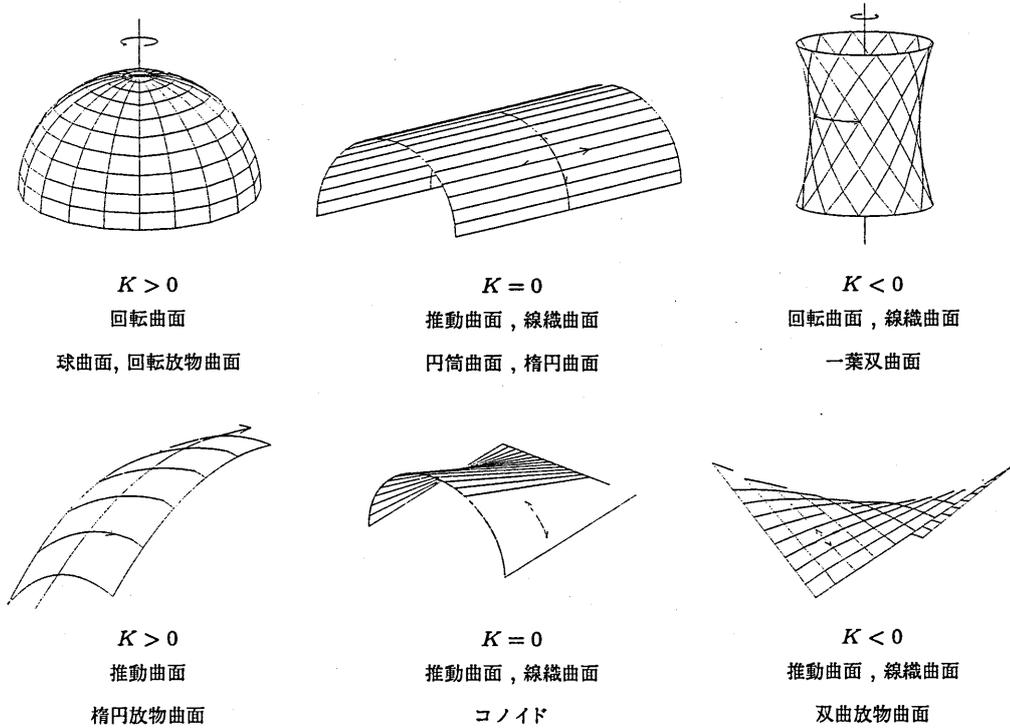


図 5.5: シェル構造の曲面の基本形状<sup>1)</sup>

の特性をもつよう設計する必要がある。例えば、竹の節は力学的には典型的な単曲面の補剛の好例である。曲面の曲率は曲面形状が与えられればある点における最大・最小曲率(主曲率  $1/R_1, 1/R_2$ )を一意に定めることができる。この主曲率の積を全曲率(ガウス曲率)といい、 $K$ で表わす。なお、主曲率の方向を連続的に滑らかに描いた曲線を主曲率線といい、直交する曲線網を形成する。曲面形状はこのガウス曲率の符号によって図 5.5のように分類される。曲面の全域で  $K = 0$  である例は、筒型曲面や円錐曲面のような単曲面である。 $K > 0$  の曲面は球曲面のように同じ方向に湾曲した複曲面である。 $K < 0$  の曲面は鞍形曲面といわれ、代表的な例としてHP 曲面がある。

シェルの形状とその力学特性について調べよう。図 5.6に示すように、各シェル構造を主曲率線に沿う直交する棒材と格子間の四辺形せん断パネルで構成するものと仮定する。薄肉シェルという条件では、この棒は圧縮と引張りのみを生じる軸力部材と考えることができる。また、せん断パネルはせん断にだけ抵抗するものとする。このように仮定すると、各シェル構造に生じる力の符号や力の伝達は、荷重方向や分布状態によって大きく変化するが、以下に示す単曲面の1方向伝達、複曲面の2方向伝達と変形拘束などの特徴は失われない。

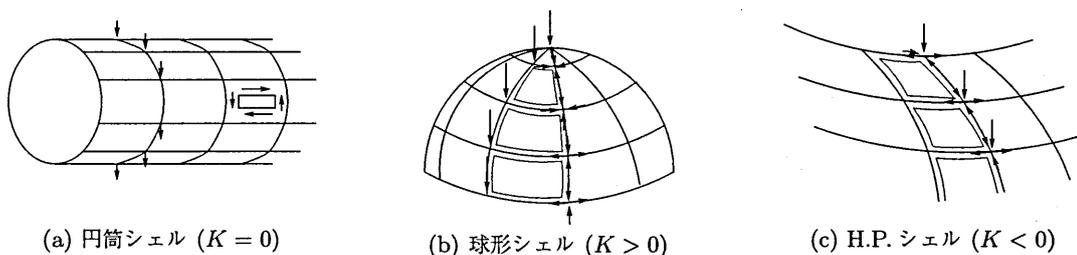


図 5.6: ガウス曲率の違いによるシェル構造の力学特性<sup>1)</sup>

まずはじめに、 $K = 0$  の単曲面の場合として図 5.6(a) の筒形シェルを考えよう。直線母線の両端で支持されている場合、アーチ部に伝えられた軸力はせん断パネルを介して隣接アーチに伝わり、順次繰り返して両端の支持部に伝えられる。このような力の伝達過程で、直線母線の棒材にはパネルのせん断によって生じる不釣り合い状態をつり合い状態にするために、場所に応じて正負の軸力が生じる。曲げを受ける梁の断面に三角形分布の曲げ応力が発生するのと同じメカニズムである。軸力を受けてアーチはその形状が変化するが、アーチに直交する直線母線の棒は、これを拘束するために全く役立っていない。これが単曲面の剛性の小さな理由である。

$K > 0$  である複曲面の場合、主曲率線は同じ方向に湾曲しているから、2方向のアーチ作用で力を伝えることができるアーチの曲率が異なれば、曲率の大きい方向により多く伝えられる。球形シェルの場合、図 5.6(b) に示すように経線に沿うアーチと緯線に沿う水平アーチおよびせん断パネルで構成される。自重のような一様鉛直荷重が作用する場合、どの鉛直アーチにも圧縮が作用するから、パネルにはせん断は生じない。水平アーチは直接的には、この力の流れには関与しないが、鉛直アーチの変形を考慮すれば、水平アーチに生じる応力はシェル頂点近傍で圧縮、赤道近傍で引張りになることがわかる。また、平面的なアーチは面外・面内の座屈を防ぐため、曲げ剛性を必要とするが、複曲面における鉛直アーチの場合、水平アーチがその変形を拘束する。このため、鉛直アーチは軸力のみ抵抗する薄い板厚でよい。このような拘束は単曲面のシェルにはない複曲面のシェルの特徴である。

$K < 0$  の鞍形複曲面は、図 5.6(c) に示すように、上に凸のアーチと下に凹の逆アーチおよびせん断パネルから構成される。鉛直荷重を受けてアーチに圧縮、逆アーチに引張りが生じる。鞍形曲面である HP 曲面は放物線に沿う逆放物線の推動曲面としても作成され、この放物線が主曲率線でもある。HP シェルは球形シェルと異なり、アーチと逆アーチはともに鉛直荷重の伝達に直接的に寄与している。曲面が十分偏平で、荷重が水平平面に関して一様であれば、アーチの圧縮と逆アーチの引張りはその大きさが等しく、かつ一様となる。その結果、せん断パネルにはせん断が生じない。また、 $K > 0$  の場合と同様に複曲面であるので、一つのアーチの変形をこれに直交するアーチが連続的に軸力抵抗で拘束することができる。

### 5.1.2 膜・張力構造の構造特性

#### (1) 膜構造の特徴

前述したように、薄いゴム膜やビニル膜などの薄膜構造は、ケーブル構造と同様に引張りには抵抗できるが、圧縮に対しては抵抗できない。曲面形状は同じでも、発生する応力状態が引張力であることがシェル構造と基本的に異なる。そのため、初期張力(プレテンション)を導入して圧縮力が生じないように設計する必要がある。その意味で張力構造ともいわれる。

膜構造に発生する応力が引張力であることは、ケーブル構造と同様に、断面積で抵抗でき、かつ座屈現象の生じない構造であることを意味する。座屈に対する抵抗能力は構造要素の曲げ剛性に左右される。このため、圧縮が支配的であるシェル構造では、複曲面としての力学特性によって剛性を得ることができても、発生する曲げと座屈に対する補強のために、ある程度の板厚と補強リブを必要とすることが多い。しかし、このようなことはケーブルや布膜からなる膜構造に基本的には要求されない。構造系が張力状態となるのは、

- ① 構造要素が引張力以外に抵抗できないとき、
- ② 構造の形が作用荷重に応じた適切な形と支持構造をもっているとき、

に限定される。構造要素としてケーブルや布膜を用いる張力構造は上記①に対応するが、このため、張力状態になるように曲面形状が制限されることになる。また、これらの構造要素はそれ自体が完全な構造にならない

いから、圧縮・曲げ・せん断の補剛要素を必要とする。ケーブルが主構造である吊橋が、構造系全体としては補剛桁で曲げを負担するのと同じメカニズムである。構造物に作用する荷重には、鉛直自重のほかに、風力や地震力などの方向や分布が変化する変動荷重がある。ケーブルや布膜の構造は、単純な抵抗のメカニズムしかもっていないから、この種の変動荷重に対しては形状を大きく変えるしか方法がない。このことは風を受けるテントのはばたきからも理解できる。しかし、このような大変形は、許容されないので張力構造の設計においては、シェル構造と同様に適切な曲面形状と適切な支持により、安定性と剛性を確保しなければならない。

## (2) 吊床構造

鋼の引張りに強い特徴を単純に直線材のまま利用したのが、斜張橋、吊床・吊屋根構造<sup>7)</sup>である。床構造には曲げ・せん断が作用するので、支持点が多いほど曲げは小さくなる。吊床構造では、床板厚を小さくするため、PC鋼棒などで吊り、床荷重を主構造部材であるケーブルに伝達させている。吊材には座屈が生じないから、圧縮材に比べて細い部材でよい。吊床構造では、水平方向の安定性を確保するために床構造を剛強な構造に結合しなければならない。

## (3) 1方向張力構造

ケーブルのように張力にのみ抵抗できる構造に集中力が作用すれば、力の分布およびケーブルの長さのみによって規定される張力線の形をとる。力の分布が変化すれば、形を大きく変えて抵抗する。また、このような張力状態で抵抗するためには、支持端に境界応力につり合う、すなわち、推力(水平反力)に抵抗できる支持構造を必要とする。斜張橋や自旋式吊橋のように、主桁(水平圧縮材)と複合すれば、必要とする支持反力は鉛直方向力のみとなる。このような1方向ケーブル構造の力学特性をもとに、一般的な外力に対する構造系の安定性と剛性を確保するために次の方法がとられている。

- ① 定常的な作用荷重(死荷重)を大きくする。
- ② 単一ケーブルを複合構造として初期張力を導入する。
- ③ 単一ケーブルを曲げ剛性をもつ構造要素で置き換える。

## (4) 2方向張力構造

### (a) 2方向ケーブルネット構造

ケーブルを2方向に、特に曲面の主曲率線に沿って配置するケーブルネットの構造を考えよう。2方向張力構造の安定性と剛性確保の方法は基本的には単一ケーブルの場合と同じである。ケーブルネットの場合、②の初期張力の導入によって、シェルの面内力による抵抗状態に近いメカニズムを作り出すことができる。ケーブルは引張力にのみ抵抗する素材であるから、これを直交配置してネットを作っても、面内せん断にも、また圧縮にも抵抗できない。このケーブルネットに初期張力を導入することで、シャイベ(Scheibe(独) 面内力を受ける板。面外力を受ける板には Platten が用いられる)のような面内抵抗力をもつことができ、さらに曲率を与えられれば、薄肉シェルの抵抗機構をもつことができる。

初期張力の導入された2方向ケーブルネット構造は初期張力と作用荷重による応力との和が圧縮にならない限り、引張り、圧縮およびせん断の面内力に抵抗することができる。ただし、ケーブルネット構造では主応力の方向は常にケーブルの方向に限定されることに注意を要する。連続体であるシャイベ構造の応力状態には圧縮と主応力の方向に関する条件がない。

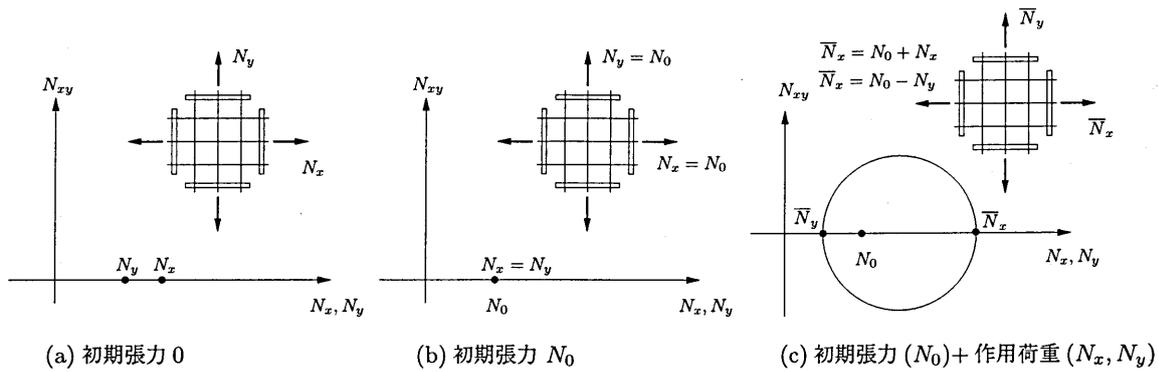


図 5.7: ケーブルネット構造の Mohr の応力円

Mohr 円でこのような応力状態を考えてみよう。初期張力のないケーブルネットの応力は原点に対応し、図 5.7(a) に示すように、可能な付加力は  $N_x, N_y$  上の正の領域であるが、面内せん断力に抵抗できないから円を形成しない。図 5.7(b) は初期張力が導入されたネットの Mohr 円を示している。2 方向とも同一の初期張力であれば、 $N_x, N_y$  軸上の点で表される。この状態で面内力が作用すれば、Mohr 円は図 (c) のようになる。Mohr 円が  $N_x, N_y$  軸の負の領域にならない限り、この直交ケーブルネットは安定であり、微小変形で抵抗できる剛性をもつ。Mohr 円と  $N_x, N_y$  軸の交点は、常にケーブルの応力、すなわち主応力を示す。また、Mohr 円のせん断力はネットを面で置換したとき、主軸と傾斜した仮想断面に生じるせん断力に相当する。一方、シャイベに生じ得る応力の応力円は、図 5.2 に示したように  $\sigma - \tau$  平面全域である。このため、上記の制限されたケーブルネットの応力はシャイベとは全く同じとはいえないが、シャイベに近い応力伝達が可能であることがわかる。なお、布やゴムなどによる膜構造に初期張力が 2 方向に導入されれば、応力分布の自由度はケーブルネットよりも大きく、よりシャイベに近いものとなる。

(b) 曲率をもつ膜構造

初期張力を導入されたケーブルネットが、薄肉シェルのな抵抗をするためには曲率をもたなければならない。曲面形状の構造に初期張力を導入するためには、曲面は負のガウス曲率をもつことが条件である。すなわち、鞍形曲面でなければならない。

図 5.8(a) に示すように下に凸の吊りケーブルと上に凸の押えケーブルを交差させ、押えケーブルに引張力を加えれば、2つのケーブルに初期張力が導入される。また、(b) 図のように吊りケーブルの間隔を密にしていけば、鞍形の曲面が形成され、曲面の全領域にわたって初期張力の状態になる。この場合、ケーブルの方向が曲面の主曲率線に一致していれば、より効果的に初期張力が導入され、作用荷重に対して曲率によるつり合いが成り立つ。

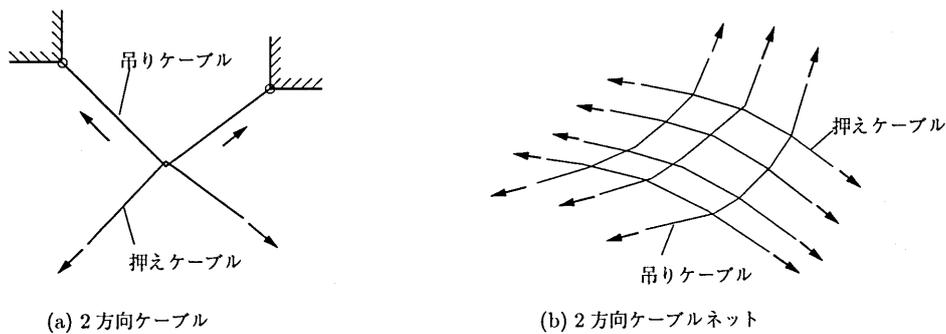


図 5.8: 2 方向ケーブルネット<sup>1)</sup>

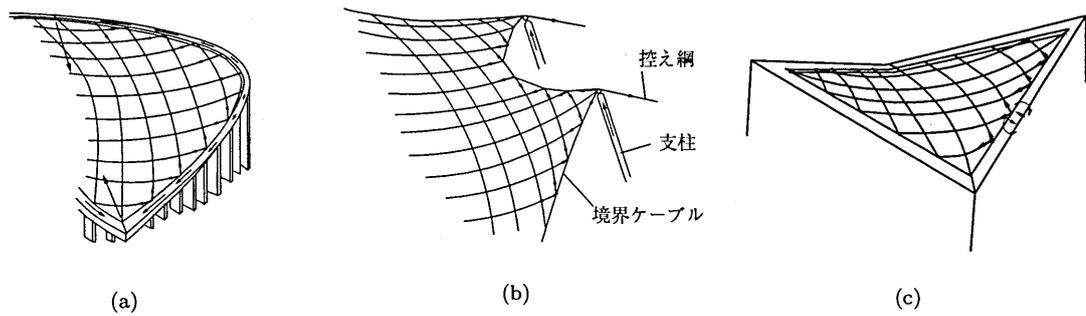
図 5.9: ケーブルネットの境界構造の例<sup>1)</sup>

図 5.8(a) に示すように、簡単な初期張力を導入された構造が集中力を受けた場合、吊りケーブルに付加引張力が、押えケーブルには付加圧縮力が生じる。初期張力と付加引張力の和が許容張力よりも小さく、かつ、《初期張力 + 付加圧縮力》の和が引張力であれば、この構造は安定で、かなりの剛性をもつ。剛性の大小は導入張力の大小によって左右される。

このような抵抗の方法は、鞍形曲面の場合も全く同じである。鞍形曲面の典型的な例は、前節で述べた HP 曲面である。HP シェルの場合、水平面に一樣な鉛直荷重のもとで一樣面内せん断状態になった。このような一樣せん断は下向きの主曲率線に沿う一樣引張力と上向きの主曲率線に沿う一樣圧縮力とに分解され、この主曲率線の方が主応力の方向である。シェルの要素と類似の面内剛性で力の伝達のメカニズムをもつ初期張力の導入されたケーブルネットにも同じような応力が生じることは容易に推測することができる。

平面的なケーブルネットに初期張力を導入するために、剛枠が必要であるように、鞍形曲面の 2 方向ケーブルネットにも、初期張力に抵抗でき、また付加荷重を大地に伝達する境界構造が必要となる。

境界構造を大別すれば、図 5.9 のようなものがある。いずれの場合も、境界構造に作用する力はケーブルネットに生じる張力の反力である。(a) 図の場合、アーチに作用する力の面内成分はアーチの軸力となって流れ、柱脚を結ぶタイバーで自己つりあいを形づくる。面外成分はアーチの自重とともに束柱を介して基礎に伝達される。(b) 図では、ケーブルネットの張力は境界ケーブルの張力となり、さらに圧縮材の支柱と控え網に伝わる。(c) 図のように直線材にネットを張れば、ケーブルネットの張力は枠組に曲げ・せん断を引き起こし、必ずしも好ましくない。HP シェルの場合、面内せん断は直線縁辺で軸力に変換された。この相違は、ケーブルネットでは、一樣張力状態に荷重による一樣せん断状態が付加され、全体として張力状態となっていることに起因している。これが HP シェルと鞍形ケーブルネットの応力伝達のメカニズムにおける基本的な相違である。

##### (5) 空気膜構造

空気膜の構造の原形としては、風船、エアマット、車のチューブなどを挙げることができる。力学的には、空気圧による初期張力導入の構造である。大きくは、閉じた布膜に内圧を加えて剛い部材をつくり、これを要素として構造を構成する方法と、布膜を屋根被覆として用い、室内圧を高めて安定化する方法とがある(図 5.10)。ともに、引張抵抗しなかつた素材が、剛く、安定化するのは空気圧によって初期張力状態になることによる。当然、空気圧が大きいほど、大きな張力が導入され、付加荷重に対してより剛く安定したものになる。

Mohr 応力円でいえば、布膜の応力は図 5.11 の円で表される。2 方向ケーブルネットの場合と異なり、主応力の方向が限定されない。また、ガウス曲率  $K$  の正負に関係なく、初期張力の導入が可能である。例えば、

浮輪 (円環, トーラス・シェルともいう) の内側は  $K < 0$  であり, 外側では  $K > 0$ , また上下面で  $K = 0$  である. もちろん, 曲面の全域にわたっての  $K = 0$  形状の場合, 初期張力は導入できない.

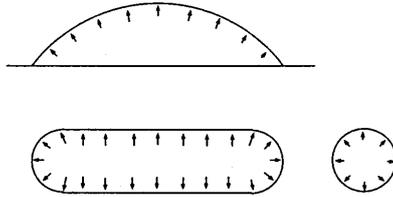


図 5.10: 空気圧による初期張力の導入

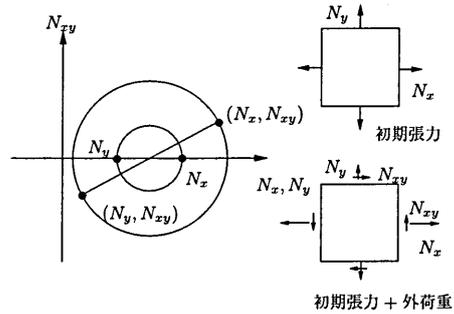


図 5.11: 空気膜構造の Mohr 応力円<sup>1)</sup>

### 5.2 3次元弾性論

シェル構造の解析に必要な基礎方程式は, 直交曲線座標系における3次元弾性論の基礎方程式から, 種々の仮定を導入して誘導することができる. 本節では直交曲線座標系における3次元弾性論の基礎方程式をまとめて示す. 詳細については, 例えば文献 8) 9) 10) 11) 12) 13)などを参照されたい.

#### 5.2.1 曲面の数学的表示

曲面は2個のパラメータ  $(\alpha_1, \alpha_2)$  を用いて2次元的に取り扱うことができる. はじめに, 曲面を解析する上で使用する数学的諸量をまとめて示す (図 5.12, 5.13参照).

##### ●曲面のパラメータ表示

正規直交基底ベクトル  $e_i \ (i = 1, 2, 3)$

パラメータ曲線  $\alpha_1$ 線 ( $\alpha_2 = \text{const.}$ )  $\alpha_2$ 線 ( $\alpha_1 = \text{const.}$ )

位置ベクトル  $\vec{OP} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) = x_i e_i = x_1(\alpha_1, \alpha_2) e_1 + x_2(\alpha_1, \alpha_2) e_2 + x_3(\alpha_1, \alpha_2) e_3$

接線ベクトル  $g_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1}, \quad g_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2}$

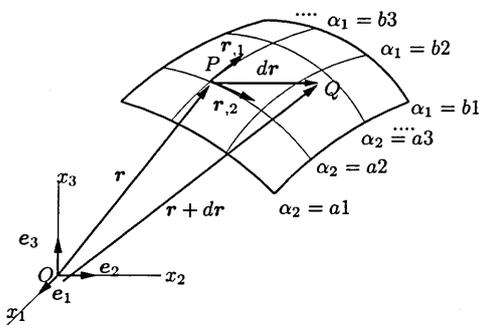


図 5.12: 曲面のパラメータ表示

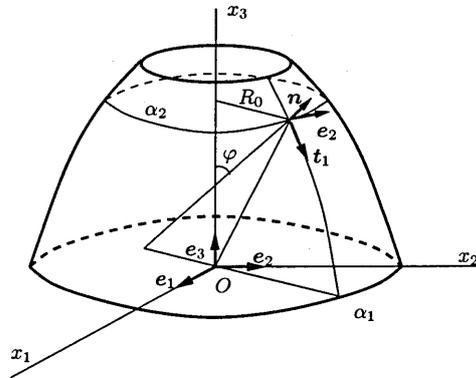


図 5.13: 回転曲面

## ●第1基本形式

位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の増分  $d\mathbf{r} = \mathbf{g}_1 d\alpha_1 + \mathbf{g}_2 d\alpha_2$

第1基本形式  $I$   $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = E(d\alpha_1)^2 + 2F(d\alpha_1)(d\alpha_2) + G(d\alpha_2)^2$

第1基本量  $E = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 \equiv g_{11}, \quad F = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \equiv g_{12} = g_{21}, \quad G = \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 \equiv g_{22}$

直交曲線座標  $F = 0$  となる曲線座標  $\alpha_1, \alpha_2$

Lameのパラメータ  $A_1 = \sqrt{E}, \quad A_2 = \sqrt{G}, \quad A_{12} = \sqrt{F} = 0, \quad ds_1 = A_1 d\alpha_1, \quad ds_2 = A_2 d\alpha_2$

法線ベクトル  $\mathbf{g}_3$  接線ベクトル  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  に直交するベクトル

単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$   $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|} = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{H}, \quad H = \sqrt{EG - F^2} \quad \alpha_1 \perp \alpha_2$  と き  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{A_1 A_2}$

## ●第2基本形式

曲線の接線ベクトル  $\mathbf{t}$

法線曲率ベクトル  $\mathbf{k}_n = -K_n \mathbf{n}$

法線曲率  $K_n$   $K_n = -(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{n}) = \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n}}{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}$

接線曲率ベクトル  $\mathbf{k}_t$

曲率ベクトル  $\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_t$

第2基本形式  $II$   $K_n = \frac{II}{I} = \frac{L(d\alpha_1)^2 + 2M d\alpha_1 d\alpha_2 + N(d\alpha_2)^2}{E(d\alpha_1)^2 + 2F d\alpha_1 d\alpha_2 + G(d\alpha_2)^2}$

第2基本量  $L, M, N$   $L = -\mathbf{r}_{,11} \cdot \mathbf{n}, \quad M = -\mathbf{r}_{,12} \cdot \mathbf{n}, \quad N = -\mathbf{r}_{,22} \cdot \mathbf{n}, \quad \left( \mathbf{r}_{,ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right)$

## ●曲率線座標

$F = M = 0$

主曲率 法線曲率  $K_n$  の最大・最小値

$K_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} = \frac{\mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{n}_{,1}}{A_1^2}, \quad K_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} = \frac{\mathbf{r}_{,2} \cdot \mathbf{n}_{,2}}{A_2^2}$

主曲率半径  $R_1 = 1/K_1, \quad R_2 = 1/K_2$

## ●曲率線座標における接線ベクトルと法線ベクトルの微分

単位直交ベクトル  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$

接線ベクトル  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$   $\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{g}_1}{|\mathbf{g}_1|} = \frac{1}{A_1} \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_2|} = \frac{1}{A_2} \mathbf{g}_2$

法線ベクトル  $\mathbf{n}$   $\mathbf{n} = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2$

接線ベクトルの微分  $\mathbf{t}_{1,1} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \mathbf{t}_2 - \frac{A_1}{R_1} \mathbf{n}, \quad \mathbf{t}_{1,2} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{t}_{2,1} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \mathbf{t}_1$

法線ベクトルの微分  $\mathbf{t}_{2,2} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \mathbf{t}_1 - \frac{A_2}{R_2} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}_{,1} = \frac{A_1}{R_1} \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{n}_{,2} = \frac{A_2}{R_2} \mathbf{t}_2$

## Meunier(ミューエ)の定理:

曲面上の1点を通り曲面に含まれる曲線で、同じ方向の接線をもつ曲線はその点で同じ法線曲率をもつ。

## Gauss - Codazzi(ガウス - コダッチ)条件:

曲線座標  $\alpha_1, \alpha_2$  で表わされた任意曲面が連続した滑らかな曲面をなすための条件。

Codazzi条件:  $\frac{A_{1,2}}{R_2} = \left( \frac{A_1}{R_1} \right)_{,2}, \quad \frac{A_{2,1}}{R_1} = \left( \frac{A_2}{R_2} \right)_{,1}$  Gauss条件:  $\left( \frac{1}{A_1} A_{2,1} \right)_{,1} + \left( \frac{1}{A_2} A_{1,2} \right)_{,2} = -\frac{A_1 A_2}{R_1 R_2}$

回転曲面は、シェル構造に多く用いられる曲面形状である。平面曲線(母線あるいは経線)を中心軸の回りに回転してできる曲面で、球、円筒、円錐、円環などがある。表 5.2は回転曲面、球形曲面、円筒形曲面の数学的諸量を示したものである(図 5.13参照)。回転曲面の諸量を用いて、球、円筒曲面は容易に誘導できる。

表 5.2: 回転曲面の諸量

曲面の種類	回転曲面	球形曲面	円筒曲面
曲線座標 $\alpha_1, \alpha_2$	$\alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = \theta$	$\alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = \theta$	$\alpha_1 = \theta, \alpha_2 = x$
位置ベクトル $\mathbf{r}$	$R_0 \cos \theta \mathbf{e}_1 + R_0 \sin \theta \mathbf{e}_2 + x_3(\varphi) \mathbf{e}_3$	$a \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + a \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 + a \cos \varphi \mathbf{e}_3$	$a \cos \theta \mathbf{e}_1 + a \sin \theta \mathbf{e}_2 + x \mathbf{e}_3$
第1基本量	$E = R_1^2, F = 0, G = R_2^2,$ $H = R_0 R_1$	$E = a^2, F = 0, G = a^2 \sin^2 \varphi = a_0^2,$ $H = a^2 \sin \varphi$	$E = a^2, F = 0, G = 1,$ $H = a$
Lameパラメータ	$A_1 = R_1, A_2 = R_0$	$A_1 = a, A_2 = a \sin \varphi = a_0$	$A_1 = a, A_2 = 1$
第1基本形式	$(ds)^2 = R_1^2(d\varphi)^2 + R_0^2(d\theta)^2$	$(ds)^2 = a^2(d\varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi (d\theta)^2$	$(ds)^2 = a^2(d\theta)^2 + (dx)^2$
法線ベクトル $\mathbf{n}$	$\sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \mathbf{e}_3$	$\sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \mathbf{e}_3$	$\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$
第2基本量	$L = R_1, M = 0, N = R_0 \sin \varphi$	$L = a, M = 0, N = a \sin^2 \varphi$	$L = a, M = 0, N = 0$
曲率半径 $R_1, R_2$	$R_1 = R_1, R_2 = R_2$	$R_1 = a, R_2 = a$	$R_1 = a, R_2 = +\infty$

### 5.2.2 3次元弾性論における力学量と基礎方程式の関係

弾性論における基本力学量としては、変位、ひずみ、応力がある。また、これらの力学量を関係づける方程式として、ひずみ-変位関係式、構成方程式、つり合い式がある。3次元弾性論におけるこれらの関係を図示すると図 5.14となる。

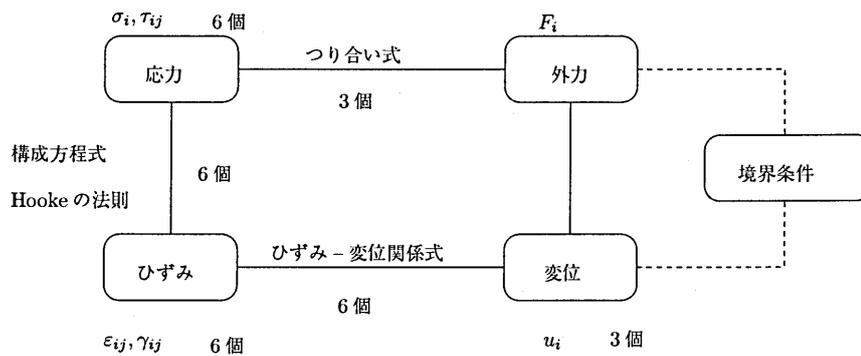


図 5.14: 3次元弾性論における未知量と基礎方程式の関係

### 5.2.3 直交曲線座標系

3つの曲線座標パラメータ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  を用いて、3次元空間の1点を定めることができる。位置ベクトル  $\overline{OP}$  の先端  $P$  の座標は、

$$x_1 = x_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad x_2 = x_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad x_3 = x_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \tag{5.1}$$

で与えられる。したがって、空間における点  $P$  を決定するには  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  を与える必要がある。

$\overline{OP} = \mathbf{r}$  と置くと、次のようにベクトル表示することができる。

$$\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = x_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mathbf{e}_1 + x_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mathbf{e}_2 + x_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mathbf{e}_3 \tag{5.2}$$

表 5.3: 直交曲線座標系における基本量  $g_{ij}, ds$ 

	デカルト座標	球座標	円柱座標
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$	$(x_1, x_2, x_3)$	$(r, \varphi, \theta)$	$(r, \theta, z)$
$\mathbf{r}$	$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$	$r \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 + r \cos \varphi \mathbf{e}_3$	$r \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3$
$\mathbf{g}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \mathbf{e}_3$	$\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$
$\mathbf{g}_2$	$\mathbf{e}_2$	$r \cos \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \cos \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 - r \sin \varphi \mathbf{e}_3$	$-r \sin \theta \mathbf{e}_1 + r \cos \theta \mathbf{e}_2$
$\mathbf{g}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-r \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$g_{11}$	1	1	1
$g_{22}$	1	$r^2$	$r^2$
$g_{33}$	1	$r^2 \sin^2 \varphi$	1
$(ds)^2$	$(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$	$(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi (d\theta)^2$	$(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2$

上式を  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  で微分すると,  $\alpha_1$  曲線,  $\alpha_2$  曲線,  $\alpha_3$  曲線に沿う接線ベクトルが得られる.

$$\mathbf{r}_{,1} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} = \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{r}_{,2} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} = \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{r}_{,3} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_3} = \mathbf{g}_3 \quad (5.3)$$

増分  $d\mathbf{r} = g_1 d\alpha_1 + g_2 d\alpha_2 + g_3 d\alpha_3$  を用いて, 線素  $ds$  ( $d\mathbf{r}$  の長さ) は次式で与えられる.

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \sum_j g_{ij} d\alpha_i d\alpha_j \quad (5.4)$$

ここに,  $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) で, 計量テンソルと呼ばれる.  $g_{ij} = 0, (i \neq j)$  ときの曲線座標が直交曲線座標となり, 次式が成立する.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j &= g_{ij} \delta_{ij} && (\delta_{ij} : \text{Kronecker's delta}) \\ (ds)^2 &= g_{11}(d\alpha_1)^2 + g_{22}(d\alpha_2)^2 + g_{33}(d\alpha_3)^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

デカルト座標系, 球座標系, 極座標系, 円柱座標系などはすべて直交曲線座標である. 弾性論の基礎方程式は通常これらの座標系を用いて表わされる. 表 5.3は上記の直交曲線座標系での基本量をまとめたものである. 2次元の極座標系は, 円柱座標系において  $\mathbf{e}_3$  の項, つまり,  $z=0$  と置くことにより得られる.

#### 5.2.4 3次元弾性体の力学量と直交曲線座標系における基礎方程式

一般化3次元連続体の任意点の応力とひずみ, および, 直交曲線座標系におけるひずみ-変位関係式, 構成方程式, つり合い方程式の基礎方程式を以下に示す<sup>14)8)</sup>. 以下の定式化においては変位に関する高次項を無視している. 幾何学的非線形問題や膜構造問題を取り扱う場合は, 変位の高次項を省略しないひずみ-変位関係式を用いなければならない. なお, シェル構造のつり合い方程式は仮想仕事式, Hamiltonの原理, ベクトル式などを利用して誘導することができ, 次節で Hamiltonの原理によりシェル構造のつり合い式を誘導する.

##### (1) 応力とひずみ

直交曲線座標系において, 応力は直応力成分  $\sigma$ , セン断応力成分  $\tau$  を用いて, また, ひずみは直ひずみ成分  $\varepsilon$ , セン断ひずみ成分  $\gamma$  を用いて次式で表わされる.  $\sigma_1, \tau_{12}, \dots, \varepsilon_1, \gamma_{12}$  を  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$  と表記される

場合もある。本章の式中でも  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots$  と記述する (例えば式 (5.8) など)。

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{応力}} & & \boxed{\text{ひずみ}} \\ \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \tau_{12} = \tau_{21} \\ \tau_{23} = \tau_{32} \\ \tau_{13} = \tau_{31} \end{array} & \left[ \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_2 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_3 \end{array} \right] \end{array}$$

## (2) ひずみ - 変位関係式

直交曲線座標系における弾性論のひずみ - 変位関係式は次式 ( $i, j = 1, 2, 3$ ) で表わされる。

$$\begin{aligned} \text{直ひずみ:} \quad \varepsilon_i &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[ \frac{u_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right] + \frac{1}{2g_{ii}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_{ii}}{\partial \alpha_k} \frac{u_k}{\sqrt{g_{kk}}} \\ \text{せん断ひずみ:} \quad \gamma_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \left[ g_{ii} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{u_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + g_{jj} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{u_j}{\sqrt{g_{jj}}} \right) \right] \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (5.6)$$

ここに、 $u_i$  は座標曲面  $\alpha_i$  に垂直な方向の変位成分で、 $u_i = \sqrt{g_{ii}}\alpha_i$  である。

## (3) 構成方程式

等方性弾性体の応力とひずみの関係式を表わす構成方程式は次式で表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

## つり合い方程式

応力間のつり合い式は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{g\sigma_{ij}g_{ii}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \right) - \frac{1}{2} \frac{g\sigma_{jj}}{g_{jj}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial \alpha_i} + F_i g \sqrt{g_{ii}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.8)$$

ここに、 $g = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}$  であり、また  $j$  は  $i$  と同じ数値は取らない。

式 (5.6) ~ (5.8) を用いると直交曲線座標系における 3次元弾性体の基礎方程式を誘導することができる。

例として、円柱座標系におけるひずみ - 変位関係式、およびつり合い方程式を求めてみる。表 5.3 より、 $g = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = r$  となる。これを式 (5.6) に代入して、ひずみ成分を変位成分  $u_1 = u_r, u_2 = u_\theta, u_3 = u_z$  の関数として表わすと、次式となる。

$$\begin{aligned} e_{11} = \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{22} = \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{33} = \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{12} = \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad \gamma_{23} = \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \gamma_{31} = \gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \end{aligned}$$

式 (5.8) に、 $g_{ij}, g$  を代入すると、つり合い式が得られる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r} + F_{\theta} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + F_z = 0$$

### 5.3 工学的シェル理論

3次元弾性論の基礎式から種々の仮定を導入することによりシェルの解析に必要な基礎方程式を誘導することができる。シェル構造の特徴として、面内力によって荷重に抵抗する能力、すなわち2方向の形態抵抗機能をもつことであるが、シェルの基礎方程式には膜理論と曲げ理論の2つの理論に大別され、対象とする構造に応じて使用されている。曲率をもつシェルでは、荷重は曲げと面内力の両方で抵抗する。これが曲げ理論である。一方、大部分の荷重が面内力で抵抗されるとき膜理論が用いられる。図5.14と同様にシェル理論における基本量と基礎方程式の関係を図5.15に示す。

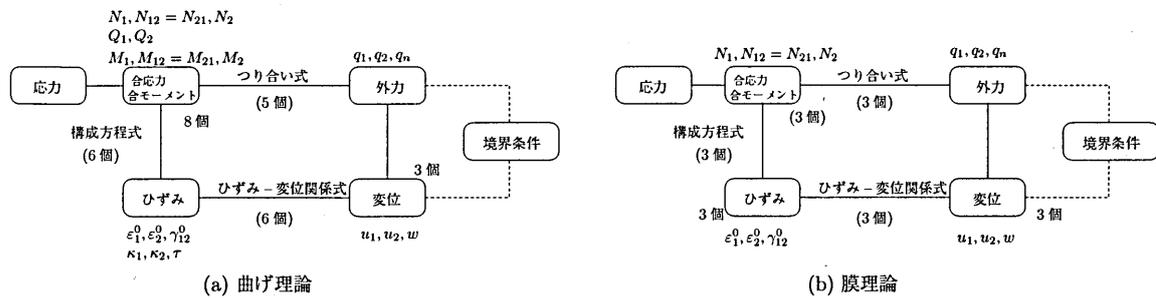


図 5.15: シェル理論における未知量と基礎方程式の関係

#### 5.3.1 工学的シェル理論の前提条件と仮定

等質・等方性材料の線形弾性理論の一般的な仮定と、シェル構造を工学的に取り扱う場合の特別な前提条件を示す。これらの仮定と前提条件はシェルを解析するとき基礎となるものである。本節では微小変形の幾何学的線形なシェル理論を主に取り扱う。微小変形理論における前提条件は、微小ひずみであること ( $\epsilon, \gamma \ll 1$ )、および、微小変位であることである。微小変位の条件よりつり合い式は変形前の構造系において作成されることになる。もちろん、シェル構造の座屈問題や大変形問題を取り扱う場合には変形後のつりあいを考慮する必要がある。また、材料は弾性体で等質・等方性を有し、一般化されたフックの法則が適用できるものとする。したがって、材料特性は弾性係数  $E$  とせん断弾性係数  $G$  の2個の定数で決定することができる。さらに、シェル厚  $h$  はシェル面の寸法に対して小さく、シェルは中央面を基準として表わすことができるものとする。以上を前提条件として、薄肉シェルに対する工学的シェル理論では、以下の仮定を設定する。なお、薄肉シェルの適用範囲は、 $\max(h/R) \leq 1/10 \sim 1/20$  ( $h$ : シェル厚,  $R$ : 曲率半径) とされており、また、以下では、中央面に対する  $\alpha_1, \alpha_2$  方向の接線を  $t_1, t_2$  で表し、中央面に対する法線を  $n$  と表す。したがって、中央面に垂直な応力およびひずみは  $\sigma_n, \tau_{1n}, \dots$  および  $\epsilon_n, \gamma_{1n}, \dots$  で表記する。

1. 中央面に対する法線は変形後の中央面に対しても法線のままである。この仮定は、シェル中央面に対して垂直なせん断ひずみを無視 ( $\gamma_{1n} = 0, \gamma_{2n} = 0$ ) することになり、シェルの内外表面には相対的な変形がないこと (せん断変形無視の仮定) を意味するものである。せん断応力  $\tau_{1n}, \tau_{2n}$  は、シェル要素内で

$\Sigma Z = 0$  を満足するためには、一般にゼロであってはならない。したがって、2つの構成式  $\tau_{1n} = G \cdot \gamma_{1n}$ ,  $\tau_{2n} = G \cdot \gamma_{2n}$  ( $\tau_{1n}, \tau_{2n} \neq 0$ ,  $\gamma_{1n}, \gamma_{2n} = 0$ ) は使用することができない。

2.  $\epsilon_n \ll 1$  であるため、変形前後で中央面に垂直な長さは不変である。すなわち、 $\epsilon_n = 0$  である。
3. 中央面に対して垂直な応力は無視 ( $\sigma_n \doteq 0$ ) することができる。したがって、シェルの構成方程式は平面応力問題として扱うことができる ( $\sigma_n \ll \sigma_1, \sigma_2$  なので  $\sigma_n = 0$  と仮定するが、シェル要素の  $dz$  部分でのつり合い方程式  $\Sigma Z = 0$  は成立しない)。
4. Kirchhoff-Love の 1 次近似「 $h/R_1, h/R_2$  は 1 に対して無視することができる」が成り立つ (第 2 次近似 (Love-Flügge) の場合には成り立たない)。これより基礎方程式の誘導において、 $1 + h/R \doteq 1$  とおくことができる。

5.3.2 ひずみ - 変位関係式

図 5.16 に示すようにシェルの形状を表わす基準面として、厚さ方向の積分  $\int \zeta d\zeta$  が 0 となる中央面を採用する。このシェルの中央面を曲率線座標で表わした場合のひずみ - 変位関係式を誘導する。

基準面への位置ベクトルを  $\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$  とし、点  $P$  における法線を  $\mathbf{n}$  とする。点  $P$  から  $\zeta$  だけ離れた点を  $Q$  とすると、位置ベクトル  $\overline{OQ} = \mathbf{R}$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta \mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2) \tag{5.9}$$

$\mathbf{R}$  の増分  $d\mathbf{R}$  は次式となる。

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{r} + \zeta d\mathbf{n} + \mathbf{n} d\zeta \tag{5.10}$$

上式 (5.10) において、 $d\mathbf{r}$ ,  $d\mathbf{n}$  は

$$d\mathbf{r} = \mathbf{g}_1 d\alpha_1 + \mathbf{g}_2 d\alpha_2 = A_1 \mathbf{t}_1 d\alpha_1 + A_2 \mathbf{t}_2 d\alpha_2, \quad d\mathbf{n} = \mathbf{n}_{,1} d\alpha_1 + \mathbf{n}_{,2} d\alpha_2 = \frac{A_1}{R_1} \mathbf{t}_1 d\alpha_1 + \frac{A_2}{R_2} \mathbf{t}_2 d\alpha_2$$

であるから、基準面から  $\zeta$  の距離にある曲面の第 1 基本形式は、

$$(ds)^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = A_1^2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)^2 (d\alpha_2)^2 + (d\zeta)^2 \tag{5.11}$$

となる。Codazzi 条件式を利用すると、

$$\left[ A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \right]_{,2} = \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) A_{1,2}, \quad \left[ A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \right]_{,1} = \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) A_{2,1} \tag{5.12}$$

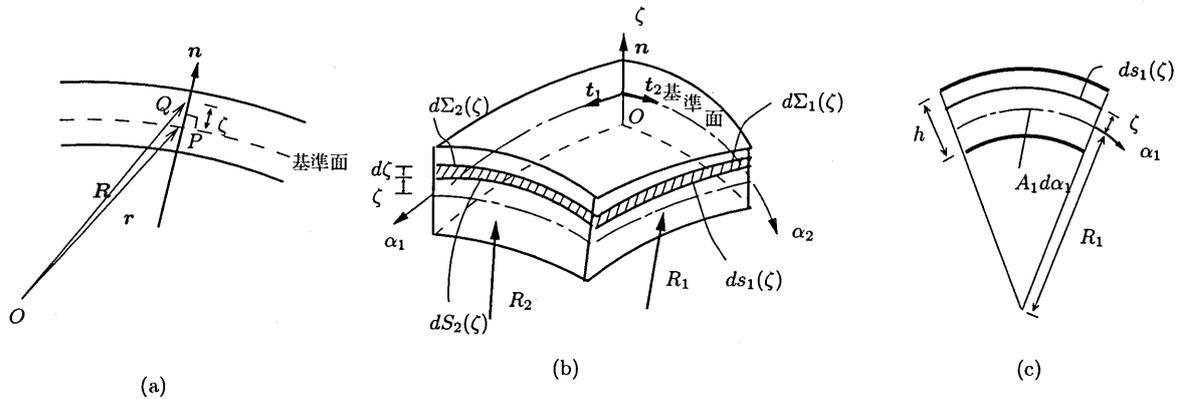


図 5.16: シェルの座標

となる。式 (5.11) より、基準面から  $\zeta$  の距離にある要素の要素端の長さは、

$$ds_1(\zeta) = A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\alpha_1, \quad ds_2(\zeta) = A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\alpha_2 \quad (5.13)$$

$d\zeta$  の幅をもつ要素端部の面積は、

$$d\Sigma_1(\zeta) = A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\alpha_1 d\zeta, \quad d\Sigma_2(\zeta) = A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\alpha_2 d\zeta \quad (5.14)$$

点  $Q$  における変位ベクトルを  $U(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)$  とし、 $t_1, t_2, n$  方向に成分表示すると、

$$U = U_1(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)t_1 + U_2(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)t_2 + W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)n \quad (5.15)$$

前節の式 (5.6) 中の諸量は次のように与えられる。

$$\alpha_1 = \alpha_1, \quad \alpha_2 = \alpha_2, \quad \alpha_3 = \zeta, \quad u_1 = U_1, \quad u_2 = U_2, \quad u_3 = W$$

$$g_{11} = A_1^2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)^2, \quad g_{22} = A_2^2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)^2, \quad g_{33} = 1$$

これらの式を式 (5.6) に代入すると、以下の式となる

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \left[ \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{A_1}{R_1} W \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \left[ \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{A_2}{R_2} W \right], \quad \varepsilon_n = \frac{\partial W}{\partial \zeta} \\ \gamma_{1n} &= \frac{1}{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{U_1}{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \right] \\ \gamma_{2n} &= \frac{1}{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{U_2}{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \right] \\ \gamma_{12} &= \frac{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)}{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{U_2}{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \right] + \frac{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)}{A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[ \frac{U_1}{A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

上式の誘導では、以下の関係式を用いている。

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \alpha_2} = 2 \left[ A_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \right] \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} = \frac{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial \zeta} = \frac{2A_1^2}{R_1} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \quad (5.17)$$

式 (5.16) においては、変位  $U_1, U_2, W$  は  $(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)$  の関数である。この変位を Kirchhoff-Love の仮定により  $(\alpha_1, \alpha_2)$  の関数とするとともに、式の簡略化を行う。まず、変位は厚さ方向に線形分布する (法線の直線仮定) とする。  $U_1, U_2, W$  を  $\zeta = 0$  を基準に Maclaurin 展開し、高次項を無視すると、

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = U_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) + \zeta U_1'(\alpha_1, \alpha_2, 0) + \cdots = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta \beta_1(\alpha_1, \alpha_2) \quad (5.18a)$$

$$U_2(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = U_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) + \zeta U_2'(\alpha_1, \alpha_2, 0) + \cdots = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta \beta_2(\alpha_1, \alpha_2) \quad (5.18b)$$

$$W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = W(\alpha_1, \alpha_2, 0) + \zeta W'(\alpha_1, \alpha_2, 0) + \cdots = w(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta w'(\alpha_1, \alpha_2) \quad (5.18c)$$

となる。次に、法線方向の伸縮を無視 ( $\varepsilon_n = 0$ ) すると、式 (5.16) 第 3 式を用いて次式が得られる。

$$\varepsilon_n = \frac{\partial W}{\partial \zeta} = w'(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad (5.19)$$

よって、 $W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = w(\alpha_1, \alpha_2)$  となる。したがって、変位  $U_1, U_2, W$  を基準面における変位  $u_1, u_2, w$ , および、回転  $\beta_1, \beta_2$  によって表すことができる。

次に面外せん断変形を無視する条件を考える。前提条件1より、 $\gamma_{1n} = 0$  および  $\gamma_{2n} = 0$  であるから、式(5.16)第4式へ式(5.18)を代入し、零とおくと、

$$\beta_1 = \frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \quad (5.20)$$

となる。以上により、 $\beta_1, \beta_2$  が変形  $u_1, u_2, w$  によって表されたことになる。つまり、面外せん断変形を無視することにより、未知量  $\beta_1, \beta_2$  が未知量でなくなる。

以上を式(5.16)に代入して整理すると、ひずみ-変位関係式として次式が求まる。

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_1}} (\varepsilon_1^0 + \zeta \kappa_1), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_2}} (\varepsilon_2^0 + \zeta \kappa_2), \quad \gamma_{12} = \frac{\omega_1 + \zeta \tau_1}{1 + \frac{\zeta}{R_1}} + \frac{\omega_2 + \zeta \tau_2}{1 + \frac{\zeta}{R_2}} \quad (5.21)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_2^0 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_2} \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, & \kappa_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\ \omega_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, & \omega_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\ \tau_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, & \tau_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \end{aligned}$$

また、

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \tau^* = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} \equiv \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2} \quad (5.22)$$

を導入すると、 $\gamma_{12}$  は次式で表される。

$$\gamma_{12} = \frac{1}{(1 + \frac{\zeta}{R_1})(1 + \frac{\zeta}{R_2})} \left[ \omega \left( 1 - \frac{\zeta^2}{R_1 R_2} \right) + 2\zeta \tau^* \left\{ 1 + \frac{\zeta}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right\} \right] \quad (5.23)$$

最後に、薄肉条件  $\zeta \ll 1$  を用いて簡略化すると、シェルのひずみ-変位関係式は次のように整理される。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \zeta \kappa_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + \zeta \kappa_2, \quad \gamma_{12} = \gamma_{12}^0 + \zeta \tau \quad (5.24)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_2^0 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_2} \\ \gamma_{12}^0 &= \omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\ \tau &= \tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, & \kappa_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\ \beta_1 &= \frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, & \beta_2 &= \frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \end{aligned}$$

### 5.3.3 応力と合応力および合モーメント

前項の工学的シェル理論の前提条件および仮定にしたがい、応力と合応力および合モーメントの関係を示す。ひずみを基準面における変位で表したのと同様に、応力も基準面において評価する。そのため合応力と合モーメントを導入する(図5.17参照)。

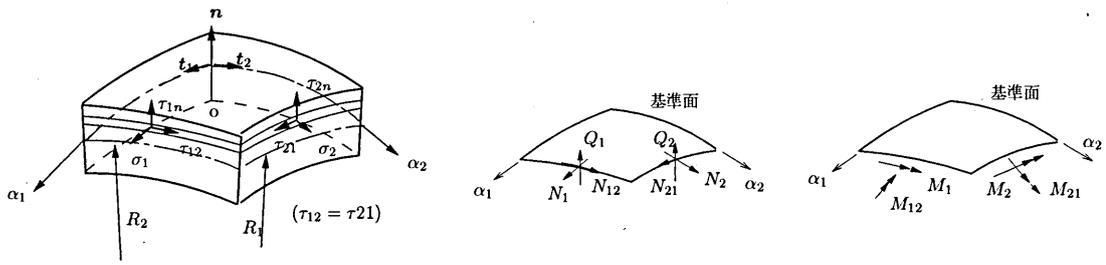


図 5.17: シェルに作用する応力と合応力および合モーメント

工学的シェル理論において、シェルの微小要素に作用する応力は、 $\alpha_1 = \text{const.}$  の面に作用している  $\sigma_1, \tau_{12}, \tau_{1n}$  と  $\alpha_2 = \text{const.}$  の面に作用している  $\sigma_2, \tau_{21}, \tau_{2n}$  である。シェル中央面に垂直な応力  $\sigma_n$  は 5.3.1 の仮定 3 より  $\sigma_n = 0$  である。また、法線方向の軸に関するモーメントのつり合いより、 $\tau_{12} = \tau_{21}$  が成立する。

微小要素に作用する垂直応力およびせん断応力を高さ(厚さ)  $h$  で積分することにより、面内力成分 ( $N_1, N_2, N_{12}$ ), せん断力成分 ( $Q_1, Q_2$ ), 曲げモーメント成分 ( $M_1, M_2$ ), および、ねじりモーメント成分 ( $M_{12}$ ) の合応力および合モーメントが定義される。つまり、力学的諸量は境界面のみ、すなわちシェルの中央面のみにおいて次式のように関係づけられる。

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_{12} \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \int_{\zeta} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \\ \tau_{1n} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta, \quad \begin{Bmatrix} N_2 \\ N_{21} \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \int_{\zeta} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \\ \tau_{2n} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\zeta \quad (5.25)$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \int_{\zeta} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \zeta d\zeta, \quad \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \int_{\zeta} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \zeta d\zeta \quad (5.26)$$

合応力、合モーメントはシェル断面において、基準面上の単位長さ当りの量として定義されるので、式 (5.25), (5.26) で定義された量は、それぞれ、力成分(単位長さ当りの力)は [kN/m], モーメント成分(単位長さ当りのモーメント)は [kN m/m] の次元をもつ。

中央面に平行な面内せん断力  $N_{12}, N_{21}$  あるいは、ねじりモーメント  $M_{12}, M_{21}$  は、せん断応力の共役性 ( $\tau_{12} = \tau_{21}$ ) が成立しても、一般には、 $\frac{1}{R_1} \neq \frac{1}{R_2}$  であるから同じではない(ただし、 $R_1 = R_2$  の球形シェルは例外で、 $N_{12} = N_{21}, M_{12} = M_{21}$  である)。しかしながら、Kirchhoff-Love の近似により  $\frac{\zeta}{R_1}, \frac{\zeta}{R_2}$  は無視できるので(仮定 4), 近似的に、 $N_{12} \doteq N_{21}, M_{12} \doteq M_{21}$  が成り立つ。以下では、 $N_{12} = N_{21}, M_{12} = M_{21}$  として進める。

### 5.3.4 構成方程式(一般化 Hooke の法則)

式 (5.7) において、曲率線方向を 1, 2, 法線方向を  $n$  とすると、

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{2n} \\ \gamma_{1n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_n \\ \tau_{12} \\ \tau_{2n} \\ \tau_{1n} \end{Bmatrix}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.27)$$

仮定 (式 (5.27) より  $E\varepsilon_n = -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_n$  であり,  $\varepsilon_n = \gamma_{1n} = \gamma_{2n} = 0$  は厳密には成立しないが, 薄肉シェルでは集中荷重点近傍以外では成立する) より,  $\varepsilon_n = \gamma_{1n} = \gamma_{2n} = 0$ , また  $\sigma_n \doteq 0$  であるから,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

逆の関係を求めると次式が得られる.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

式 (5.24) を式 (5.29) に代入すると,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 + \zeta\kappa_1 \\ \varepsilon_2^0 + \zeta\kappa_2 \\ \gamma_{12}^0 + \zeta\tau \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

式 (5.30) を式 (5.25), (5.26) に代入し積分すると,  $N_1, M_1, N_{12}$  は次式となる.

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^0 + \nu\varepsilon_2^0) + O\left(\frac{h^3}{R_2}\right), \quad M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu\kappa_2) + O\left(\frac{h^3}{R_2}\right), \quad N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{12}^0 + O\left(\frac{h^3}{R_2}\right)$$

下線部分は高次項であり省略する. 以上を整理すると合応力・合モーメントとひずみの関係式は次式となる.

$$\begin{aligned} N_1 &= K(\varepsilon_1^0 + \nu\varepsilon_2^0), & N_2 &= K(\varepsilon_2^0 + \nu\varepsilon_1^0), & N_{12} &= N_{21} = K \cdot \frac{1-\nu}{2} \gamma_{12}^0 = Gh\gamma_{12}^0 \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), & M_2 &= D(\kappa_2 + \nu\kappa_1), & M_{12} &= M_{21} = D \frac{1-\nu}{2} \tau = \frac{Gh^3}{12} \tau \end{aligned} \quad (5.31)$$

上式中の係数  $K$  と  $D$  は, それぞれ, 伸び剛性および曲げ剛性といわれ, シェルの解析では重要な量である.

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.32)$$

#### 断面力から応力の算定

前述の基礎方程式と未知量の関係 (図 5.15) で示したように, シェル解析では基準面での合応力, 合モーメントが未知量となり, 断面内任意点の応力は合応力, 合モーメントから計算することになる. 式 (5.31) より,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 + \nu\varepsilon_2^0 &= \frac{1}{K} N_1, & \varepsilon_2^0 + \nu\varepsilon_1^0 &= \frac{1}{K} N_2, & \gamma_{12}^0 &= \frac{2}{K(1-\nu)} N_{12} \\ \kappa_1 + \nu\kappa_2 &= \frac{1}{D} M_1, & \kappa_2 + \nu\kappa_1 &= \frac{1}{D} M_2, & \tau &= \frac{2}{D(1-\nu)} M_{12} \end{aligned}$$

式 (5.30) より,  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  を整理し, 上式を代入すると,

$$\sigma_1 = \frac{1}{h} N_1 + \frac{12}{h^3} M_1 \zeta, \quad \sigma_2 = \frac{1}{h} N_2 + \frac{12}{h^3} M_2 \zeta, \quad \tau_{12} = \frac{1}{h} N_{12} + \frac{12}{h^3} M_{12} \zeta \quad (5.33)$$

ここで, 面外せん断応力  $\tau_{1n}, \tau_{2n}$  および面外せん断力  $Q_1, Q_2$  について考えてみる. Hooke の法則から  $\tau_{1n} = G\gamma_{1n}, \tau_{2n} = G\gamma_{2n}$  が成立している. せん断変形を無視する ( $\gamma_{1n} = 0$  および  $\gamma_{2n} = 0$ ) ということは,  $n$  方向のせん断係数  $G$  を  $G = +\infty$  とおくことに相当する.  $\tau_{1n}, \tau_{2n}$  は存在し, 式 (5.25) より  $Q_1, Q_2$  も存在する.

$Q_1, Q_2$  が得られた場合に  $\tau_{1n}, \tau_{2n}$  を求める式としては、曲げモーメントやねじりモーメントが線形分布する場合には、次の矩形断面の梁に生じるせん断力分布と同一式となる。

$$\tau_{1n} = \frac{3Q_1}{2h} \left(1 - \frac{4}{h^2}\zeta^2\right), \quad \tau_{2n} = \frac{3Q_2}{2h} \left(1 - \frac{4}{h^2}\zeta^2\right) \quad (5.34)$$

### 5.3.5 つり合い方程式 (Hamilton の原理による誘導)

つり合い方程式の誘導法には、ベクトル方程式を利用する方法、Hamilton の原理や仮想仕事の原理に基づく方法などがある。ここでは、Hamilton の原理に基づいてつり合い方程式を誘導する。Hamilton の原理を用いると、境界条件も同時に誘導することができる。

$\Pi$  を全ポテンシャルエネルギー、 $K$  を運動エネルギーとすると、Hamilton の原理は次式で表現される。静的問題においては  $\delta\Pi = 0$ 、すなわち、 $\Pi$  は最小となり、ポテンシャルエネルギー最小の原理となる。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi - K) dt = 0 \quad (5.35)$$

物体力を  $F$ 、表面力を  $T$  で表わすと、 $\Pi$  は次式となる。

$$\Pi = U - \int_S T \cdot U dS - \int_V F \cdot U dV \quad (5.36)$$

上式中  $U$  は変位ベクトル、また、 $U$  はひずみエネルギーで、ひずみ密度関数  $A$  を用いて次式で与えられる。

$$U = \int_V A dV, \quad A = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_n \varepsilon_n + \tau_{12} \gamma_{12} + \tau_{1n} \gamma_{1n} + \tau_{2n} \gamma_{2n}) \quad (5.37)$$

運動エネルギー  $K$  は、 $U = (u_1 + \zeta\beta_1)t_1 + (u_2 + \zeta\beta_2)t_2 + wn$  を用い、さらに、 $\frac{\zeta}{R_1}, \frac{\zeta}{R_2}$  を省略して、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{U} \cdot \dot{U} dV = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \dot{U} \cdot \dot{U} A_1 A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta \\ &= \frac{h\rho}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[ \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{w}^2 + \frac{h^2}{12} (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

第1近似としては回転慣性項  $\frac{h^2}{12}(\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2)$  を省略する場合が多い。そのとき運動エネルギー  $K$  は次式となる。

$$K = \frac{h\rho}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} [\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{w}^2] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (5.39)$$

次に、全ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  を求める。まず、ひずみエネルギー  $U$  は式 (5.37) より次式となる。

$$U = \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} A A_1 A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta \quad (5.40)$$

シェル要素の基準面に作用している  $q$  (物体力、表面力) による仕事量  $W_s$  ( $s$  は表面) は次式となる。

$$W_s = \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} q \cdot U(\alpha_1, \alpha_2, 0) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} (q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_n w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (5.41)$$

シェル要素のシェル断面には、 $\alpha_1 = \text{const.}$  の断面に、 $\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}_{12}, \bar{\tau}_{1n}$  の表面応力が、また、 $\alpha_2 = \text{const.}$  の断面には、 $\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}_{21}, \bar{\tau}_{2n}$  の表面応力が作用している。- は、要素内部の応力と区別するために付けたものであ

る。  $\alpha_1 = \text{const.}$  の断面での仕事を  $W_{e1}$ ,  $\alpha_2 = \text{const.}$  の断面での仕事を  $W_{e2}$  ( $e$  は端部,  $2$  は  $\alpha_2$  を示す) で表すと,

$$\begin{aligned} W_{e1} &= \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} (\bar{\sigma}_1 U_1 + \bar{\tau}_{12} U_2 + \bar{\tau}_{1n} W) A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\alpha_2 d\zeta \\ &= \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} [\bar{\sigma}_1 (u_1 + \zeta \beta_1) + \bar{\sigma}_2 (u_2 + \zeta \beta_2) + \bar{\tau}_{1n} w] A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\alpha_2 d\zeta \\ &= \int_{\alpha_2} (\bar{N}_1 u_1 + \bar{N}_{12} u_2 + \bar{Q}_1 w + \bar{M}_1 \beta_1 + \bar{M}_{12} \beta_2) A_2 d\alpha_2 \end{aligned} \quad (5.42)$$

同様にして,

$$W_{e2} = \int_{\alpha_1} (\bar{N}_{21} u_1 + \bar{N}_2 u_2 + \bar{Q}_2 w + \bar{M}_{21} \beta_1 + \bar{M}_2 \beta_2) A_1 d\alpha_1 \quad (5.43)$$

$U, W_s, W_{e1}, W_{e2}, K$  を式 (5.35) へ代入すると, Hamilton の原理は次式となる.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U - W_s - W_{e1} - W_{e2} - K) dt = 0 \quad (5.44)$$

以下, 各エネルギーの変分を計算する. 式 (5.37) のひずみエネルギー密度関数の増分  $\delta A$  は次式となる.

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_1} \delta \varepsilon_1 + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_2} \delta \varepsilon_2 + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_n} \delta \varepsilon_n + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{12}} \delta \gamma_{12} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{1n}} \delta \gamma_{1n} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{2n}} \delta \gamma_{2n} \\ &= \sigma_1 \delta \varepsilon_1 + \sigma_2 \delta \varepsilon_2 + \sigma_n \delta \varepsilon_n + \tau_{12} \delta \gamma_{12} + \tau_{1n} \delta \gamma_{1n} + \tau_{2n} \delta \gamma_{2n} \end{aligned} \quad (5.45)$$

上式で  $\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_1} = \sigma_1$  などは, Hooke の法則を利用して  $A$  をひずみの関数とし, 偏微分を行った後, 再度, Hooke の法則を利用して導くことができる. 上式 (5.45) を用いると  $\delta U$  は次式となる.

$$\delta U = \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} (\sigma_1 \delta \varepsilon_1 + \sigma_2 \delta \varepsilon_2 + \tau_{12} \delta \gamma_{12} + \tau_{1n} \delta \gamma_{1n} + \tau_{2n} \delta \gamma_{2n}) A_1 A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta \quad (5.46)$$

式 (5.16) および (5.18) より,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_1}} \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R_1} + \zeta \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \right]$$

となるので,

$$\delta \varepsilon_1 = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_1}} \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\delta u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\delta w}{R_1} + \zeta \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\delta \beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \right] \quad (5.47)$$

上式を用いると, 式 (5.46) の右辺 ( ) 内の第 1 項は次式となる.

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} \left[ \sigma_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_1} + \delta u_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta w \right) + \zeta \sigma_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_1} + \delta \beta_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \right] \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta \\ &= \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[ N_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_1} + \delta u_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta w \right) + M_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_1} + \delta \beta_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \right] d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned} \quad (5.48)$$

同様の誘導を第 2 項以降にも行って整理すると,

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left[ N_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_1} + \delta u_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta w \right) + M_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_1} + \delta \beta_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \right. \\ &\quad + N_2 \left( A_1 \frac{\partial \delta u_2}{\partial \alpha_2} + \delta u_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{A_1 A_2}{R_2} \delta w \right) + M_2 \left( A_1 \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \alpha_2} + \delta \beta_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \\ &\quad + N_{12} \left( A_2 \frac{\partial \delta u_2}{\partial \alpha_1} - \delta u_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + M_{12} \left( A_2 \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \alpha_1} - \delta \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \\ &\quad + N_{21} \left( A_1 \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_2} - \delta u_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + M_{21} \left( A_1 \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_2} - \delta \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \\ &\quad \left. + Q_1 \left\{ A_2 \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left( \delta \beta_1 - \frac{\delta u_1}{R_1} \right) \right\} + Q_2 \left\{ A_1 \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left( \delta \beta_2 - \frac{\delta u_2}{R_2} \right) \right\} \right] d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned} \quad (5.49)$$

上式の誘導においては,  $\gamma_{1n} = 0$ ,  $\gamma_{2n} = 0$  (せん断変形無視) は用いていない. もし,  $\gamma_{1n} = 0$  とすると, 式 (5.24) より,  $\delta\beta_1 = \delta u_1/R_1 - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}$  となり,  $Q_1$  の項は零となる.  $Q_2$  の項も同様に零となる. ここでは,  $\delta\beta_1$  と  $\delta\beta_2$  は独立とする.  $\delta W_s$ ,  $\delta W_{e1}$ ,  $\delta W_{e2}$ ,  $\delta K$  を求めると,

$$\delta W_s = \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_n \delta w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (5.50a)$$

$$\delta W_{e1} = \int_{\alpha_2} (\bar{N}_1 \delta u_1 + \bar{N}_{12} \delta u_2 + \bar{Q}_1 \delta w + \bar{M}_1 \delta\beta_1 + \bar{M}_{12} \delta\beta_2) A_2 d\alpha_2 \quad (5.50b)$$

$$\delta W_{e2} = \int_{\alpha_1} (\bar{N}_{21} \delta u_1 + \bar{N}_2 \delta u_2 + \bar{Q}_2 \delta w + \bar{M}_{21} \delta\beta_1 + \bar{M}_2 \delta\beta_2) A_1 d\alpha_1 \quad (5.50c)$$

$$\delta K = \rho h \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} [\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{w} \delta \dot{w}] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (5.50d)$$

となる. 偏微分の項  $\frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_1}$ ,  $\frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_1}$ , ... に部分積分を用いると, 例えば, 式 (5.49) の第 1 項は,

$$\int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} (N_1 A_2) \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_{\alpha_2} N_1 A_2 \delta u_1 d\alpha_2 - \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \frac{\partial (N_1 A_2)}{\partial \alpha_1} \delta u_1 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (5.51)$$

となる. 他の項についても同様の計算をしておく.

次に式 (5.50 d) 式を式 (5.35) に代入し, 部分積分を行うと,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta K dt &= \rho h \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} [\dot{u}_1 \delta u_1 + \dot{u}_2 \delta u_2 + \dot{w} \delta w]_{t_0}^{t_1} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \\ &\quad - \rho h \int_{t_0}^{t_1} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} (\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_2 \delta u_2 + \ddot{w} \delta w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt \end{aligned}$$

となる.  $\delta u_1$ ,  $\delta u_2$ ,  $\delta w$  は  $t = t_0$ ,  $t_1$  において零であるような仮想変位を選ぶので, 結局, 次式となる.

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K dt = -\rho h \int_{t_0}^{t_1} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} (\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_2 \delta u_2 + \ddot{w} \delta w) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt \quad (5.52)$$

式 (5.51) および式 (5.52) などを式 (5.44) へ代入して整理すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left\{ \left[ \frac{\partial N_1 A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{21} A_1}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + Q_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} + (q_1 - \rho h \ddot{u}_1) A_1 A_2 \right] \delta u_1 \right. \\ &+ \left[ \frac{\partial N_{12} A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_2 A_1}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + Q_2 \frac{A_1 A_2}{R_1} + (q_2 - \rho h \ddot{u}_2) A_1 A_2 \right] \delta u_2 \\ &+ \left[ \frac{\partial Q_1 A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2 A_1}{\partial \alpha_2} - \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) A_1 A_2 + (q_n - \rho h \ddot{w}) A_1 A_2 \right] \delta w \\ &+ \left[ \frac{\partial M_1 A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{21} A_1}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - Q_1 A_1 A_2 \right] \delta\beta_1 \\ &+ \left. \left[ \frac{\partial M_{12} A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_2 A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - Q_2 A_1 A_2 \right] \delta\beta_2 \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\alpha_1} [(\bar{N}_2 - N_2) \delta u_2 + (\bar{N}_{21} - N_{21}) \delta u_1 + (\bar{Q}_2 - Q_2) \delta w \\ &\quad + (\bar{M}_2 - M_2) \delta\beta_2 + (\bar{M}_{21} - M_{21}) \delta\beta_1] A_1 d\alpha_1 dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\alpha_2} [(\bar{N}_1 - N_1) \delta u_1 + (\bar{N}_{12} - N_{12}) \delta u_2 + (\bar{Q}_1 - Q_1) \delta w \\ &\quad + (\bar{M}_1 - M_1) \delta\beta_2 + (\bar{M}_{12} - M_{12}) \delta\beta_2] A_2 d\alpha_2 dt = 0 \quad (5.53) \end{aligned}$$

上式において,  $\delta u_1$ ,  $\delta u_2$ ,  $\delta w$  の係数を零と置くことにより, 式 (5.54) が得られる. また,  $\delta\beta_1$ ,  $\delta\beta_2$  の係数を零と置くことにより, 式 (5.55) が求まる. 式 (5.54), (5.55) を用いて, 図 5.18 に示すような座標系にお

る種々のシェル形状の基礎式を誘導することができる。回転シェル，球形シェル，円筒シェルおよび円錐シェルの基礎式を表 5.4 に示す。さらに，残りの部分からは境界条件が誘導されるが，それについては次項で述べる。

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial N_{12} A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{21} A_1}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] + \frac{Q_1}{R_1} + q_1 = \rho h \ddot{u}_1 \quad (5.54a)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial N_{12} A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{21} A_1}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] + \frac{Q_2}{R_2} + q_2 = \rho h \ddot{u}_2 \quad (5.54b)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial Q_1 A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2 A_1}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + q_n = \rho h \ddot{w} \quad (5.54c)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial M_{12} A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{21} A_1}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] - Q_1 = 0 \quad (5.55a)$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial M_{12} A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{21} A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] - Q_2 = 0 \quad (5.55b)$$

$$N_{12} - N_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0 \quad (5.55c)$$

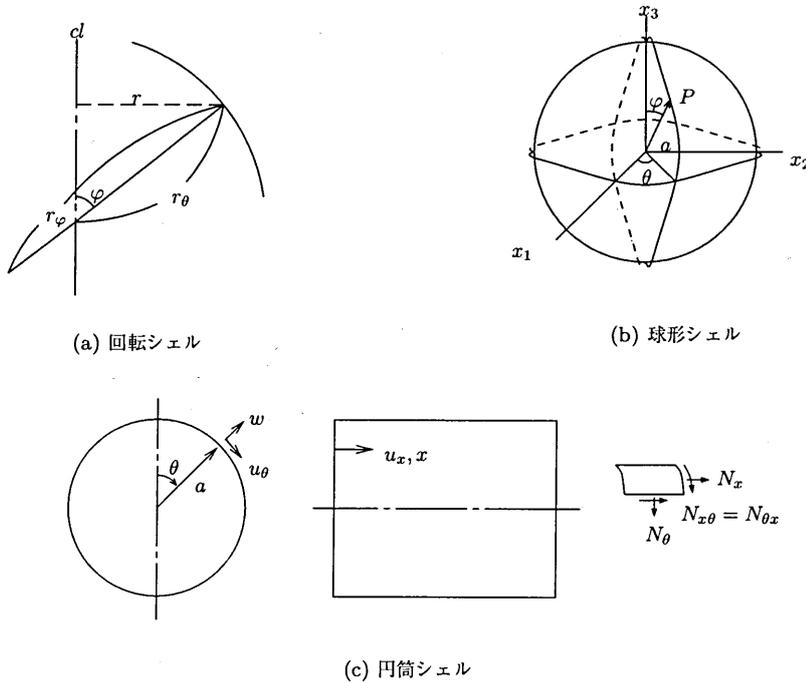


図 5.18: シェルの座標

### 5.3.6 境界条件式

せん断ひずみ  $\gamma_{1n}$ ,  $\gamma_{2n}$  を零とする場合には，境界条件として換算せん断力を利用することになる。平板の場合には，面に垂直な方向の等価せん断力のみを考慮すればよかったが，シェルの場合には，面内方向の等価せん断力も必要となる。式 (5.53) を用いると，板と同様に誘導することができる。ここでは結果のみを示す。

(1) 換算せん断力

図 5.19を参照して,  $n$  方向の力のつり合いより,

$$V_1 ds_2 = Q_1 ds_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \cos \varphi$$

上式に  $\cos \varphi \doteq 1$ ,  $ds_2 = A_2 d\alpha_2$  を代入すると,

$$V_1 = Q_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2}, \quad V_2 = Q_2 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_1} \tag{5.56}$$

$t_2$  方向の力のつり合いより,

$$T_{12} ds_2 = N_{12} ds_2 + (M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2) \sin \varphi + M_{12} \sin \varphi \doteq N_{12} ds_2 + 2M_{12} \varphi$$

$2\varphi R_2 = ds_2$  を利用すると, 面内方向の換算せん断力  $T_{12}$ ,  $T_{21}$  は

$$T_{12} = N_{12} + \frac{M_{12}}{R_2}, \quad T_{21} = N_{21} + \frac{M_{21}}{R_1} \tag{5.57}$$

(2) 境界条件のまとめ ( $n, t = 1, 2$ )

- 自由端 :  $\bar{N}_n = \bar{V}_n = \bar{T}_{nt} = \bar{M}_n = 0$
- 固定端 :  $\bar{u}_n = \bar{u}_t = \bar{w}_n = \bar{\beta}_n = 0$
- 単純支持 :  $\bar{M}_n = \bar{u}_n = \bar{u}_t = \bar{w}_n = 0$
- 法線方向ローラー支持 :  $\bar{M}_n = \bar{V}_n = \bar{u}_n = \bar{u}_t = 0$
- 閉じたシェル : 解の周期性が境界条件に用いられる

例として回転シェルの境界条件を以下に示す.

$$V_\varphi = Q_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta}, \quad V_\theta = Q_\theta + \frac{1}{r_\varphi} \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \varphi}, \quad T_{\varphi\theta} = N_{\varphi\theta} + \frac{1}{r_\theta} M_{\varphi\theta}, \quad T_{\theta\varphi} = N_{\theta\varphi} + \frac{1}{r_\varphi} M_{\varphi\theta}$$

( $\varphi = \text{const.}$ の境界) ( $\theta = \text{const.}$ の境界)

$$N_\varphi = \bar{N}_\varphi \text{ or } u_\varphi = \bar{u}_\varphi, \quad T_{\varphi\theta} = \bar{T}_{\varphi\theta} \text{ or } u_\theta = \bar{u}_\theta, \quad N_\theta = \bar{N}_\theta \text{ or } u_\theta = \bar{u}_\theta, \quad T_{\theta\varphi} = \bar{T}_{\theta\varphi} \text{ or } u_\varphi = \bar{u}_\varphi$$

$$V_\varphi = \bar{V}_\varphi \text{ or } w = \bar{w}, \quad M_\varphi = \bar{M}_\varphi \text{ or } \beta_\varphi = \bar{\beta}_\varphi, \quad V_\theta = \bar{V}_\theta \text{ or } w = \bar{w}, \quad M_\theta = \bar{M}_\theta \text{ or } \beta_\theta = \bar{\beta}_\theta$$

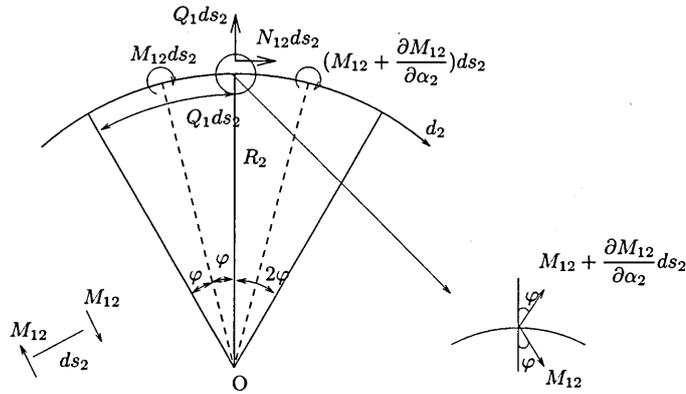


図 5.19: シェルの換算せん断力

表 5.4: 種々のシェルの基礎式

シェル形状	曲面の性質	ひずみ-変位関係式	合力, 合モーメント-ひずみ関係式	つり合い式
回転シェル	<p>第1基本形式: <math>(ds)^2 = r_0^2(d\varphi)^2 + r^2(d\theta)^2</math></p> <p><math>\alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = \theta</math></p> <p><math>A_1 = R_1 = r_\varphi</math></p> <p><math>A_2 = R_2 = r = r_0 \sin \varphi</math></p> <p><math>R_2 = r_0</math></p>	$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + w \right) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\varphi \cos \varphi + w \sin \varphi \\ \gamma_{\varphi\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} (u_\varphi \cos \varphi - \frac{\partial w}{\partial \theta}) \\ \kappa_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \varphi} \\ \kappa_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \beta_\varphi \cos \varphi \\ \tau = \frac{1}{r_\varphi} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \beta_\theta \cos \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \theta} \\ \beta_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} (u_\varphi - \frac{\partial w}{\partial \varphi}) \\ \beta_\theta = \frac{1}{r} (u_\theta \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial \theta}) \end{cases}$ $\begin{cases} \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^0 + \zeta \kappa_\varphi \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + \zeta \kappa_\theta \\ \gamma_{\varphi\theta} = \gamma_{\varphi\theta}^0 + \zeta \tau \end{cases}$	$\begin{cases} N_\varphi \\ N_\theta \\ N_{\varphi\theta} \end{cases} = K \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\varphi^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{\varphi\theta}^0 \end{Bmatrix}$ $\begin{cases} M_\varphi \\ M_\theta \\ M_{\varphi\theta} \end{cases} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_\varphi \\ \kappa_\theta \\ \tau \end{Bmatrix}$ <p><math>K = \frac{Eh}{1-\nu^2}</math>   <math>D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}</math></p>	$\frac{\partial(rN_\varphi)}{\partial \varphi} + r_\varphi \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - N_{\varphi\theta} r_\varphi \cos \varphi + rQ_\varphi + r r_\varphi q_\varphi = 0$ $\frac{\partial(rN_\theta)}{\partial \varphi} + r_\varphi \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + N_{\varphi\theta} r_\varphi \cos \varphi + r_\varphi Q_\theta \sin \varphi + r r_\varphi q_\theta = 0$ $\frac{\partial(rQ_\varphi)}{\partial \varphi} + r_\varphi \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - r r_\varphi \left( \frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} \right) + r r_\varphi q_n = 0$ $\frac{\partial(rM_\varphi)}{\partial \varphi} + r_\varphi \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - M_{\varphi\theta} r_\varphi \cos \varphi - r r_\varphi Q_\varphi = 0$ $\frac{\partial(rM_\theta)}{\partial \varphi} + r_\varphi \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + M_{\varphi\theta} r_\varphi \cos \varphi - r r_\varphi Q_\theta = 0$ $\frac{\partial(N_\varphi \sin \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - N_\theta \cos \varphi + Q_\varphi \sin \varphi + a \sin \varphi \cdot q_\varphi = 0$ $\frac{\partial(N_\theta \sin \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_\theta \cos \varphi + Q_\theta \sin \varphi + a \sin \varphi \cdot q_\theta = 0$ $\frac{\partial(Q_\varphi \sin \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - (N_\varphi + N_\theta) \sin \varphi + a \sin \varphi \cdot q_n = 0$ $\frac{\partial(M_\varphi \sin \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - M_\theta \cos \varphi - Q_\varphi a \sin \varphi = 0$ $\frac{\partial(M_\theta \sin \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + M_{\varphi\theta} \cos \varphi - Q_\theta a \sin \varphi = 0$
球形シェル	<p>回転シェルの式で,</p> <p><math>r_\varphi = r_\theta = a</math></p> <p><math>r = a \sin \varphi</math></p> <p>と置く.</p>	$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^0 + \zeta \kappa_\varphi \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + \zeta \kappa_\theta \\ \gamma_{\varphi\theta} = \gamma_{\varphi\theta}^0 + \zeta \tau \end{cases}$	<p>同上</p>	$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + q_x = 0$ $\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{a} + q_\theta = 0$ $\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{a} + q_n = 0$ $\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_x = 0$ $\frac{\partial M_\theta}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta = 0$
円筒シェル	<p>回転シェルの式で,</p> <p><math>\varphi = x, \theta = \theta</math></p> <p><math>r_\varphi = \infty, \varphi = \frac{x}{r}</math></p> <p><math>r = r_\theta = a = \text{一定}, dx = r_\varphi d\varphi</math></p> <p><math>\cos \varphi = 0</math></p> <p>と置く.</p>	$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \zeta \kappa_x \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + \zeta \kappa_\theta \\ \gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta}^0 + \zeta \tau \end{cases}$	<p>同上</p>	$\frac{\partial(x \sin \alpha N_x)}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - N_\theta \sin \alpha + x \sin \alpha q_x = 0$ $\frac{\partial(x \sin \alpha N_\theta)}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_\theta \cos \alpha + Q_\theta \sin \alpha + x \sin \alpha q_\theta = 0$ $\frac{\partial(x \sin \alpha Q_x)}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta \cos \alpha + x \sin \alpha q_n = 0$ $\frac{\partial(x \sin \alpha M_x)}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - M_\theta \sin \alpha - Q_x x \sin \alpha = 0$ $\frac{\partial(x \sin \alpha M_\theta)}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + M_\theta \cos \alpha - Q_\theta x \sin \alpha = 0$

## 5.4 シェル構造の膜理論

## 5.4.1 膜理論の基礎方程式

工学的シェル理論の基礎方程式 (5.54), (5.55) において, 合モーメント  $M = 0$ , および, せん断力  $Q = 0$  とすることにより, 曲率線座標系における膜理論の基礎方程式 (5.59) ~ (5.61) が得られる. 前節の結果を利用して回転シェル, 球形シェル, 円筒シェルの基礎方程式を導くと表 5.5 の基礎方程式が得られる.

つり合い式において未知量 ( $N_1, N_2, N_{12}$ ) は 3 個, 方程式も 3 個であるので, 膜理論は静定問題に属し, つり合い式のみで合応力を決定することができる. すなわち, つり合い式 (5.59) より, 面内 (膜) 力  $N_1, N_{12} = N_{21}, N_2$  を決定し, 次に合応力-ひずみ関係式 (5.60) より, ひずみ  $\varepsilon_1^0, \gamma_{12}^0, \varepsilon_2^0$  を決定でき, さらに, ひずみ-変位関係式 (5.61) より変位  $u_1, u_2, w$  を決定することができる.

## ● つり合い式

$$\frac{\partial N_1 A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{21} A_1}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + q_1 A_1 A_2 = 0 \quad (5.59a)$$

$$\frac{\partial N_{12} A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_2 A_1}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + q_2 A_1 A_2 = 0 \quad (5.59b)$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - q_n = 0 \quad (5.59c)$$

## ● 合応力-ひずみ関係式

$$N_1 = K(\varepsilon_1^0 + \nu \varepsilon_2^0), \quad N_2 = K(\varepsilon_2^0 + \nu \varepsilon_1^0), \quad N_{12} = N_{21} = Gh\gamma_{12}^0 \quad (5.60)$$

## ● ひずみ-変位関係式

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R_1} \quad (5.61a)$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_2} \quad (5.61b)$$

$$\gamma_{12}^0 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1} \right) \quad (5.61c)$$

表 5.5: シェルの膜理論の基礎方程式

シェルの種類	つり合い式	合応力-ひずみ関係式	ひずみ-変位関係式
回転シェル (任意荷重)	$\frac{\partial(rN_\varphi)}{\partial \varphi} + r_\varphi \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - N_\theta r_\varphi \cos \varphi + r r_\varphi q_\varphi = 0$ $\frac{\partial(rN_{\varphi\theta})}{\partial \varphi} + r_\varphi \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_{\varphi\theta} r_\varphi \cos \varphi + r r_\varphi q_\theta = 0$ $\frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} - q_n = 0$	$N_\varphi = K(\varepsilon_\varphi^0 + \nu \varepsilon_\theta^0)$ $N_\theta = K(\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_\varphi^0)$ $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = Gh\gamma_{\varphi\theta}^0$ $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$	$\varepsilon_\varphi^0 = \frac{1}{r_\varphi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + w \right)$ $\varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\varphi \cos \varphi + w \sin \varphi \right)$ $\gamma_{\varphi\theta}^0 = \frac{1}{r_\varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \left( u_\theta \cos \varphi - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right)$
円筒シェル	$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + q_x = 0$ $\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + q_\theta = 0$ $N_\theta - a q_n = 0$	$N_x = K(\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0)$ $N_\theta = K(\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0)$ $N_{x\theta} = N_{\theta x} = Gh\gamma_{x\theta}^0$ $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$	$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ $\varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + w \right)$ $\gamma_{x\theta}^0 = \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_x}{\partial \theta}$
円錐シェル	$\frac{\partial(xN_x)}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} - N_\theta + q_x x = 0$ $\frac{\partial(xN_{x\theta})}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_{x\theta} + q_\theta x = 0$ $N_\theta - q_n x \tan \alpha = 0$	同上	$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ $\varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{x \sin \alpha} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_x \sin \alpha + w \cos \alpha \right)$ $\gamma_{x\theta}^0 = \frac{\partial u_\theta}{\partial x} - \frac{1}{x \sin \alpha} \left( u_\theta \sin \alpha - \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right)$

## 5.4.2 軸対称荷重を受ける回転シェルの膜理論解

軸対称荷重が作用する回転シェルの例として膜理論解を求めてみよう。軸対称荷重は  $q_\theta = 0$  で表わされる。同時に、 $\theta$  に関する偏微分項も 0 となる。軸対称荷重を受けると軸対称変形をすることから  $u_\theta = 0$  である。表 5.5 の回転シェルの項を参考にして、 $u_\theta = 0$  および  $\partial(\dots)/\partial\theta = 0$  より、 $\gamma_{\varphi\theta}^0 = 0$ 、 $N_{\varphi\theta} = 0$  となる。以上の関係を基礎式に適用すると、軸対称荷重を受ける回転シェルの基礎方程式が以下のように得られる。

$$\text{つり合い式} \quad \frac{d(rN_\varphi)}{d\varphi} - N_\theta r_\varphi \cos\varphi + rr_\varphi q_\varphi = 0, \quad \frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} - q_n = 0 \quad (5.62)$$

$$\text{合応力 - ひずみ関係式} \quad N_\varphi = K(\varepsilon_\varphi^0 + \nu\varepsilon_\theta^0), \quad N_\theta = K(\varepsilon_\theta^0 + \nu\varepsilon_\varphi^0) \quad (5.63)$$

$$\text{ひずみ - 変位関係式} \quad \varepsilon_\varphi^0 = \frac{1}{r_\varphi} \left( \frac{du_\varphi}{d\varphi} + w \right), \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{r} (u_\varphi \cos\varphi + w \sin\varphi) \quad (5.64)$$

つり合い式 (5.63) 第 1 式より、

$$N_\theta = r_\theta q_n - \frac{r_\theta}{r_\varphi} N_\varphi \quad (5.65)$$

上式を式 (5.63) 第 1 式に代入し、 $r = r_\theta \sin\varphi$  を用いると、

$$\frac{d(r \sin\varphi N_\varphi)}{d\varphi} = -rr_\varphi (q_\varphi \sin\varphi - q_n \cos\varphi)$$

となる。積分することにより、 $N_\varphi$  は次式で得られる。

$$N_\varphi = -\frac{1}{r \sin\varphi} \left[ C_1 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} rr_\varphi (q_\varphi \sin\varphi - q_n \cos\varphi) d\varphi \right] \quad (5.66)$$

上式 (5.66) に含まれる積分定数  $C_1$  は、全鉛直荷重を  $P$  と表すと次式で与えられる (図 5.20 参照)。

$$P = 2\pi C_1 \quad (5.67)$$

次に変位を求めよう。 $r = r_\theta \sin\varphi$  を式 (5.64) 第 2 式に代入し、その結果を第 1 式に代入し、さらに式 (5.63) の逆関係式を代入すると、次の微分方程式が得られる。

$$\frac{du_\varphi}{d\varphi} - u_\varphi \cot\varphi = \frac{N_\varphi}{Eh} (r_\varphi + \nu r_\theta) - \frac{N_\theta}{Eh} (r_\theta + \nu r_\varphi) \equiv F(\varphi) \quad (5.68)$$

この微分方程式を解くと、 $u_\varphi$  および  $w$  が求まる。

$$u_\varphi = \sin\varphi \left[ C_2 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{F(\varphi)}{\sin\varphi} d\varphi \right] \quad (5.69a)$$

$$w = \frac{r_\theta}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi) - \cos\varphi \left[ C_2 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{F(\varphi)}{\sin\varphi} d\varphi \right] \quad (5.69b)$$

上式の積分定数  $C_2$  は回転軸方向の剛体変位を表す。多くの場合、弾性変形を問題とするので  $C_2 = 0$  とおくことができる。

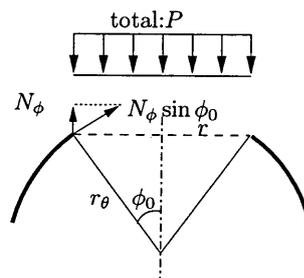


図 5.20: 軸対称荷重を受ける回転シェル

ここでは、軸対称荷重を受ける回転シェルを例として膜理論解を示したが、任意荷重を受ける場合には、荷重および膜応力を Fourier 級数に展開することで解析可能となり、また、球形シェル、円筒シェル、円錐シェルなども同様に解析することができる。これらについては多くのシェル構造のテキスト<sup>15)16)</sup>や公式集<sup>17)</sup>に詳細に記述されている。

以上のように、シェルの膜理論解は静定問題となり、容易に解を求めることができる。しかしながら、シェルの膜理論解は曲げモーメントおよび面外せん断力を無視した理論であり、シェル構造の特性を正確に与える解ではない。例えば、集中荷重が天頂部に作用するドームの場合、 $N_\theta$ ,  $N_\varphi$  は集中荷重作用点で発散する結果となる。また、液体圧が作用する円筒容器の場合、境界条件を満足させることができない。これらは膜理論の限界であり、さらなる精密性を追及するには、次節で述べる曲げモーメントおよび面外せん断力を無視しない曲げ理論を用いなければならない。

## 5.5 シェルの曲げ理論

### 5.5.1 軸対称荷重を受ける回転シェルの曲げ理論

本節では軸対称荷重を受ける回転シェルを Meissner 理論に従って取り扱う。表 5.4 の回転シェルの基礎方程式の各式に軸対称条件 ( $\partial(\quad)/\partial\theta = 0$ ,  $u_\theta = Q_\theta = N_{\varphi\theta} = M_{\varphi\theta} = q_\theta = 0$ ) を用いると次式となる。

- ひずみ - 変位関係式

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi^0 &= \frac{1}{r_\varphi} \left( \frac{du_\varphi}{d\varphi} + w \right), & \varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{r_\theta} (u_\varphi \cot \varphi + w), & \gamma_{\varphi\theta}^0 &= 0, \\ \kappa_\varphi &= \frac{1}{r_\varphi} \frac{d\beta_\varphi}{d\varphi}, & \kappa_\theta &= \frac{1}{r_\theta} \beta_\varphi \cot \varphi, & \tau &= 0, & \beta_\varphi &= \frac{1}{r_\varphi} \left( u_\varphi - \frac{dw}{d\varphi} \right), & \beta_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

- 合応力・合モーメント - ひずみ関係式

$$N_\varphi = K(\varepsilon_\varphi^0 + \nu\varepsilon_\theta^0), \quad N_\theta = K(\nu\varepsilon_\varphi^0 + \varepsilon_\theta^0), \quad M_\varphi = D(\kappa_\varphi + \nu\kappa_\theta), \quad M_\theta = D(\nu\kappa_\varphi + \kappa_\theta) \quad (5.71)$$

- つり合い式

$$\begin{aligned} \frac{d(rN_\varphi)}{d\varphi} - N_\theta r_\varphi \cos \varphi + rQ_\varphi + rr_\varphi q_\varphi &= 0, & \frac{d(rQ_\varphi)}{d\varphi} - rr_\varphi \left( \frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} \right) + rr_\varphi q_n &= 0 \\ \frac{d(rM_\varphi)}{d\varphi} - M_\theta r_\varphi \cos \varphi - rr_\varphi Q_\varphi &= 0, & Q_\theta = N_{\varphi\theta} = M_{\varphi\theta} = q_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (5.72)$$

- $\varphi = \text{const.}$  での境界条件。  $M_{\varphi\theta} = 0$  より  $V_\varphi = Q_\varphi$  である。

$$N_\varphi = \bar{N}_\varphi, \quad Q_\varphi = \bar{Q}_\varphi, \quad M_\varphi = \bar{M}_\varphi \quad \text{or} \quad u_\varphi = \bar{u}_\varphi, \quad w = \bar{w}, \quad \beta_\varphi = \bar{\beta}_\varphi$$

上記の基礎方程式における 12 個の未知量を  $\beta_\varphi$  と  $Q_\varphi$  の 2 個の未知量とする微分方程式へ変換する方法を Meissner 理論という。式 (5.70) を式 (5.71) に代入し、さらにつり合い式 (5.72) 第 3 式に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{r_\theta}{r_\varphi} \frac{d^2 \beta_\varphi}{d\varphi^2} + \left[ \frac{r_\theta}{r_\varphi} \cot \varphi + \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r_\theta}{r_\varphi} \right) \right] \frac{d\beta_\varphi}{d\varphi} - \left[ \frac{r_\varphi}{r_\theta} \cot^2 \varphi + \nu \right] \beta_\varphi = \frac{r_\theta r_\varphi Q_\varphi}{D} \quad (5.73)$$

また、式 (5.71) から得られる  $\varepsilon_\varphi^0$ ,  $\varepsilon_\theta^0$  を式 (5.70) の第 1,2 式から得られる式に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{du_\varphi}{d\varphi} - u_\varphi \cot \varphi = \frac{N_\varphi}{Eh} (r_\varphi + \nu r_\theta) - \frac{N_\theta}{Eh} (r_\theta + \nu r_\varphi) \equiv F(\varphi) \quad (5.74)$$

上式 (5.74) の解は

$$u_\varphi = \sin \varphi \left[ C_2 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{F(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi \right] \quad (5.75)$$

となる。\$C\_2\$ は回転軸方向の剛体変位を表わしているのので、\$C\_2 = 0\$ とおくと、\$F(\varphi)\$ が与えられたときの \$u\_\varphi, w\$ は次式となる。

$$u_\varphi = \sin \varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{F(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi, \quad w = \frac{r_\theta}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi) - \cos \varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{F(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi \quad (5.76)$$

次に、式 (5.70) および式 (5.71) の関係式から得られる次式

$$w + u_\varphi \cot \varphi = \frac{r_\theta}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi) \quad (5.77)$$

を \$\varphi\$ で微分し、式 (5.74) \$\times \cot \varphi\$ から引き、式 (5.70) 第5式を用いると

$$r_\varphi \beta_\varphi = F(\varphi) \cot \varphi - \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{r_\theta}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi) \right] \quad (5.78)$$

が得られる。さらに、上式 (5.78) の \$N\_\theta, N\_\varphi\$ は式 (5.72) 第1,2式を変形して、次式のように \$Q\_\varphi\$ で表すことができる。

$$N_\varphi = Q_\varphi \cot \varphi - F_1(\varphi), \quad N_\theta = \frac{1}{r_\varphi} \frac{d(r_\theta Q_\varphi)}{d\varphi} + \frac{r_\theta}{r_\varphi} F_1(\varphi) + r_\theta q_n \quad (5.79)$$

$$\text{ここに、} F_1(\varphi) = \frac{1}{r \sin \varphi} \left[ C_1 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} r r_\varphi (-q_n \cos \varphi + q_\varphi \sin \varphi) d\varphi \right]$$

上式中の \$C\_1\$ はシェル端に作用する軸方向合力である。上式 (5.79) を式 (5.78) に代入して \$N\_\theta, N\_\varphi\$ を消去すると次式が得られる。

$$\frac{r_\theta}{r_\varphi} \frac{d^2(r_\theta Q_\varphi)}{d\varphi^2} + \left[ \frac{r_\theta}{r_\varphi} \cot \varphi + \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r_\theta}{r_\varphi} \right) \right] \frac{d(r_\theta Q_\varphi)}{d\varphi} - \left[ \frac{r_\varphi}{r_\theta} \cot^2 \varphi - \nu \right] (r_\theta Q_\varphi) = -Eh r_\varphi \beta_\varphi + G(\varphi) \quad (5.80)$$

$$G(\varphi) = -\frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{r_\theta^2}{r_\varphi} F_1(\varphi) + r_\theta^2 q_n + \nu r_\theta F_1(\varphi) \right] \\ - \cot \varphi \left[ (r_\varphi + \nu r_\theta) F_1(\varphi) + (r_\theta + \nu r_\varphi) \left( \frac{r_\theta}{r_\varphi} F_1(\varphi) + q_n r_\theta \right) \right]$$

式 (5.73) と式 (5.80) が \$Q\_\varphi\$ と \$\beta\_\varphi\$ に関する微分方程式となる。この微分方程式の解は Meissner の演算子を用いて、境界条件を満たす解 (余解) と外力による解 (特解) の和として求めることができる (詳細は文献8) 参照)。

同様に、軸対称荷重を受ける円筒シェル、および、軸対称荷重を受ける球形シェルに関するシェルの曲げの基礎方程式が得られる。その結果を表5.6にまとめておく。

軸対称荷重を受ける回転シェルを取り扱う場合、膜理論による応力・変形解析で実用上十分である。しかしながら、自由端に境界荷重が作用する場合には、別の応力・変形状態が生じる。例えば、円筒容器の自由端に球形の鏡板が溶接されたり、円筒パイプの自由端に剛なフランジを付けたり、また中間にステイフナーを溶接したりした場合には、この接合部に付加的な曲げが発生する。この応力状態は一般に局部的性質をもつが、その値は非常に大きく、無視することができない。したがって、自由端に対称分布する荷重によって発生する応力状態を求める必要がある。この問題はシェルの境界効果の問題<sup>16)</sup>と呼ばれている。この境界効果に対する基本方程式は前述の式 (5.73) および (5.80)、表5.6において荷重項 \$q\_\varphi = 0, q\_n = 0\$ とおいた同次方程式となる。

表 5.6: 軸対称荷重を受ける円筒シェルおよび球形シェルの曲げの基礎方程式

シェルの種類	円筒シェル	球形シェル
ひずみ - 変位関係式	$\varepsilon_x^0 = \frac{du_x}{dx}, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{w}{a}, \quad \gamma_{\varphi\theta}^0 = 0, \quad \kappa_x = \frac{d\beta_x}{dx},$ $\kappa_\theta = \tau = 0, \quad \beta_x = -\frac{dw}{dx}, \quad \beta_\theta = 0$	$\varepsilon_\varphi^0 = \frac{1}{a} \left( \frac{du_\varphi}{d\varphi} + w \right), \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{a} (u_\varphi \cot \varphi + w),$ $\gamma_{\varphi\theta}^0 = 0, \quad \kappa_\varphi = \frac{1}{a} \frac{d\beta_\varphi}{d\varphi}, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{a} \beta_\varphi \cot \varphi,$ $\tau = 0, \quad \beta_\varphi = \frac{1}{a} \left( u_\varphi - \frac{dw}{d\varphi} \right), \quad \beta_\theta = 0$
構成方程式	$N_x = K(\varepsilon_x^0 + \nu\varepsilon_\theta^0), \quad N_\theta = K(\nu\varepsilon_x^0 + \varepsilon_\theta^0)$ $M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_\theta), \quad M_\theta = D(\nu\kappa_x + \kappa_\theta)$	$N_\varphi = K(\varepsilon_\varphi^0 + \nu\varepsilon_\theta^0), \quad N_\theta = K(\nu\varepsilon_\varphi^0 + \varepsilon_\theta^0)$ $M_\varphi = D(\kappa_\varphi + \nu\kappa_\theta), \quad M_\theta = D(\nu\kappa_\varphi + \kappa_\theta)$
つり合い式	$\frac{dN_x}{dx} + q_x = 0$ $\frac{dQ_x}{dx} - \frac{1}{a} N_\theta + q_n = 0$ $\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0$	$\frac{d(N_\varphi \sin \varphi)}{d\varphi} - N_\theta \cos \varphi + Q_\varphi \sin \varphi + a \sin \varphi q_n = 0$ $\frac{d(Q_\varphi \sin \varphi)}{d\varphi} - (N_\varphi + N_\theta) \sin \varphi + a \sin \varphi q_n = 0$ $\frac{d(M_\varphi \sin \varphi)}{d\varphi} - M_\theta \cos \varphi - Q_\varphi a \sin \varphi = 0$
支配微分方程式	$\frac{d^2 \beta_x}{dx^2} = \frac{Q_x}{D}$ $\frac{d^2 Q_x}{dx^2} = -\frac{Eh}{a^2} \beta_x + \frac{1}{a^2} G(x)$ $G(x) = -a\nu q_x - a^2 \frac{dF_1(x)}{dx}$ $F_1(x) = \int_{x_0}^x q_x dx + C_1$	$\frac{d^2 \beta_\varphi}{d\varphi^2} + \cot \varphi \frac{d\beta_\varphi}{d\varphi} - [\cot^2 \varphi + \nu] \beta_\varphi = \frac{a^2 Q_\varphi}{D}$ $\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \cot \varphi \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} - [\cot^2 \varphi - \nu] Q_\varphi = -Eh\beta_\varphi + \frac{G(\varphi)}{a}$ $G(\varphi) = -a \frac{d}{d\varphi} [(1 + \nu) F_1(\varphi) + a q_n]$ $-a(1 + \nu) \cot \varphi [2F_1(\varphi) + a q_n]$ $F_1(\varphi) = \frac{a}{\sin^2 \varphi} \left[ C_1 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} (-q_n \cos \varphi + q_\varphi \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \right]$

この式の厳密解はよく研究されているが、実用上不便であることもわかっている。例えば、球形シェルに対する解は超幾何級数となるが、収束性がきわめてよくない。St. Venant の原理によれば、自由端に作用する径方向荷重は急速に減衰して、この近傍においてその影響が現れる。また、境界荷重によって生じる応力・変形は、減衰振動的な性質をもつことも知られている。

このような関数は  $\exp(-kx)f(x)$  ( $f(x)$ : 周期関数) の形に表すことができる。この性質に注目すれば、基礎方程式の第 1 次導関数は係数  $k$  を、第 2 次導関数は係数  $k^2$  を含み、第 2 次導関数に比べて第 1 次導関数および関数自身を無視できる。この考え方をを用いると、球形または円筒シェルの問題に対して、きわめて便利な近似解を得ることができる。Geckeler はこのことに注目して、次の仮定

$$\cot \varphi \doteq 0, \quad \frac{d^2 \beta_\varphi}{d\varphi^2} \gg \beta_\varphi, \quad \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} \gg Q_\varphi \quad (5.81)$$

を用いて深いシェルに対する近似解法 (Geckeler の近似解法) を提案している。

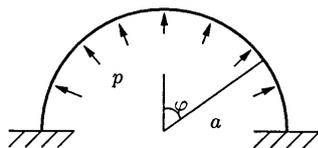


図 5.21: 内圧を受ける球形シェル

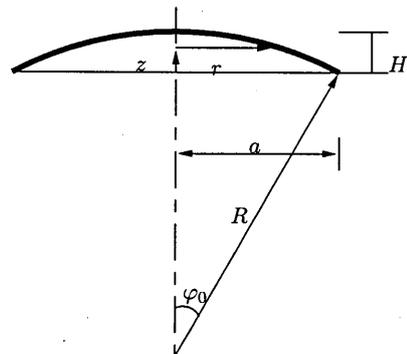


図 5.22: 偏平球殻

表 5.7: 曲げ理論による精解と Geckeler の近似解との比較<sup>18)</sup>

角度	$2N_\theta/pa$		$M_\varphi/ph^2$		$2N_\theta/pa$		$M_\varphi/ph^2$	
	精解	Geckeler	精解	Geckeler	精解	Geckeler	精解	Geckeler
90	0.300	0.300	-1.066	-1.059	0.300	0.300	-10.598	-10.591
85	0.371	0.369	-0.446	-0.437	0.695	0.695	+1.611	+1.616
80	0.514	0.514	-0.061	-0.052	0.988	0.988	+1.591	+1.583
75	0.669	0.672	+0.141	+0.148	1.029	1.029	+0.281	+0.275
70	0.802	0.807	+0.219	+0.221	1.010	1.009	-0.092	-0.091
65	0.903	0.908	+0.222	+0.218	1.000	1.000	-0.057	-0.055
60	0.970	0.973	+0.186	+0.178	0.999	0.999	-0.006	-0.006
55	1.009	1.010	+0.136	+0.127	-	-	-	-
50	1.028	1.027	+0.089	+0.079	-	-	-	-
45	1.033	1.030	+0.049	+0.041	-	-	-	-

表 5.7は、内圧  $p$  を受ける球形シェル (図 5.21) に対して、シェルの曲げ理論による精解と Geckeler の近似解法による結果を比較して示したものである。両解法の解析結果がきわめてよい一致を示している。特に、 $a/h$  が大きくなるほど精度が良くなっていることがわかる。Geckeler の近似解法はシェルの曲げ理論による解法と比べると近似解を非常に簡単に求めることができる<sup>8)16)</sup>。構造力学公式集<sup>17)</sup>の回転シェルの曲げ応力・変形状態は、Geckeler の近似解法によるものである。

一方、浅い球形シェルに対しては **Reissner** の偏平シェル理論があり、次の仮定を採用している。

(a) 偏平条件 (図 5.22 参照)

$$\frac{H}{a} < \frac{1}{4}, \quad \frac{H}{R} < \frac{1}{17}, \quad \frac{a}{R} < \frac{1}{2}, \quad \varphi_0 < 30^\circ \quad (5.82)$$

(b) 内方向のつり合いで  $Q_r, Q_\theta$  の項を省略する。

(c)  $\beta_r, \beta_\theta$  において、面内方向変位の項  $\frac{u_r}{R}, \frac{u_\theta}{R}$  を省略する。

図 5.22 を参考にして、 $r_\varphi = R, \cos \varphi = \frac{R-H+z}{R}$  より、 $dr = r_\varphi \cos \varphi d\varphi = R \left[ 1 - \frac{H-z}{R} \right] d\varphi \doteq R d\varphi$  などを考慮すると、曲面の基礎量として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r, \quad \alpha_2 = \theta, \quad R_1 = R_2 = r_\varphi = r_\theta = R, \\ A_1 &= R, \quad A_2 = r, \quad dr = R d\varphi, \quad r = R \sin \varphi, \quad \cos \varphi \doteq 1 \end{aligned}$$

上式を用いて、表 5.4 の球形シェルの基礎式に代入すると偏平球シェルの基礎方程式が得られる。なお、Reissner 理論は非軸対称荷重に対しても用いることができる。

### 5.5.2 曲げ理論の近似理論

前項では軸対称荷重を受ける回転シェルの曲げ理論を示した。またその基礎方程式の解法として、深い回転シェルに対する Geckeler の近似解法、および、浅い球形シェルに対する Reissner の偏平シェル理論について概説した。

シェルの曲げ理論にはその他にもその近似の度合いに応じて多くの基礎方程式が提案されている。最も基本的な仮定は、Kirchhoff-Love の仮定であるが、それ以外にも、

$$N_{12} \doteq N_{21}, \quad M_{12} \doteq M_{21} \quad (5.83)$$

として基礎方程式を導いた。この仮定は式 (5.55) の最後の式が自動的に成立することと矛盾している。この仮定の矛盾を解消した基礎方程式が **Sanders** 方程式である。

また、Kirchhoff-Love の仮定では、シェルは薄肉であることより  $h/R \ll 1$  として、ひずみ-変位関係式において、 $A_1(1 + \zeta/R_1) \doteq A_1$ 、 $A_2(1 + \zeta/R_2) \doteq A_2$  を利用した。この仮定を用いない基礎方程式が **Flügge** 方程式である。Flügge 式をさらに簡略化したものが **Donnell** 方程式である。

## 5.6 偏平シェル

シェル構造はライズの高いものについて理論的に発展し、またライズが高い方が力学的にも有利であるが、構造上の理由からライズ高が制限され、ライズを低くしなければならない場合がある。ライズが低いと境界部での推力も大きくなり、支持構造を強くする必要がある。しかし、等分布満載荷重の荷重条件に限定すれば、平板にわずかのライズをもたせて偏平シェルにすることは、梁に対するアーチと同じ効果があり、しかもシェルの場合には 2 方向のアーチ効果があり、力学的には非常に有利な構造となり、偏平な曲面の意義が明らかとなる。すなわち、板に作用する応力は大部分が圧縮膜応力状態になり、周辺の比較的小さな曲げ応力を処理すればよい。

特に、コンクリートのように引張りに弱い材料においては偏平シェルは平板に比べて大スパン構造に適する構造となる。また、次節で取り扱う膜構造やケーブルネット構造は、初期張力の導入を前提とするテンション構造であるので、設計・解析では偏平構造として取り扱われる場合が多い。

本節では、図 5.23 に示すような矩形の投影面をもつ 2 次曲面からなる偏平シェルに関して記述する。なお、 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 \ll 1$ 、 $(\frac{\partial z}{\partial y})^2 \ll 1$ 、 $(\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial z}{\partial y}) \ll 1$  を満足するシェルを偏平シェルと定義する。

### 5.6.1 曲面形状

図 5.23 に示す直交座標系  $O - xyz$  において、シェルの基準面を  $z = z(x, y)$  とすると、以下のように曲面形状が決定される。

$$\begin{aligned}
 \text{曲線座標} & : \alpha_1 = x, \quad \alpha_2 = y \\
 \text{ベクトル表示} & : \mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z(x, y)\mathbf{e}_3 \\
 \text{第1基本量} & : E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \quad F = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \\
 \text{法線ベクトル} & : \mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{H} = \frac{1}{H} \left[ -\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \right], \quad H = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \\
 \text{第2基本量} & : L = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad M = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right), \quad N = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)
 \end{aligned}$$

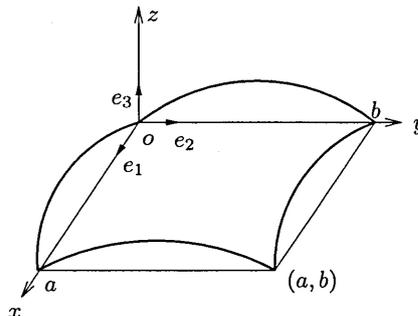


図 5.23: 偏平シェル

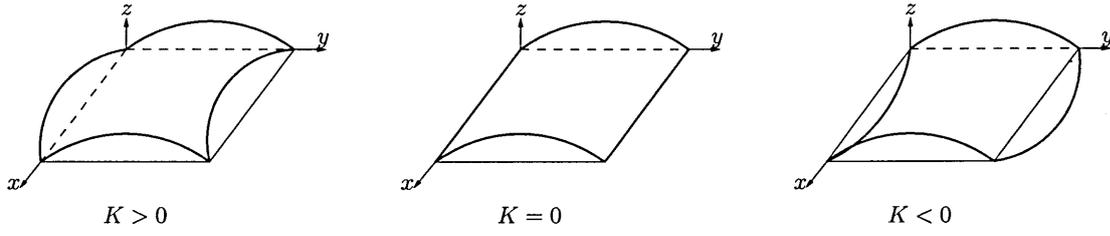


図 5.24: Gauss 曲率による偏平シェルの分類

偏平な曲面は 2 次式で近似することができるので、曲面形として 2 次式を採用する場合が多い。

$$z = z(x, y) = \frac{1}{2}(a_0x^2 + b_0y^2 + 2c_0xy + d_0x + e_0y + f_0) \quad (5.84)$$

図 5.23 の矩形投影面では、 $c_0 = 0$  となり、 $M = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = c_0 = 0$  となるため、 $x = \alpha_1$ ,  $y = \alpha_2$  は曲率線座標となる。偏平曲面の曲率は、次式のように求まる。

$$k_x = \frac{1}{R_x} = \frac{L}{E} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -a_0, \quad k_y = \frac{1}{R_y} = \frac{N}{G} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -b_0 \quad (5.85)$$

したがって、曲面形状は次式で表わすことができる。

$$z = -\left[ \frac{x(x-a)}{2R_x} + \frac{y(y-b)}{2R_y} \right] \quad (5.86)$$

主曲率半径を  $R_x, R_y$  とするとき、ガウス曲率 ( $K = 1/R_x R_y$ ) には図 5.24 に示すように 3 種類がある。

$$K = \frac{1}{R_x R_y} \quad (\text{Gauss 曲率}) \quad (5.87)$$

- $K > 0$  : E.P.シェル (Elliptic Paraboloidal Shell)
- $K = 0$  : 円筒シェル (Cylindrical Shell)
- $K < 0$  : H.P.シェル (Hyperbolic Paraboloidal Shell)

なお、主曲率比  $\lambda$  を  $\lambda = R_x/R_y$  で定義すれば、 $\lambda = 1$  のとき  $R_x = R_y$  となり球形シェルの一部となる。

### 5.6.2 基礎方程式

5.3 節で導入した基礎方程式に前項で導いた形状パラメータを導入すると、デカルト座標系における偏平シェルの基礎方程式が以下のように得られる。

ひずみ - 変位関係式は以下のように表記される。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \zeta \kappa_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + \zeta \kappa_y, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + \zeta \tau \quad (5.88)$$

上式において、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} w, & \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} w, & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \beta_x &= \frac{u}{R_x} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} u - \frac{\partial w}{\partial x}, & \beta_y &= \frac{v}{R_y} - \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} v - \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.89)$$

である。偏平シェルの場合、 $R_x$  と  $u$  との比  $\frac{u}{R_x}$  は  $\frac{\partial w}{\partial x}$  に比して非常に小さいので、通常は次式が用いられる。

$$\beta_x \doteq -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta_y \doteq -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (5.90)$$

このとき,

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.91)$$

となる.

また, 合応力, 合モーメント-ひずみ関係式は以下のように書き表わせる.

$$N_x = K(\varepsilon_x^0 + \nu\varepsilon_y^0), \quad N_y = K(\nu\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0), \quad N_{xy} = N_{yx} = Gh\gamma_{xy}^0 \quad (5.92)$$

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y), \quad M_y = D(\nu\kappa_x + \kappa_y), \quad M_{xy} = M_{yx} = \frac{1}{12}Gh^3\tau \quad (5.93)$$

ここに,  $K$  および  $D$  は式 (5.32) で示したように, それぞれ伸び剛性および曲げ剛性である.

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

つり合い関係式は次式となる.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{R_x}Q_x + q_x \doteq \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0 \quad (5.94a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{1}{R_y}Q_y + q_y \doteq \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y = 0 \quad (5.94b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{1}{R_x}N_x - \frac{1}{R_y}N_y + q_n \doteq \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + q_n = 0 \quad (5.94c)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (5.94d)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (5.94e)$$

なお, 上記のつり合い式において  $|\frac{Q_x}{R_x}| \ll |\frac{\partial N_x}{\partial x}|$  を利用している.

以上はデカルト座標系での偏平シェルの基礎式を示したが, 曲率線座標系ではひずみ-変位関係式の  $\gamma_{xy}^0$  のみが異なり次式となる.

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2w \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (5.95)$$

その結果, つり合い式 (5.94) の a, b 式は近似的に同じ式となるが, c 式だけが異なり次式となる.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + q_n = 0 \quad (5.96)$$

### 5.6.3 基礎方程式の解

式 (5.86) で示す矩形投影面 (辺長  $a, b$ ) をもつ 2 次曲面で表わされる偏平シェル ( $k_x = 1/R_x, k_y = 1/R_y, k_{xy} = 0$ ) に  $q_x = q_y = 0, q_n = q_n$  の荷重が作用する場合を考える. 偏平シェルの基礎方程式に応力関数  $F$  を利用すると, 力のつり合い式および適合条件式は次式となる<sup>10)19)</sup>.

$$D\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = q_n(x, y) \quad (\text{つり合い条件式}) \quad (5.97a)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F - Eh \left[ \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (\text{適合条件式}) \quad (5.97b)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{Laplace演算子})$$

平板でよく用いられるFourier級数解を利用するNavierの方法によると、等分布荷重を受ける単純支持境界(面内方向:ローラー)をもつ偏平シェルの場合、 $F$ および $w$ は次式で仮定される。

$$F = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad w = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.98)$$

また、荷重 $q_n$ は次式で与えられる。

$$q_n(x, y) = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_n(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (5.99)$$

式5.98の $A_{mn}, B_{mn}$ は式(5.97)に代入して、それぞれ $C_{mn}$ で表わすことができる。等分布荷重を受ける場合には、

$$C_{mn} = \frac{16}{mn\pi^2} q_n \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (5.100)$$

となり、これを用いるとたわみ $w$ は次式で求めることができる。

$$w = \frac{16q_n a^4}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{(m^2 + n^2)^2 + \frac{Eha^4}{D\pi^4} \cdot \frac{[\frac{n^2}{R_x} + \frac{m^2}{R_y}]^2}{(m^2 + n^2)^2}} \quad (5.101)$$

#### 5.6.4 種々の形状を有する偏平シェルの解析例

$a = b = 10\text{m}$ ,  $h = 0.1\text{m}$ ,  $q_n = -500\text{kgf/cm}^2$ ,  $E = 2 \times 10^5\text{kgf/cm}^2$ ,  $\nu = 0.17$ の場合について、次の各シェル形状の中央点におけるたわみ、曲げモーメント、面内力を求めると、表5.8に示すようになる。中央点のたわみに関しては、EPシェルは円筒シェルよりも大きくなるが、平均たわみ $\bar{w}$

$$\bar{w} = \frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^b w dx dy \quad (5.102)$$

ははるかに小さくなり、H.P.曲面でも平板より剛性が高くなる。また同表からわかるように、EPシェルおよび円筒シェルは面内力が大きくなり、曲げモーメントを減じることができることがわかる。

EPシェルは工学的にはきわめて重要なシェルである。いま $18 \times 18\text{m}$ の正方形平面の周辺に壁を取り付け、厚さ $15\text{cm}$ の鉄筋コンクリート板屋根を単純支持で設計したとする。全荷重を $500\text{kgf/m}^2$ の等分布荷重とすると、 $R = \infty$ の平板では、最大たわみ $w \doteq 35\text{cm}$ 、最大曲げモーメント $M \doteq 6\text{tfm/m}$ となる。しかし、 $R = 100\text{m}$ の偏平EPシェルでは、 $w \doteq 2\text{cm}$ 、 $M \doteq 0.6\text{tfm/m}$ 、 $R = 50\text{m}$ では、 $w \doteq 0.5\text{cm}$ 、 $M \doteq 0.25\text{tfm/m}$ となり十分設計可能な範囲となる。しかも面内応力は曲面全域にわたって圧縮であるので、曲げによる引張応力が減少するからコンクリートのひびわれ防止に面内力自体が有効となる。

- ① E.P. シェル :  $R_x = R_y = 10\text{m}$
- ② 円筒シェル :  $R_x = +\infty, R_y = 10\text{m}$
- ③ H.P. シェル :  $R_x = -10\text{m}, R_y = 10\text{m}$
- ④ 平板 :  $R_x = R_y = +\infty$

表5.8: 種々形状をもつ偏平シェルのたわみ、曲げモーメント、面内力<sup>8)</sup>

シェル形状	たわみ (cm)	曲げモーメント (kgf · cm/cm)	面内力 (kgf/cm)
① E.P. シェル	0.023	-1.84	-24.7
② 円筒シェル	0.021	-25.2	-55.6
③ H.P. シェル	11.531	2401	-17.5
④ 平板	11.237	2153	0

## 5.7 膜構造

### 5.7.1 はじめに

鉄筋コンクリートシェルでは、コンクリート断面内に引張応力が作用しない圧縮応力状態となるような構造系を理想とする。5.4節で記述した膜応力状態となるような特殊なシェル形状とし、さらに、少なからず生じる曲げ応力を排除することが重要である。

一方、膜構造やケーブルネット構造などのテンション構造は、RCシェルとは逆に、圧縮および曲げには全く抵抗できず、純膜応力(引張応力)のみで抵抗する構造系である。また、RCシェルが剛構造であるのに対して、極めて変形しやすい柔構造である。したがって、前節までの基礎式においては変形は微小として展開したが、膜構造およびケーブルネット構造においては変形は微小でない非線形の基礎式を用いなければならない。

本節では、ひずみ-変位関係式の高次項まで考慮した膜構造の有限変形理論の基礎式を示すとともに、仮想仕事の原理に基づいてつり合い式を誘導する<sup>20)</sup>。

### 5.7.2 基礎方程式

種々の形状をもつ膜構造の理論を誘導するためには、前節までと同様に曲線座標系を用いることが一般的である。しかしながら、實際上、応力や変形の解析が必要となる膜構造は浅い曲面形状であることが多い。また、その境界形状も矩形投影形状のように単純なものであったり、平面内の単純な形状に近似できることも多く、ゴム膜などのように大きく変形する大ひずみを考慮する必要がない場合は直交直線座標系(デカルト座標系)を用いて解析することができる。ここでは、前節5.6で偏平シェルの基礎式を誘導したときと同様に、デカルト座標系を用いて矩形投影面をもつ偏平膜構造の非線形基礎方程式を誘導する。

いま、初期曲面  $w_0$  は小さく、荷重強度  $q$  は近似的に  $z$  方向に作用し、膜の自重は無視できるものとする、このような矩形膜の基礎方程式は次のようになる。

#### ● ひずみ-変位関係式

図 5.25 に示すデカルト座標系における膜構造のひずみ-変位関係式は、初期曲面  $w_0$  を導入してグリーンのひずみ成分から次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \right] / \left\{ 1 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \varepsilon_y &= \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \right] / \left\{ 1 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{xy} &= 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) / \left\{ 2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right\}\end{aligned}\quad (5.103)$$

実際の膜解析では、式(5.103)の  $u, v$  の1階偏導関数の2次の項は他の項に比べて小さく無視できる場合が多く、また応力・変形解析が必要となる膜構造は偏平な浅い曲面であることが多い。このような場合には初期曲面  $w_0$  の傾きが小さく、 $(\partial w_0/\partial x)^2 \ll 1$ ,  $(\partial w_0/\partial y)^2 \ll 1$  と仮定でき、次式のように表記できる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \quad (5.104a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \quad (5.104b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.104c)$$

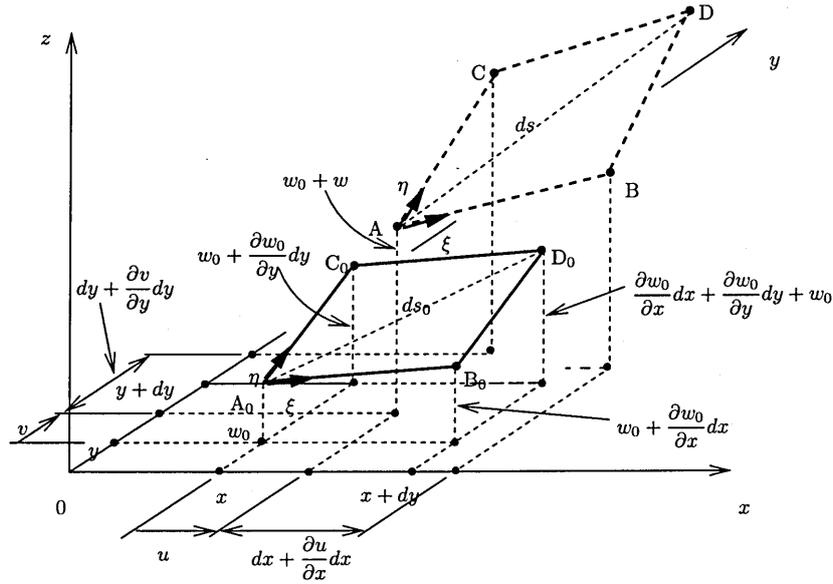


図 5.25: 膜の微小要素の変形

なお、曲率線座標系では式 (5.104) は次式で表わされる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (5.105a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (5.105b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2w \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5.105c)$$

#### ● 構成方程式

シェル構造の膜理論と同様に、膜断面には面外せん断力、曲げモーメントは生じない。膜の断面に作用する面内合応力（膜力）は、引張力  $N_x, N_y$  と面内せん断力  $N_{xy}$  である。これらの膜力は、厚さ方向に様に分布するとみなすことができ、膜の単位幅を基準として評価でき、[力/長さ]の次元をもつ（シェル理論では合応力は[力/(長さ)<sup>2</sup>/長さ]と定義される）。これらの記号を用いると、一般化された Hooke の法則から、等方性線形弾性膜材の合応力-ひずみ構成方程式は、次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad K = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (5.106)$$

ここに、 $E, \nu, h$  はそれぞれヤング率、ポアソン比、膜厚であり、 $K$  は伸び剛性である。

#### ● つり合い方程式

デカルト座標系での膜の面内および面外方向のつり合い方程式は次式で表記される。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (5.107a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + f_y = 0, \quad (5.107b)$$

$$N_x \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial (w_0 + w)}{\partial x} + N_y \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial (w_0 + w)}{\partial y}$$

$$+ 2N_{xy} \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial(w_0 + w)}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial(w_0 + w)}{\partial x} - p + f_z = 0 \quad (5.107c)$$

ここに、 $f_x, f_y, f_z$  は微小要素に作用する変形前の単位面積当りの物体力の座標方向成分である。また、 $p$  は膜面に垂直に作用する圧力で、 $z$  の負の方向の成分をもつように定義される単位法線ベクトルの方向を正とする。

なお、曲率線座標系ではつり合い式 (5.107c) のみが異なり次式となる。

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - p + f_z = 0 \quad (5.108)$$

### 5.7.3 仮想仕事の原理に基づく基礎式の誘導

前述の基礎方程式に基づいて膜構造の応力・変形解析を行なうことができる。ひずみ-変位関係式 (5.104) を合応力-ひずみ関係式 (5.106) に代入し、その結果をつり合い式 (5.107) に代入すると、変位  $u, v, w$  に関する3つの非線形2階偏微分方程式を得ることができる。この非線形2階偏微分方程式を膜の境界条件を考慮することにより、変位  $u, v, w$  が求められることができる。

これら  $u, v, w$  に関する三元連立偏微分方程式は、エネルギー原理を適用して変分法を用いることによって直接導くことができる。図 5.26 に示すように長辺と短辺に沿って固定された初期たわみのある矩形膜が一様な圧力  $q$  を受けるときの三元連立偏微分方程式を仮想仕事の原理を用いて誘導する。なお、ここでは自重は無視できるものとする。また、圧力の方向の定義に従って、 $p$  を  $-q$  とおいている。そうすると仮想仕事の原理式は

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} (N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy} - q \delta w) dx dy = 0 \quad (5.109)$$

と書き表すことができる。式 (5.104) を式 (5.106) に代入すると ( $K \frac{1-\nu}{2} = G$ ),

$$N_x = K(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{0,x}w_{,x}) + K\nu(v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{0,y}w_{,y}) \quad (5.110a)$$

$$N_y = K\nu(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{0,x}w_{,x}) + K(v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{0,y}w_{,y}) \quad (5.110b)$$

$$N_{xy} = G(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + w_{0,x}w_{,y} + w_{0,y}w_{,x}) \quad (5.110c)$$

となる。なお、上式においては、偏導関数をコンマをもつ添字を付けて、 $\frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y} = w_{,y}$  などと表わしている。

式 (5.104) を変分すると、ひずみ成分の変分は次式となる。

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x} + (w_{,x} + w_{0,x})\delta w_{,x} \quad (5.111a)$$

$$\delta \varepsilon_y = \delta v_{,y} + (w_{,y} + w_{0,y})\delta w_{,y} \quad (5.111b)$$

$$\delta \gamma_{xy} = \delta u_{,y} + \delta v_{,x} + (w_{,y} + w_{0,y})\delta w_{,x} + (w_{,x} + w_{0,x})\delta w_{,y} \quad (5.111c)$$

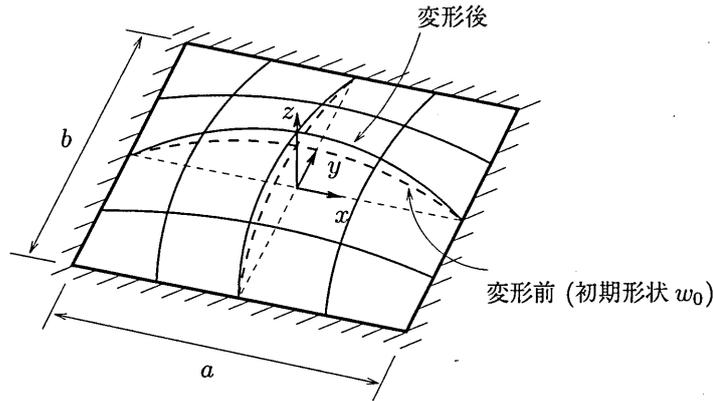


図 5.26: 面圧を受ける矩形膜

式 (5.110), 式 (5.111) を仮想仕事式 (5.109) に代入して整理すると, 以下の形の式が得られる.

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \{ \textcircled{1} \delta u_{,x} + \textcircled{2} \delta u_{,y} + \textcircled{3} \delta v_{,x} + \textcircled{4} \delta v_{,y} + \textcircled{5} \delta w_{,x} + \textcircled{6} \delta w_{,y} - q \delta w \} dx dy = 0 \quad (5.112)$$

式 (5.112) の被積分関数, 例えば第 1 項  $\delta u_{,x}$  に関する項  $\textcircled{1}$  は部分積分により以下のようなになる.

$$\begin{aligned} & \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \textcircled{1} \delta u_{,x} dx dy \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ K(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{0,x} w_{,x}) + K\nu(v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{0,y} w_{,y}) \right\} \delta u_{,x} dx dy \\ &= \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \left\{ K(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{0,x} w_{,x}) + K\nu(v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{0,y} w_{,y}) \right\} \delta u \Big|_{-a/2}^{a/2} \right] dy \\ & \quad - \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \int_{-a/2}^{a/2} \{ K(u_{,xx} + w_{,x} w_{,xx} + w_{0,x} w_{,xx}) + K\nu(v_{,yx} + w_{,y} w_{,yx} + w_{0,y} w_{,yx}) \} \delta u dx \right] dy \quad (5.113) \end{aligned}$$

上式 (5.113) で,  $x = \pm a/2$  の境界では  $\delta u = 0$  であるから, 右辺の第 1 項は消去されて第 2 項のみが残る.

式 (5.112) の  $\textcircled{2}$  ~  $\textcircled{6}$  に関する部分も同様にして計算すると, 式 (5.112) は次式のように整理される.

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \{ (\dots) \delta u + (\dots) \delta v + (\dots) \delta w \} dx dy = 0 \quad (5.114)$$

$\delta u, \delta v, \delta w$  は互いに独立であることから, これらに掛かる係数  $(\dots)$  は 0 でなければならない. したがって, 以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} & \bullet \quad K(u_{,xx} + w_{,x} w_{,xx} + w_{0,x} w_{,xx}) + K\nu(v_{,xy} + w_{,y} w_{,xy} + w_{0,y} w_{,xy}) \\ & \quad + G(u_{,yy} + v_{,xy} + w_{,y} w_{,yy} + w_{,y} w_{,xy} + w_{0,x} w_{,yy} + w_{0,y} w_{,xy}) = 0 \quad (5.115) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad K\nu(u_{,xy} + w_{,x} w_{,xy} + w_{0,x} w_{,xy}) + K(v_{,yy} + w_{,y} w_{,yy} + w_{0,y} w_{,yy}) \\ & \quad + G(u_{,xy} + v_{,xx} + w_{,x} w_{,xy} + w_{,y} w_{,xx} + w_{0,x} w_{,xy} + w_{0,y} w_{,xx}) = 0 \quad (5.116) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \{ K(u_{,xx} + w_{,x} w_{,xx} + w_{0,x} w_{,xx}) + K\nu(v_{,yx} + w_{,y} w_{,yx} + w_{0,y} w_{,yx}) \} (w_{,x} + w_{0,x}) \\ & \quad + \{ K\nu(u_{,xy} + w_{,x} w_{,xy} + w_{0,x} w_{,xy}) + K(v_{,yy} + w_{,y} w_{,yy} + w_{0,y} w_{,yy}) \} (w_{,y} + w_{0,y}) \\ & \quad + \{ K(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{0,x} w_{,x}) + K\nu(v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + w_{0,y} w_{,y}) \} w_{,xx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{K\nu(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{0,x}w_{,x}) + K(v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{0,y}w_{,y})\}w_{,yy} \\
& + G(u_{,xy} + v_{,xx} + w_{,x}w_{,xy} + w_{,y}w_{,xx} + w_{0,x}w_{,xy} + w_{0,y}w_{,xx})(w_{,y} + w_{0,y}) \\
& + G(u_{,yy} + v_{,xy} + w_{,x}w_{,yy} + w_{,y}w_{,xy} + w_{0,x}w_{,yy} + w_{0,y}w_{,xy})(w_{,x} + w_{0,x}) \\
& + 2G(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + w_{0,x}w_{,y} + w_{0,y}w_{,x})w_{,xy} + q = 0
\end{aligned} \tag{5.117}$$

この三元連立非線形偏微分方程式を解いて、変形および応力解析を行うことができる。数値計算法としては、有限要素法や動的緩和法がよく用いられている。また、たわみ形状を三角関数で近似し Ritz 法による近似解析法が文献 20) に掲載されている。

## 5.8 ケーブルネット構造

### 5.8.1 はじめに

$x, y$  軸に沿う 2 方向ケーブルネットの場合、前節の膜の基礎方程式において、 $\gamma_{xy} = 0$ 、 $N_{xy} = 0$ 、 $\nu = 0$  と置けばよい。このようにして得られる基礎方程式に基づいて前節 5.7 で示した膜の解析と同様にして、ケーブルネット構造の応力および変形の解析を行うことができる。坪井<sup>21)</sup>は、膜構造およびケーブルネット構造の理論的展開を効率的にするため、図 5.27 に示すような膜の曲面上の曲線座標で表示された矩形投影面をもつ扁平膜構造の非線形基礎式を採用し、前節の式 (5.104) の  $\gamma_{xy} = 0$ 、 $N_{xy} = 0$ 、 $\nu = 0$  と置いて、2 方向ケーブルネットへ拡張している。2 方向ケーブルネットは膜構造の力学的挙動を理解するための最も優れたモデルであり、非線形基礎方程式を解析的に取り扱うことが可能で、膜の非線形問題を直観的にも把握しやすいモデルである。本節では、ケーブルネット構造の大局的な挙動を把握することを目的として、2 方向ケーブルネットの基礎方程式、主モード ( $m = n = 1$  の場合) による応力・変形解析例を示す。

### 5.8.2 2 方向ケーブルネットの基礎方程式

ケーブルネットのひずみ-変位関係式は、式 (5.104) において、 $\gamma_{xy} = 0$  と置くことにより、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \tag{5.118}$$

と表記される。デカルト座標系で表された式 (5.104) のひずみ-変位関係式において、 $w$  は  $z$  方向の変位であるが、これを  $w_0$  曲面の法線方向の変位と定義すると、

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} = -w \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} = -w \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{5.119}$$

となり、次式が得られる

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \tag{5.120}$$

なお、式 (5.120) は、曲面上の曲線座標においてひずみ-変位関係式を作成し、扁平条件  $(\frac{\partial w_0}{\partial x})^2 \ll 1$ 、 $(\frac{\partial w_0}{\partial y})^2 \ll 1$ 、 $\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \ll 1$  を考慮して得ることもできる。

構成方程式は、式 (5.106) において  $N_{xy} = 0$ 、 $\nu = 0$  と置くことにより、

$$N_x = K\varepsilon_x, \quad N_y = K\varepsilon_y \tag{5.121}$$

となる。また、面内方向のつり合い方程式は、式(5.107)において  $N_{xy} = 0$  であるから、

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (5.122)$$

となる。面外方向のつり合い方程式は、初期張力を  $N_{x0}, N_{y0}, N_{xy0}$  として、 $\bar{N}_x = N_{x0} + N_x$ ,  $\bar{N}_y = N_{y0} + N_y$ ,  $\bar{N}_{xy} = N_{xy0} + N_{xy}$  と置き、さらに式(5.122)を用いると、以下のように表せる。

$$\bar{N}_x \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial y^2} + p = 0 \quad (5.123)$$

いま、次の無次元量を導入する。

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad U = \frac{u}{a}, \quad V = \frac{v}{a}, \quad W = \frac{w}{a}, \quad W_0 = \frac{w_0}{a} \quad (5.124)$$

式(5.124)中、 $a$ は矩形投影面の辺長の1/2を表し(図5.27)、また、 $W_0$ は無次元化された初期形状である。これらの無次元量を用いると、図5.28の曲面形状は、

$$W_0 = \frac{A_0}{2}(-\xi^2 + \eta^2) \quad (5.125)$$

で与えられる。式(5.124)、(5.125)を、式(5.120)および式(5.123)に代入すると、無次元化されたひずみ-変位式および面外方向のつり合い式は次式となる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial \xi} + A_0 W + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 \quad (5.126a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial \eta} - A_0 W + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 \quad (5.126b)$$

$$(-\bar{N}_x + \bar{N}_y) \frac{A_0}{a} + \bar{N}_x \frac{\partial^2 W}{a \partial \xi^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 W}{a \partial \eta^2} + p = 0 \quad (5.126c)$$

初期張力  $N_{x0}, N_{y0}$  は初期形状でつり合っているから、 $N_{x0}$  と  $N_{y0}$  は等しくなる。また、式(5.126c)のつり合い式で  $W$  に関する偏微分の項は0となり、左辺の第1項は0となることから、 $N_{x0} = N_{y0} = N_0$  と置いて、式(5.126c)のつり合い式に代入して整理すると次式が得られる。

$$\frac{1}{a} \left\{ N_0 + \frac{1}{2}(N_x + N_y) \right\} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) - \frac{1}{a} (N_x - N_y) \left\{ A_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) \right\} + p = 0 \quad (5.127)$$

上式において、左辺第1項は石けん膜の式であり、第2項はH.P.シェルの鉛直方向のつり合いを示している。これらの結合によりテンション構造が構成されている。

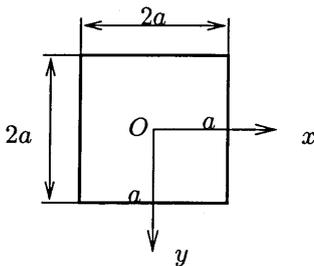


図 5.27: 矩形投影面と座標軸

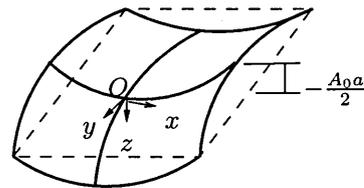


図 5.28: 偏平 H.P. 曲面とライズ

## 5.8.3 主モードによる応力・変形解析

たわみを  $W$  として次式を仮定する.

$$W = \sum_{m,n} A_{mn} \cos \frac{m\pi}{2} \xi \cos \frac{n\pi}{2} \eta \quad (5.128)$$

以下では、ケーブルネットの大局的な挙動を把握することを目的として、Fourier 級数展開の第 1 項 ( $m = n = 1$ ) のみを用いて解析する. そうするとたわみ  $W$  は

$$W = A_{11} \cos \frac{\pi}{2} \xi \cos \frac{\pi}{2} \eta \quad (5.129)$$

で与えられる. 上式 (5.129) を式 (5.126a, b) の 2 式に代入すると,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial \xi} + A_0 A_{11} \cos \frac{\pi}{2} \xi \cos \frac{\pi}{2} \eta + \frac{\pi^2 A_{11}^2}{8} \left( \sin \frac{\pi}{2} \xi \cos \frac{\pi}{2} \eta \right)^2 \quad (5.130a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial \eta} - A_0 A_{11} \cos \frac{\pi}{2} \xi \cos \frac{\pi}{2} \eta + \frac{\pi^2 A_{11}^2}{8} \left( \cos \frac{\pi}{2} \xi \sin \frac{\pi}{2} \eta \right)^2 \quad (5.130b)$$

となる.

式 (5.121), 式 (5.122) より,

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \eta} = 0 \quad (5.131)$$

となる. これを積分すると,

$$\varepsilon_x = f(\eta), \quad \varepsilon_y = g(\xi) \quad (5.132)$$

となる. 式 (5.132) を式 (5.130) に代入して, 積分すると,

$$U = f(\eta) \xi + C_1(\eta) - \frac{2A_0 A_{11}}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \xi \cos \frac{\pi}{2} \eta - \frac{\pi^2 A_{11}^2}{16} \cos^2 \frac{\pi}{2} \eta \left( \xi - \frac{1}{\pi} \sin \pi \xi \right) \quad (5.133a)$$

$$V = g(\xi) \eta + C_2(\xi) + \frac{2A_0 A_{11}}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \xi \sin \frac{\pi}{2} \eta - \frac{\pi^2 A_{11}^2}{16} \cos^2 \frac{\pi}{2} \xi \left( \eta - \frac{1}{\pi} \sin \pi \eta \right) \quad (5.133b)$$

となる.

境界条件  $\xi = \pm 1$  で  $U = 0$ ,  $\eta = \pm 1$  で  $V = 0$  を代入すると  $C_1(\eta) = C_2(\xi) = 0$  となり, さらに,

$$\varepsilon_x = f(\eta) = \frac{2A_0 A_{11}}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \eta + \frac{\pi^2 A_{11}^2}{16} \cos^2 \frac{\pi}{2} \eta \quad (5.134a)$$

$$\varepsilon_y = g(\xi) = -\frac{2A_0 A_{11}}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \xi + \frac{\pi^2 A_{11}^2}{16} \cos^2 \frac{\pi}{2} \xi \quad (5.134b)$$

が得られる.

中央点でのひずみは, 上式 (5.134) において,  $\xi = \eta = 0$  と置いて,

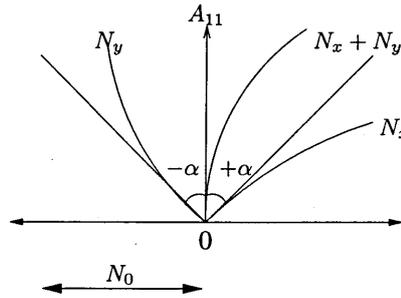
$$\varepsilon_x|_{\xi=\eta=0} = \frac{2}{\pi} A_0 A_{11} + \frac{\pi^2}{16} A_{11}^2, \quad \varepsilon_y|_{\xi=\eta=0} = -\frac{2}{\pi} A_0 A_{11} + \frac{\pi^2}{16} A_{11}^2 \quad (5.135)$$

となる. これより, 中央点 ( $\xi = \eta = 0$ ) では,

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{4}{\pi} A_0 A_{11}, \quad \varepsilon_y + \varepsilon_x = \frac{\pi^2}{8} A_{11}^2 \quad (5.136)$$

なる関係式が得られる. 式 (5.121) を用いて上式 (5.136) を合応力で表わすと,

$$N_x - N_y = \frac{4KA_0}{\pi} A_0 A_{11}, \quad N_x + N_y = \frac{\pi^2 K}{8} A_{11}^2 \quad (5.137)$$

図 5.29: 合応力 - たわみ関係<sup>21)</sup>

なる関係式が得られる。

図 5.29は上式の合応力の概略図を示したものである。  $A_{11}$  が増加すると、  $N_x|_{\xi=\eta=0}$  は増大し、  $N_y|_{\xi=\eta=0}$  は減少する。また、  $N_y = -N_0$  のとき初期張力の効果がなくなることがわかる。

次に、荷重 - たわみ関係を求める。等分布荷重  $p_0$  をフーリエ級数展開し、主モードに対応させて次式で与える。

$$p = \frac{16p_0}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2} \xi \cos \frac{\pi}{2} \eta \quad (5.138)$$

式 (5.121), (5.134a, b) 式より,

$$N_x + N_y = \frac{2KA_0A_{11}}{\pi} A_{11} \left( \cos \frac{\pi}{2} \eta - \cos \frac{\pi}{2} \xi \right) + \frac{\pi^2 KA_{11}^2}{16} \left( \cos^2 \frac{\pi}{2} \eta - \cos^2 \frac{\pi}{2} \xi \right) \quad (5.139a)$$

$$N_x - N_y = \frac{2KA_0A_{11}}{\pi} A_{11} \left( \cos \frac{\pi}{2} \eta + \cos \frac{\pi}{2} \xi \right) + \frac{\pi^2 KA_{11}^2}{16} \left( \cos^2 \frac{\pi}{2} \eta - \cos^2 \frac{\pi}{2} \xi \right) \quad (5.139b)$$

が得られる。また、式 (5.129) を用いると、

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = -\frac{\pi^2}{2} A_{11} \cos \frac{\pi}{2} \xi \cos \frac{\pi}{2} \eta \quad (5.140a)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5.140b)$$

が得られる。式 (5.139), (5.140) を式 (5.127) に代入し、両辺に  $\cos \frac{\pi}{2} \xi \cos \frac{\pi}{2} \eta$  を乗じて、積分すると、荷重  $p_0$  とたわみ  $A_{11}$  の関係が次式のように求まる。

$$\frac{\pi^2}{2} A_{11} \left[ 1 + \frac{3\pi^2 K}{64N_0} A_{11}^2 \right] + \frac{16K}{\pi^2 N_0} A_0^2 A_{11} = \frac{16p_0 a}{\pi N_0} \quad (5.141)$$

## 5.9 あとがき

本章では、空間構造を構成するシェル、膜、ケーブルネット構造について概説するとともに、それらを解析する際に必要となる基礎理論について述べてきた。しかし、シェル構造の場合には、面内力が卓越するがゆえに座屈安定解析や極限解析が必要となる場合が多い。このような場合は、膜解析の場合と同じようにひずみ - 変位関係式は高次の非線形項まで考慮し、さらに材料の非線形性も考慮した弾塑性有限変形解析を行う必要がある<sup>22)</sup>。

また、柔構造物である膜およびケーブルネット構造の基礎式は、5.7, 5.8 節で示したように、非線形連立偏微分方程式となり、各荷重段階で収束計算を行ってつりあい形状を追跡する必要がある。しかし、数値解が繰り返し計算で安定的に収束して求められるかどうかは容易でないことも多い。本章では、このような幾何学

的非線形解析や弾塑性解析の数値解法について触れていないが、文献7)の建築編には、幾何学的非線形問題の数値解法、混合法やエネルギー法によるケーブルネットの解析、膜の形状解析など、膜・ケーブルネット構造の形状・変形解析法について詳述されているので参照されたい。

さらに、近年、航空・宇宙工学分野で研究・開発が進められてきたガラス繊維 (GF)、炭素繊維 (CF)、アラミド繊維 (AF) などの高比強度を有する繊維補強ポリマー (FRP) が土木・建築構造物に適用されつつある。これらの新素材を連続繊維として鉄筋の代わりに使用するほかに、耐震補強工法として鉄筋コンクリートの梁や柱部材をシート状の炭素繊維シート (CFS) で補強する研究開発も行なわれている<sup>23)</sup>。また、膜構造物の膜材にもガラス繊維、ポリエステル繊維、ポリアラミド繊維を基布とする織布が使用されている<sup>24)</sup>。さらに、橋梁全体を FRP だけで製作された事例もある<sup>25)</sup>。しかし、今のところこれらのシート材料や平面・曲面部材としての力学特性は等角対称積層として擬似等方性をもつように設計して使用されている場合が多い。

一方、航空工学の分野では、航空機の翼のダイバージェンス現象やフラッター現象を抑えるために、積層複合構造部材の異方性を利用した空力弾性テーラリング (aeroelastic tailoring) の研究が行われている。異方性をもつ複合材料はその力学特性を広い範囲で変えることができるので、空力弾性テーラリングの活躍の舞台ともいわれている<sup>26)</sup>。最近、建築の分野でも膜材料の非線形性と異方性を考慮した応力と形状の最適化に関する研究も行われつつある<sup>27)</sup>。土木分野の超長大橋の設計では、自重の軽減とともに、風荷重による静的安定問題 (9.1 節) や動的空力問題 (9.2 節)、さらには振動制御技術 (9.3 節) が重要になってくるので、次世代の超長大橋の開発のためには空力弾性テーラリングの利用の可能性も考えられる。このような積層構造からなる平板や曲面板の場合にも本章で述べてきた力学理論が基礎となる。例えば、積層偏平シェルの解析は、5.6 節の等方性偏平シェルの理論を拡張して、材料の異方性を考慮した解析を行うことができる<sup>28)</sup>。

## 参考文献

- 1) 矢野克己ほか：構造計画, 新建築学大系 25, 彰国社, 1981.
- 2) J. Schlaich : Haben Betonschalen eine Zukunft?, Sonderdruck aus, beton, 32 Heft 9, pp.327-332, 1982.
- 3) Y. Tzuboï and M. Kawaguchi: Probleme beim Entwurf einer Hängedachkonstruktion anhand des Beispiels der Schwimmhalle für die Olympischen Spiel 1964 in Tokio, Der Stahlbau, ss.65-85, 3, 1966.
- 4) Proc.of the II. International Symposium of the Sonderforschungsbereich 230, Natural, Strategies, and Models in Architecture and Nature, 1991.
- 5) F.Otto 著, 岩村和夫 訳: 自然な構造体, SD 選書 201, 鹿島出版会, 1986.
- 6) 例えば, F.Otto : IL23 Konstruktion Structures — Form  $\Leftrightarrow$  Force  $\Leftrightarrow$  Mass — , 1992.  
A proposal for the Classification and Description of Structures, IL Publications : IL1-40, Freunde und Förderer der Leichtbauforschung e.V.
- 7) 日本鋼構造協会編：吊構造, コロナ社, 1975.
- 8) 半谷裕彦：シェル構造の基礎と応用, 生研セミナーテキスト, (財) 生産技術研究奨励会, 1982.
- 9) 坪井善勝, 田治見宏, 角野晃二：応用数学, コロナ社, 1963.
- 10) 坪井善勝：連続体力学序説, 1977.
- 11) 川股重也：シェル構造解析, コンピュータによる構造工学講座 II-6-A, 日本鋼構造協会編, 培風館, 1974.
- 12) 久田俊明：非線形有限要素のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 1992.
- 13) A. グレイ著, 小島順, 武沢護訳：Mathimatica 曲線と曲面の微分幾何, 1996.
- 14) 小松定夫：構造解析学 III — 弾性連続体の解析 — , 丸善, 1986.
- 15) Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959.
- 16) 秋山成興：新体系土木工学, 弾性体の力学, 土木学会編, 技報堂, 1979.
- 17) 構造力学公式集, 土木学会編, 1986.
- 18) Kraus, H. : Thin Elastic Shells, John Wiley & Sons, 1967.
- 19) 坪井善勝：建築弾塑性学, 建築学大系 9-I, 彰国社, 1972.
- 20) 南宏和：膜構造物設計における膜の弾性理論, 日刊工業新聞社, 1998.

- 21) 坪井善勝：膜構造およびケーブルネットの基本的力学挙動の解明，日本建築学会構造系論文報告集，第390号，pp.98-104，1988.
- 22) 森田千尋ほか：偏平シェル構造の複合非線形解析，構造工学論文集，土木学会，Vol.39A，pp.51-62，1993.
- 23) M. Hörmann et-al.: Ertüchtigung von Stahlbetonplatten durch feserverstärkte Kunststoffe — Versuch und FE-Rechnungen, Proc. of “Baustatik – Baupraxis VII” 1999.  
M. Hörmann et-al.: Strengthening of concrete slabs by externally bonded fiber reinforced polymers, experimental and finite element investigation. In: Conference Proc. of NATO Advanced Study Institute on Mechanics of Composite Structures, Troia, Portugal, 1998.
- 24) 膜構造建築物構造設計の手引・計算例集，日本膜構造協会，1989.
- 25) NCB研究会編：新しい合成構造と橋，pp.263-269，山海堂，1996.
- 26) 福田博，邊吾一：複合材料の力学序説，古今書院，pp.127-133，1989.
- 27) 大崎純，藤原淳：膜材料の非線形性と異方性を考慮した膜構造物の応力・形状最適化，膜構造研究論文集，日本膜構造協会，pp.1-9，1989.
- 28) 松田浩ほか：積層偏平シェルの弾性曲げ解析，構造工学論文集，土木学会，Vol.40A，pp.99-109，1994.