

第 4 章

ケーブル構造の動的問題

ケーブルは材料としての鋼の特性、つまり引張りに強いという機能をフルに活用する構造部材であって、構造物の長大化にとって極めて重要な役割を演じる。しかし、材料の機能をフルに活用するが故に、軽量かつ低剛性となり、減衰も小さくなって、風や地震、交通荷重などの動的外力により、ケーブル部材、あるいはケーブル構造全体の振動がしばしば問題とされる。本章では、このようなケーブルの動力学問題に関連した基礎を整理して示す。まず、基礎方程式を誘導し、動力学問題の解法を概説した後に、振動における最も重要な特性として、固有振動数、固有振動モード、およびモード減衰から成る固有振動特性を、単一ケーブルについて詳しく説明する。また、構造物内でのケーブル部材の連成振動の重要性も示すと同時に、ケーブルの振動を小さく押さえる振動制御法の基礎についても簡単に触れる。なお、ケーブルの動力学問題はギリシャの風琴振動に始まり、弦の振動はピタゴラス一派にも非常に興味を持たれていたとされる程、その歴史は古く、Irvine の著書¹⁾に詳しいので参照されたい。

4.1 基礎方程式とその特徴

ケーブルの動的解析にあたって導入される基本的仮定は静的解析におけるものと変わりはなく、それらを整理しておくとして以下のとおりである。

- (1) 曲げ剛性は無視できる程小さい（完全可撓性）。
- (2) 軸圧縮力には抵抗できない（引張構造部材）。
- (3) ひずみは 1 に対して十分小さい（微小ひずみ）。

ここでは、この基本仮定に基づき、ケーブルの動力学問題に対する基礎方程式を誘導する²⁾。

4.1.1 基礎方程式

1) 運動方程式

振動中の任意時刻でのケーブルを考え、図 4.1(a) に示すように、そのケーブルに沿って定義する曲線座標 s 、および空間に固定した直交直線座標 (x^1, x^2, x^3) を用いる。このとき、振動中のケーブルの任意点 s の空間位置は、その位置ベクトル \boldsymbol{x} によって完全に記述される。

図 4.1(b) に示すように、任意点 s でのケーブルの微小要素 ds を切り出せば、完全可撓性および引張部材の仮定から、断面には張力 T のみが内力として作用する。この内力と、そこに作用する物体力としての外力ベクトル \boldsymbol{X} および慣性力とのつり合いを考えることにより、ケーブルの運動方程式が以下のように導かれる。

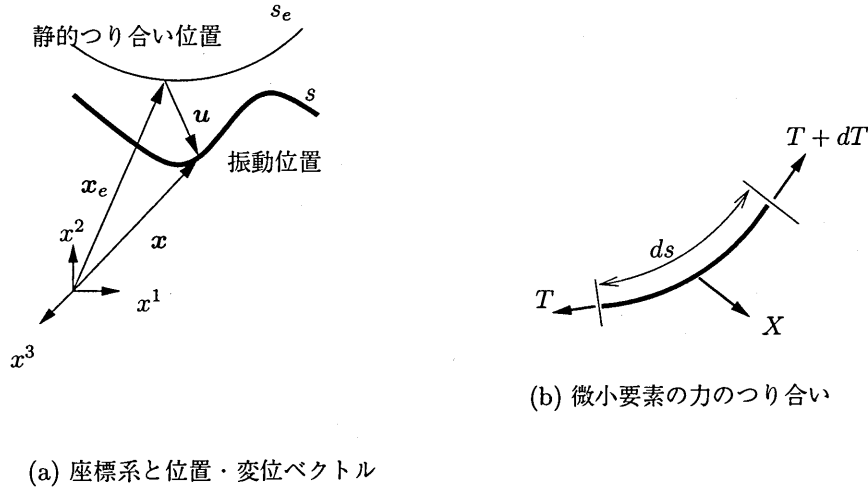


図 4.1: ケーブルの運動の記述と力のつり合い

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x^i}{\partial s} \right) + X^i - m \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

ただし、 m はケーブルの単位長さ当たり質量である。

式(4.1) はケーブルの変形後の状態を基準とした運動方程式であり、これを初期の静的なつり合い状態（添字 e で記述する）を基準とした方程式に変換する。つまり、図 4.1(a) に示すように振動中のケーブル任意点の位置ベクトル \mathbf{x} を静的つり合い位置ベクトル \mathbf{x}_e と動変位ベクトル \mathbf{u} に分解し、ケーブル張力 T および外力ベクトル \mathbf{X} も静的成分と動的成分（ Δ で記述）とで以下のように記述する。

$$x^i(s_e, t) = x_e^i(s_e) + u^i(s_e, t) \quad (4.2a)$$

$$T = T_e + \Delta T, \quad (4.2b)$$

$$X^i = X_e^i + \Delta X^i \quad (4.2c)$$

これを式(4.1)に代入すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial s_e} \left[(T_e + \Delta T) \frac{\partial (x_e^i + u^i)}{\partial s_e} \right] + (X_e^i + \Delta X^i) - m \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

ただし、式(4.3)を導く際には、微小ひずみの仮定により、静的つり合い状態で定義する曲線座標 s_e は振動中のケーブルの曲線座標 s に近似的に等しいものとしている。

なお、静的な変位、ケーブル張力、および外力との間に以下の静的つり合い式が成り立つことは、容易に示すことができる。

$$\frac{d}{ds_e} \left(T_e \frac{dx_e^i}{ds_e} \right) + X_e^i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

2) 応力-ひずみ関係式

微小ひずみの仮定からケーブル内の引張応力と引張ひずみとを線形関係で近似し、静的、動的各ケーブル張力を、対応する伸びひずみ ε に伸び剛性 EA を乗じて表す。

$$T_e = EA\varepsilon_e, \quad \Delta T = EA\Delta\varepsilon \quad (4.5)$$

なお、図 4.2 にケーブル張力とひずみの関係を模式的に図示した。

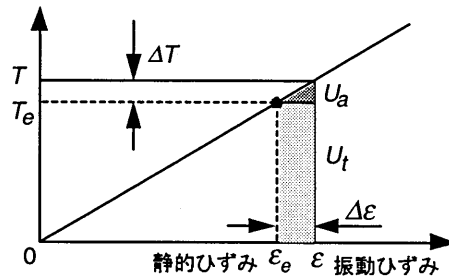


図 4.2: ケーブル張力とひずみの関係

3) ひずみ-変位関係式

ケーブルの伸びひずみ ε は、ケーブルが無応力状態のときを基準としたひずみの定義を用いて、初期静的ひずみ ε_e 、静的つり合い形状 x_e^i 、および動的変位 u^i で以下のように表される。

$$\varepsilon = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2ds_0^2} = \varepsilon_e + \frac{dx_e^j}{ds_0} \frac{\partial u^j}{\partial s_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^j}{\partial s_0} \frac{\partial u^j}{\partial s_0} \quad (4.6)$$

ここで、 s_0 は無応力状態のケーブルに沿う物体座標であるが、微小ひずみの仮定を再び導入すれば、静的つり合い状態で定義する物体座標 s_e に近似的に等しいものとなる。したがって、動的伸びひずみ $\Delta\varepsilon$ と動的変位 u^i との関係は最終的に次式となる。

$$\Delta\varepsilon = \frac{dx_e^j}{ds_e} \frac{\partial u^j}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^j}{\partial s_e} \frac{\partial u^j}{\partial s_e} \quad (4.7)$$

なお、式 (4.6), (4.7) での添字 j は擬似指標であって、1 から 3 までの和をとる。

4) 仮想仕事の原理とポテンシャル・エネルギー

上述のケーブルに対する仮想仕事の原理を考え、それから導かれる変分原理を基に、ケーブルの減衰解析に必要なポテンシャルエネルギーを厳密に求めておくこととする。このため、一般の初期応力問題に対する変分原理の誘導³⁾をケーブル問題に適用する。

簡単のため、慣性力を物体力としての動的外力 ΔX^i に含めて考え、これを ΔX^{*i} とすれば、動的変位および動的ひずみの仮想量 (δ で記述) に対する仮想仕事式は、運動方程式 (4.3) から以下のように導かれる。

$$\int_0^{l^*} (T_e + \Delta T) \delta(\Delta\varepsilon) ds_e - \int_0^{l^*} (X_e^i + \Delta X^{*i}) \delta u^i ds_e = 0 \quad (4.8)$$

ここで、 l^* はケーブル部材長である。式 (4.8) に初期静的つり合い式 (4.4) と動的ひずみ-動的変位関係式 (4.7) を代入して部分積分を施せば、ケーブルに対する仮想仕事の原理が以下のように表される。

$$\int_0^{l^*} \Delta T \delta(\Delta\varepsilon) ds_e + \int_0^{l^*} T_e \frac{\partial u^i}{\partial s_e} \frac{\partial \delta u^i}{\partial s_e} ds_e - \int_0^{l^*} \Delta X^{*i} \delta u^i ds_e = 0 \quad (4.9)$$

上式の左辺第 1 項は動的ケーブル張力が仮想動的ひずみとなす仮想仕事であるのに対し、第 2 項は初期張力をもたらず仮想仕事である。ここで注意すべきことは、初期張力は仮想動的ひずみの非線形項 (式 (4.7) の右辺第 2 項に対応) とのみ仕事をなすことである。

式 (4.9) の仮想仕事の原理から変分原理 (最小ポテンシャルエネルギー原理あるいは Hamilton の原理) を誘導することは簡単に行うことができ、その結果として 2 つのポテンシャルエネルギーが定義される。第一は

動的張力の仮想仕事に対応する動的ひずみエネルギー U_a であり、第二は初期張力の仮想仕事に対応する初期張力ポテンシャルエネルギー U_t であって、それぞれ以下のように導かれる。

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^{l^*} EA(\Delta\varepsilon)^2 ds_e \quad (4.10)$$

$$U_t = \frac{1}{2} \int_0^{l^*} T_e \frac{\partial u^i}{\partial s_e} \frac{\partial u^i}{\partial s_e} ds_e \quad (4.11)$$

4.1.2 種々の動的問題に対する支配方程式

図4.3に示すように、スパンが l で支点間傾斜角が θ の鉛直面内に吊り下げられた単一ケーブルを考え、そのサグが f であるとする。このケーブルの振動を支配する方程式は、運動方程式 (4.3) に静的つり合い式 (4.4) を考慮し、応力-ひずみ関係式 (4.5) とひずみ-変位関係式 (4.6), (4.7) を代入すれば、静的つり合い位置からの動的変位を用いて、以下のように表される。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 x_e'^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} \quad (4.12a)$$

$$- c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(x_e' + \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{X}{m} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 y_e'^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} \quad (4.12b)$$

$$- c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(y_e' + \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{Y}{m} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) \quad (4.12c)$$

$$- c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial w}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right] - \frac{Z}{m} = 0$$

ここで、 u, v は面内振動の水平および鉛直変位、 w は面外水平変位、 x_e, y_e はケーブルの静的つり合い形状、 $()'$ はケーブル軸に沿って定義した曲線座標 s_e に関する1階微分を表す。また、 X, Y, Z はケーブル軸に沿う単位長さ当たりの分布外力成分である。さらに c_0, c_1 は同じスパンの弦（サグのないケーブル）の横波および縦波の伝播速度であって、次式で定義される。

$$c_0 \equiv \sqrt{\frac{H_e}{m}}, c_1 \equiv \sqrt{\frac{EA}{m}} \quad (4.13)$$

ただし、 H_e はケーブルの静的張力 T_e の水平成分であり、一定値である。

支配方程式 (4.12 a-c) には、運動方程式、ならびにひずみ-変位関係式の非線形性に基づく幾何学的非線形項が存在し、ケーブルの面内振動 u, v と面外振動 w は非線形項を介して連成する。

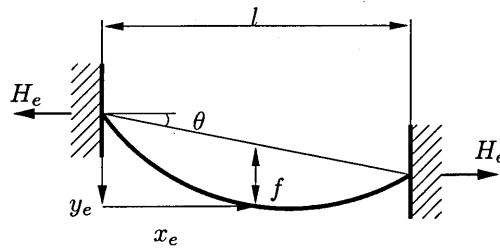


図 4.3: 単一ケーブルの初期形状

1) 微小振動に対する運動方程式

単一ケーブルの3次元微小振動を考える。ケーブル一般の変位表示の支配方程式(4.12 a-c)において、線形振動として扱えるような微小振動を考え、動的変位の非線形項を線形項に対して無視すれば、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 x_e'^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} - \frac{X}{m} = 0 \quad (4.14a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 y_e'^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} - \frac{Y}{m} = 0 \quad (4.14b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) - \frac{Z}{m} = 0 \quad (4.14c)$$

上式より明らかなように、ケーブル面内の水平振動 u と鉛直振動 v とは連成するものの、ケーブル面外振動 w は独立となる。したがって、線形理論、つまり微小振動の理論では、ケーブルの面内振動と面外振動とは完全に分離され、幾何学的非線形性を考慮して初めてそれらが連成することがわかる。

2) 面外振動による面内連成振動

面内自由振動に着目し、面内変位 u, v の非線形項を無視して支配方程式(4.12a,b)を線形化すれば、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 x_e'^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} = c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 x_e' \right\} \quad (4.15a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 y_e'^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} = c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 y_e' \right\} \quad (4.15b)$$

となる。式(4.12 a,b)で面外変位 w の2次項は面内変位 u, v の線形項の係数、および外力項に現れるが、面外振動も微小であるとすれば、前者は高次の微小項となり、1次の微小項である線形項に対して無視できる。一方、後者は外力が0の時には、0に対してであるので無視し得ない。したがって、面外振動が微小であっても、面外振動により面内振動が励起されることになる。

3) 面内振動による面外パラメトリック振動

面外自由振動にのみ着目し、面外振動の支配方程式(4.12c)を面外変位 w についてのみ、その非線形項を無視して線形化すれば、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left\{ c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 \left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \right\} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right] = 0 \quad (4.16)$$

となる。したがって、面外振動においては、面内変位 u, v が直接、外力として作用することがなく、微小ではあっても面外振動により必ず励起される面内振動とは、その連成性が本質的に異なる。面内変位は面外運動方程式の剛性項係数として面外振動に関係することから、 u, v が周期的に変動する場合には運動方程式の剛性項係数が周期関数となって、いわゆるパラメトリック励振⁴⁾の可能性が存在する。

4.1.3 波動方程式とケーブル内を伝播する2種の波動

ケーブルは部材として非常に長く、時として、動力学問題を振動としてではなく、波動として捉えたほうがよい場合がある。振動と波動とは基本的に同じ動的現象を見方を変えて捉えたものと考えられ、本質的な違いはないが、一般の動的挙動を物理的に解釈する上で基本的な問題であるとして、ケーブル内を伝播する2種類の波動の存在とその特徴を示しておくこととする。

ケーブルの運動方程式 (4.1) は 2 階の 3 元連立偏微分方程式であり、これを偏微分方程式論でいう標準形に変換することにより、ケーブル内を伝播する波動が明らかにされる。そこで、

$$u^i = \frac{\partial x^i}{\partial s}, v^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.17)$$

とすれば、式 (4.1) は 1 階の 6 元連立偏微分方程式に帰着し、これを、状態ベクトル r を

$$r^T = \begin{bmatrix} u^1 & u^2 & u^3 & v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

としてマトリックス (状態方程式) 表示すれば、

$$Ar_s + Br_t + f = 0 \quad (4.19)$$

となる。ここで、添字 t, s はそれぞれ、時間 t 、曲線座標 s に関する偏微分を意味する。また、各係数マトリックス、およびベクトルは以下のものである。

$$A = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -mI \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad f^T = \begin{bmatrix} X^1 & X^2 & X^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ただし、 $I, 0$ は 3×3 の単位マトリックス、および零マトリックスであり、係数マトリックス C は

$$C = \begin{bmatrix} T + (EA - T)(u^1)^2 & (EA - T)u^1u^2 & (EA - T)u^1u^3 \\ & T + (EA - T)(u^2)^2 & (EA - T)u^2u^3 \\ & & T + (EA - T)(u^3)^2 \\ \text{sym.} & & & \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

である。なお、式の変換に際しては、応力 - ひずみ関係式、ひずみ - 変位関係式として、式 (4.5 a,b), (4.6) の代わりに、より一般的な次式を用いている。

$$T = EA\varepsilon \quad (4.5') \quad (1 + \varepsilon)^2 \doteq \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial s} \quad (4.6')$$

状態方程式 (4.19) に変換マトリックス T を左から乗じて、次なる標準形に変換することを考える⁵⁾。

$$\Lambda A^* r_s + A^* r_t + f^* = 0 \quad (4.22)$$

ここで、 Λ は対角マトリックス、また、

$$\Lambda A^* = TA, \quad A^* = TB, \quad f^* = Tf \quad (4.23)$$

である。標準形方程式 (4.22) は、係数マトリックスが対角化されていることから、第 i 行目を取り出せば、

$$a^{*i} \left(\lambda^i \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} \right) r + f^{*i} = 0 \quad (4.24)$$

つまり、 $s - t$ 平面において勾配が $ds/dt = \lambda^i$ であるような曲線 C^i に沿って

$$a^{*i} dr + f^{*i} dt = 0 \quad (4.25)$$

となり、方程式は 1 方向のみの微分を含む形となる。このとき、 λ^i は特性方向、曲線 C^i は特性曲線と呼ばれる。

式(4.23)より明らかなように、特性方向 λ^i と対応する \mathbf{a}^{*i} はマトリクス $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ の固有値および固有ベクトルとして求められるが、固有値 λ^i が全て実数のとき、偏微分方程式は双曲型であって、 λ^i は波動の伝播速度を与える⁵⁾⁶⁾。式(4.20)および式(4.21)を用いてケーブルの場合の固有値問題を解けば、簡単に、固有値として次式が得られる。

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{EA}{m}} = \pm c_1 \quad (4.26a)$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{T}{m}} = \pm c_2 \text{ (重根)} \quad (4.26b)$$

このことより、ケーブル内を伝播する波動は2種類存在し、その伝播速度は c_1, c_2 であることが言える。特性曲線は物理的には波頭面を意味するから、速度 c_1, c_2 で伝播する波動がいかなる性質のものかは、特性曲線を横断しての不連続性を調べればよく、結果として、それぞれ、サグを有するケーブル内を伝播する縦波、横波に対応することが示される⁷⁾。ここで注意すべきことは、縦波伝播速度は密度 $\rho (= m/A)$ 、ヤング率 E の弾性体の縦波伝播速度と同じであって一定値となるのに対し、横波伝播速度は、ケーブル張力 T が場所、時間によってことなることから、空間座標および時間の関数となることである。

一方、固有ベクトルである \mathbf{a}^{*i} も比較的簡単に求めることができ、標準形に変換された状態方程式(4.25)は、最終的に次のような波動方程式として表される。

$$\left[\pm c_1 \mathbf{t}^{1T} \quad -\mathbf{t}^{1T} \right] d\mathbf{r} + \frac{1}{m} \mathbf{t}^{1T} \bar{\mathbf{f}} dt = 0 \quad \frac{ds}{dt} = \pm c_1 \text{ に沿って} \quad (4.27a)$$

$$\left[\pm c_2 \mathbf{t}^{jT} \quad -\mathbf{t}^{jT} \right] d\mathbf{r} + \frac{1}{m} \mathbf{t}^{jT} \bar{\mathbf{f}} dt = 0 \quad j = 2, 3 \quad \frac{ds}{dt} = \pm c_2 \text{ に沿って} \quad (4.27b)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{1T} &= \begin{bmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{bmatrix}, & \mathbf{t}^{2T} &= \begin{bmatrix} (u^2)^2 + (u^3)^2 - u^1 u^2 u^3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{t}^{3T} &= \begin{bmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{f}} &= \begin{bmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.2 ケーブルの振動解析

前節で示した基礎方程式は、ケーブルを連続体として導かれた、時間 t と空間座標 s_e を独立変数とする偏微分方程式である。この偏微分方程式を数学的に、かつ解析的に解くことは難しいことが多く、コンピュータ利用を前提とした離散化系に対する数値解法を採用するのが一般的であり、ケーブルの力学問題についても同様である。代表的な離散化解析法は有限要素法であるが、動力学問題の場合、動的特性を反映した合理的な離散化、モデル化が可能であり、精度を保ちつつ、解析を簡略化することが可能となるなど、特徴的なものも多い。

4.2.1 有限要素法による離散化解析

動力学問題を有限要素法によって解析する場合、1.5で述べたケーブルの有限要素を用いれば、運動方程式は以下の形式で与えられる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} \quad (4.29)$$

ここで、 \mathbf{M}, \mathbf{f} は質量マトリックスと節点外力ベクトルであり、通常の骨組構造の有限要素法での離散化と何ら変わることなく、要素に対して(添字 e で表す)、次式で評価される。

$$\mathbf{M}_e = \int_0^{l_e^*} m \mathbf{N}^T \mathbf{N} ds, \mathbf{f}_e = \int_0^{l_e^*} \mathbf{N}^T \mathbf{X} ds \quad (4.30)$$

ここで、 l_e^* はケーブル要素長であるが、例えば、直線ケーブル要素、および放物線ケーブル要素に対する質量マトリックス M_e^1 , M_e^2 は以下のように求められる⁸⁾。

$$M_e^1 = \frac{ml_e^*}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ sym. & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad M_e^2 = \frac{ml_e^*}{30} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ & & & 16 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 16 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & & & & & 16 & 0 & 0 & 2 \\ & & & & & & 4 & 0 & 0 \\ sym. & & & & & & & 4 & 0 \\ & & & & & & & & 4 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

非線形運動方程式 (4.29) についてその増分を考えれば、接線剛性マトリックスを $K_T(x)$ として、線形化された運動方程式が以下のように求められ、これを数値的に逐次時間積分⁹⁾することによってケーブルの非線形動的挙動が解析できる。

$$M\delta\ddot{x} + K_T(x)\delta x = \delta f \quad (4.32)$$

なお、接線剛性マトリックス $K_T(x)$ の具体的な評価式は文献⁸⁾を参照されたい。

4.2.2 一般化変位を用いた離散化解析

一般化変位による解析法は、空間座標の関数として求めるべき物理変位を、適切に選んだ有限個の形状関数の重ね合わせで近似し、解析の自由度を低減する離散化近似解法である。その解析精度は、実際の物理変位をどんな変位パターンの和とするか、つまり形状関数の選び方に大きく依存する。一般に構造物の動力学問題の場合、構造物固有の振動特性である固有振動モードが構造物の動的応答と深く関わり、しかも低次の数モードのみが支配的であることが多いことから、固有振動モードを形状関数に選んだ場合に、少ない自由度で精度の高い解析が可能となる。線形動力学問題では最も重要、かつ合理的な解析法であり、モード解析法¹⁰⁾として知られるが、この方法は非線形性の強くない動的問題に対しても有用であって、ケーブルの動力学問題にも適用されることが多い¹¹⁾¹²⁾。

ケーブル一般の運動に関する支配方程式 (4.12a-c) の解を、初期状態での線形系基準関数、つまり固有振動モードで展開し、次式で近似する。

$$\begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^N p_n(t) \begin{Bmatrix} \xi_n(s_e) \\ \eta_n(s_e) \end{Bmatrix} \quad (4.33a)$$

$$w_a = \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} q_{\bar{n}}(t) \zeta_{\bar{n}}(s_e) \quad (4.33b)$$

ここで、 $[\xi_n(s_e) \ \eta_n(s_e)]^T$ は面内 n 次固有振動モード、 $\zeta_{\bar{n}}(s_e)$ は面外 \bar{n} 次固有振動モードであって、4.3 節で示すように、初期状態を基準に線形化されたケーブルについて求められる。また、 $p_n(t)$, $q_{\bar{n}}(t)$ は対応する面内一般化変位、面外一般化変位である。すなわち、近似解として、 u_a , v_a については面内運動として一般化変位 p_n で表し、 w_a については面外運動として一般化変位 $q_{\bar{n}}$ で表している。したがって、空間3方向に自由度を持つ系から、面内、面外2方向にのみ自由度を持つ系に変換して、自由度を低減していることになる。

式 (4.33a,b) を運動方程式 (4.12a,b,c) に代入して Galerkin 法¹³⁾ を適用する。つまり、式 (4.12a,b,c) をそれぞれ、 $L_x(u, v, w) = 0$, $L_y(u, v, w) = 0$, $L_z(u, v, w) = 0$ と表せば、

$$\int_0^l \{L_x(u_a, v_a, w_a)\xi_i(s_e) + L_y(u_a, v_a, w_a)\eta_i(s_e)\} ds_e = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.34a)$$

$$\int_0^l L_z(u_a, v_a, w_a)\zeta_{\bar{i}}(s_e) ds_e = 0 \quad \bar{i} = 1, 2, \dots, \bar{N} \quad (4.34b)$$

とすることにより、 s_e と t とを独立変数とした連立偏微分方程式である運動方程式を、一般化変位についての t のみを独立変数とした連立常微分方程式に変換する。部分積分等を用いて整理し、適切な無次元化を行えば、最終的に次式が得られる。

$$m_i^* \dot{p}_i^* + \sum_{j=1}^N K_{ij}^* p_j^* + \sum_{j=1}^{\bar{N}} K_{ij}^* q_j^* = \bar{f}_i^* \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.35a)$$

$$m_{\bar{i}}^* \dot{q}_{\bar{i}}^* + \sum_{j=1}^{\bar{N}} K_{\bar{i}j}^* q_j^* = \bar{f}_{\bar{i}}^* \quad \bar{i} = 1, 2, \dots, \bar{N} \quad (4.35b)$$

ただし、 p_i^* , $q_{\bar{i}}^*$ は p_i , $q_{\bar{i}}$ をスパン長 l で無次元化した一般化変位であり、ここでの時間微分は、実時間を弦の基本周期で無次元化した無次元時間；

$$t^* = \frac{\pi}{l} c_0 \sqrt{\cos \theta} t \quad (4.36)$$

に関するものである。また、

$$K_{ij}^* = \frac{1}{8\gamma^*} \left[k_{ij}^* + k^2 \sum_{n=1}^N k_{ijn}^* p_n^* + \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N k_{ijnm}^* p_m^* p_n^* + \frac{k^2}{2} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{N}} k_{ij\bar{n}\bar{m}}^* q_{\bar{m}}^* q_{\bar{n}}^* \right] \quad (4.37a)$$

$$K_{\bar{i}\bar{j}}^* = \frac{1}{8\gamma^*} \left[\frac{k^2}{2} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} k_{\bar{i}\bar{j}\bar{n}}^* q_{\bar{n}}^* \right] \quad (4.37b)$$

$$K_{\bar{i}j}^* = \frac{1}{8\gamma^*} \left[k_{\bar{i}j}^* + k^2 \sum_{n=1}^N k_{\bar{i}jn}^* p_n^* + \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N k_{\bar{i}jnm}^* p_m^* p_n^* + \frac{k^2}{2} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{N}} k_{\bar{i}j\bar{n}\bar{m}}^* q_{\bar{m}}^* q_{\bar{n}}^* \right] \quad (4.37c)$$

であり、式中、 γ^* , k は重量・水平張力比 ($mg/l/8H_e$, 放物線ケーブルの場合、サグ比 f/l を意味する)、および伝播速度比 (c_1/c_0) である。

さらに、式 (4.35 a,b), (4.37 a-c) における各係数は Galerkin 法による積分項であり、ケーブルの初期形状及び固有振動モードに依存する無次元量であって、次式のように表される。

$$\begin{aligned} m_i^* &= \frac{\pi^2 \cos \theta}{8\gamma^*} \int_0^{\sigma_i} (\xi_i^2 + \eta_i^2) d\sigma, & m_{\bar{i}}^* &= \frac{\pi^2 \cos \theta}{8\gamma^*} \int_0^{\sigma_i} \zeta_{\bar{i}}^2 d\sigma \\ k_{ij}^* &= \int_0^{\sigma_i} \left\{ \left(\frac{1}{x_e^*} + k^2 x_e^* \right) \xi_j' + k^2 x_e^* y_e^* \eta_j' \right\} \xi_i' d\sigma + \int_0^{\sigma_i} \left\{ \left(\frac{1}{x_e^*} + k^2 y_e^{*2} \right) \eta_j' + k^2 x_e^* y_e^* \xi_j' \right\} \eta_i' d\sigma \\ k_{ijn}^* &= \int_0^{\sigma_i} \left(\frac{3}{2} x_e^* \xi_j' \xi_n' + y_e^* \eta_j' \xi_n' + \frac{1}{2} x_e^* \eta_j' \eta_n' \right) \xi_i' d\sigma + \int_0^{\sigma_i} \left(\frac{1}{2} y_e^* \xi_j' \xi_n' + x_e^* \xi_j' \eta_n' + \frac{3}{2} y_e^* \eta_j' \eta_n' \right) \eta_i' d\sigma \\ k_{ijnm}^* &= \int_0^{\sigma_i} (\xi_n' \xi_m' + \eta_n' \eta_m') (\xi_i' \xi_j' + \eta_i' \eta_j') d\sigma, & k_{ij\bar{n}\bar{m}}^* &= \int_0^{\sigma_i} (\xi_i' \xi_j' + \eta_i' \eta_j') \zeta_{\bar{n}}' \zeta_{\bar{m}}' d\sigma \\ k_{\bar{i}j\bar{n}}^* &= \int_0^{\sigma_i} (x_e^* \xi_i' + y_e^* \eta_i') \zeta_{\bar{j}}' \zeta_{\bar{n}}' d\sigma, & k_{\bar{i}jn}^* &= \int_0^{\sigma_i} (x_e^* \xi_n' + y_e^* \eta_n') \zeta_{\bar{i}}' \zeta_j' d\sigma \\ k_{\bar{i}j}^* &= \int_0^{\sigma_i} \frac{1}{x_e^*} \zeta_{\bar{i}}' \zeta_j' d\sigma, & k_{\bar{i}jnm}^* &= \int_0^{\sigma_i} (\xi_n' \xi_m' + \eta_n' \eta_m') \zeta_{\bar{i}}' \zeta_j' d\sigma, & k_{\bar{i}j\bar{n}\bar{m}}^* &= \int_0^{\sigma_i} \zeta_{\bar{n}}' \zeta_{\bar{m}}' \zeta_{\bar{i}}' \zeta_j' d\sigma \end{aligned}$$

$$\bar{f}_i^* = \int_0^{\sigma_l} (\bar{X}_d^* \xi_i + \bar{Y}_d^* \eta_i) d\sigma, \quad \bar{f}_i^* = \int_0^{\sigma_l} \bar{Z}_d^* \zeta_i d\sigma \quad (4.38)$$

ただし、 x_e^* , y_e^* , σ , σ_l はスパン長で無次元化した初期空間位置，曲線座標，およびケーブル長である。

一般化変位で表された運動方程式 (4.35 a,b) をマトリックス表示すれば，有限要素法による離散化解析と同じく，以下の形となる。

$$M^* \ddot{q} + K^*(q) = f^* \quad (4.39)$$

ここで， q は一般化変位ベクトルであり，剛性項が一般化変位の非線形マトリックスとなる。これを数値解析するためには，任意時刻のつり合い状態からの微小増分を考え，線形化した増分形運動方程式を求めればよい。すなわち，

$$M^* \delta \ddot{q} + K_T^*(q) \delta q = \delta f^* \quad (4.40)$$

である。ただし， $K_T^*(q)$ は一般化接線剛性マトリックスであり，次式で表される。

$$K_T^*(q) = K^*(q) + K_G^*(q) \quad (4.41)$$

ここで， $K_G^*(q)$ は一般化幾何剛性マトリックスであって，以下のように求められる。

$$K_G^*(r) = \begin{bmatrix} [K_{Gij}^*] & [K_{Gi\bar{j}}^*] \\ [K_{G\bar{i}j}^*] & [K_{G\bar{i}\bar{j}}^*] \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$K_{Gij}^* = \frac{k^2}{8\gamma^*} \left[\sum_{n=1}^N k_{inj}^* p_n^* + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N k_{injm}^* p_m^* p_n^* \right], \quad K_{Gi\bar{j}}^* = \frac{k^2}{8\gamma^*} \left[\frac{1}{2} \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} k_{i\bar{n}\bar{j}}^* q_{\bar{n}}^* + \sum_{n=1}^N \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{N}} k_{in\bar{j}\bar{m}}^* q_{\bar{m}}^* p_n^* \right]$$

$$K_{G\bar{i}j}^* = \frac{k^2}{8\gamma^*} \left[\sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} k_{i\bar{n}j}^* q_{\bar{n}}^* + \sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \sum_{m=1}^N k_{i\bar{n}jm}^* p_m^* q_{\bar{n}}^* \right], \quad K_{G\bar{i}\bar{j}}^* = \frac{k^2}{8\gamma^*} \left[\sum_{\bar{n}=1}^{\bar{N}} \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{N}} k_{i\bar{n}\bar{j}\bar{m}}^* q_{\bar{m}}^* q_{\bar{n}}^* \right] \quad (4.43)$$

4.2.3 有限要素法と一般化変位法を併用したケーブル構造の振動解析

前節で述べた一般化変位法は，当然のことながら，線形系に対しても合理的な解法であり，特にマルチケーブル斜張橋など，多数のケーブル部材を有するケーブル構造の振動解析に威力を発揮する。マルチケーブル斜張橋では桁，塔，ケーブルの連成振動が問題とされ，これを有限要素法で解析しようとするれば，多数あるケーブルのそれぞれに自由度を多くとる必要があるため，斜張橋全体の解析モデルの自由度は膨大となって現実的ではなくなる。この問題に対し，ケーブル部材の振動に関しては一般化変位で記述し，桁や塔については有限要素モデルを採用する方法が提案され，その有用性が認められている¹⁴⁾¹⁵⁾。この方法は基本的にはモード解析法であるが，ケーブルに着目した部分構造法と呼ばれる手法である。つまり，複数の構造要素より成る構造物を部分領域に分けて考え，その部分構造の振動を一般化変位 (モード座標) で表して構造全体系の振動応答解析を行う部分構造法 (より具体的には区分モード合成法)¹⁶⁾¹⁷⁾ を斜張橋に適用したものである。

図 4.4 は，斜張橋の固有振動解析について，ケーブル振動を一般化変位で表した場合の部分構造法の定式化の流れを示したものである。以下，この流れに沿って，定式化の概略を説明することにする。

まず，両端にのみ外力 (斜張橋の場合，桁，塔との結合点での内力) を受けるケーブル部材を有限要素モデルで表し，その運動方程式を導く。つまり，

$$m_c \ddot{d}_c + k_c d_c = f_c \quad (4.44)$$

ここで、 $\mathbf{m}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{d}_c, \mathbf{f}_c$ はケーブル部材の質量マトリックス、剛性マトリックス、変位ベクトル、外力ベクトルである。この変位ベクトルを、桁、塔との結合点である材端の変位 $\mathbf{d}_{cG}, \mathbf{d}_{cP}$ と内部変位 \mathbf{d}_{ci} に分割して表し、図 4.4 の枠内に示したように、内部変位を材端変位と振動モードに対する一般化変位で表すことを考える。ケーブル部材の運動方程式 (4.44) を材端変位と内部変位に分割すれば、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{cGG} & \mathbf{m}_{cGi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_{ciG} & \mathbf{m}_{cii} & \mathbf{m}_{ciP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{cPi} & \mathbf{m}_{cPP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_{cG} \\ \ddot{\mathbf{d}}_{ci} \\ \ddot{\mathbf{d}}_{cP} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{cGG} & \mathbf{k}_{cGi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{ciG} & \mathbf{k}_{cii} & \mathbf{k}_{ciP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{cPi} & \mathbf{k}_{cPP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{cG} \\ \mathbf{d}_{ci} \\ \mathbf{d}_{cP} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{cG} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{cP} \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

となるが、まず、慣性力項を無視し、剛性方程式の第 2 式に着目して内部変位ベクトルを材端変位ベクトルで表す静縮約¹⁶⁾を適用すれば、次式を得る。

$$\mathbf{d}_{ci} = -\mathbf{k}_{cii}^{-1} \mathbf{k}_{ciG} \mathbf{d}_{cG} - \mathbf{k}_{cii}^{-1} \mathbf{k}_{ciP} \mathbf{d}_{cP} = \mathbf{T}_{c1} \mathbf{d}_{cG} + \mathbf{T}_{c2} \mathbf{d}_{cP} \quad (4.46)$$

ここで、 $\mathbf{T}_{c1}, \mathbf{T}_{c2}$ は、それぞれ G, P 点に単位変位を与えた場合の内部変位を意味する静的モードである。このように動力学問題に静縮約を導入することは近似でしかないが、低次モードの解析に対しては十分な精度を有するとされている。

材端変位により生ずる内部変位；式 (4.46) に加えて考えるべきケーブル振動変位については、両端固定ケーブルの運動方程式 (式 (4.45) で第 2 式のみを考えればよい)、

$$\mathbf{m}_{cii} \ddot{\mathbf{d}}_{ci} + \mathbf{k}_{cii} \mathbf{d}_{ci} = \mathbf{0} \quad (4.47)$$

を解いて得られる振動モード ϕ_{cn} で展開し、一般化変位 q_n で表す。つまり、内部変位ベクトルは次式で表すこととする。

$$\mathbf{d}_{ci} = \mathbf{T}_{c1} \mathbf{d}_{cG} + \mathbf{T}_{c2} \mathbf{d}_{cP} + \sum_{n=1}^N \phi_{cn} q_{cn} = \mathbf{T}_{c1} \mathbf{d}_{cG} + \mathbf{T}_{c2} \mathbf{d}_{cP} + \Phi_c \mathbf{q}_c \quad (4.48)$$

したがって、有限要素モデルで定式化されたケーブル部材の運動方程式 (4.44) は、座標変換、

$$\mathbf{d}_c = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{cG} \\ \mathbf{d}_{ci} \\ \mathbf{d}_{cP} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{c1} & \mathbf{T}_{c2} & \Phi_c \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{cG} \\ \mathbf{d}_{cP} \\ \mathbf{q}_c \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_c \tilde{\mathbf{d}}_c \quad (4.49)$$

によって、材端変位と一般化変位で表された変位ベクトルに対する運動方程式に変換される。つまり、

$$\tilde{\mathbf{m}}_c \ddot{\tilde{\mathbf{d}}}_c + \tilde{\mathbf{k}}_c \tilde{\mathbf{d}}_c = \tilde{\mathbf{f}}_c \quad (4.50)$$

ただし、質量マトリックス、剛性マトリックス、外力ベクトルは次式で評価される。

$$\tilde{\mathbf{m}}_c = \mathbf{T}_c^T \mathbf{m}_c \mathbf{T}_c, \quad \tilde{\mathbf{k}}_c = \mathbf{T}_c^T \mathbf{k}_c \mathbf{T}_c, \quad \tilde{\mathbf{f}}_c = \mathbf{T}_c^T \mathbf{f}_c \quad (4.51)$$

ケーブル部材の運動方程式 (4.50) は材端での変位と外力とを含んでいることから、有限要素モデルで定式化された桁・塔系の運動方程式に容易に足し込むことができ、斜張橋の運動方程式が求められる。

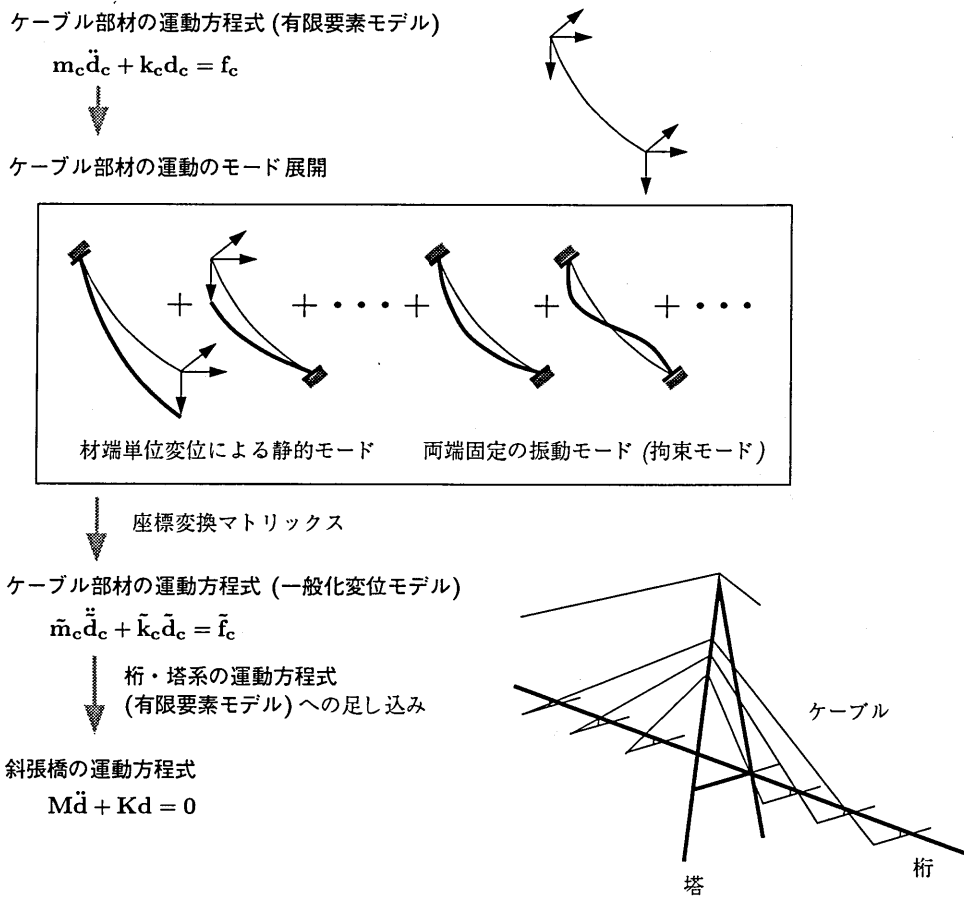


図 4.4: ケーブル振動を一般化変位で表した部分構造法による斜張橋の固有振動解析¹⁵⁾

4.2.4 特性曲線法による波動解析

強非線形形の動的応答や波動問題におけるケーブルの時間応答を追跡する場合には、その評価時間を短くすれば、双曲型偏微分方程式に特有の解法である特性曲線法を適用することが可能である。

標準形に変換された波動方程式 (4.27) は時間座標 t と空間座標 s に関する 1 階連立偏微分方程式であり、次の $s-t$ 空間での 4 つの方向 σ_1^+ , σ_1^- , σ_2^+ , σ_2^- に関する微分が独立に存在する方程式となっている。

$$d\sigma_i^\pm = ds \pm c_i dt \quad i = 1, 2 \tag{4.52}$$

この $s-t$ 空間での各特性方向を連ねたものが特性曲線 C^i であり、前述のように、縦波に対しては伝播速度 c_1 が一定であることから傾きが一定の直線となるが、横波については伝播速度 c_2 がケーブル張力に依存し、ケーブル張力は時間、場所により異なることから、傾きが変化する曲線となる (図 4.5)。

特性曲線法とは波動特性を考慮した差分法であって、この特性曲線に沿う微分関係式を差分化し、逐次積分を進めていくものである。特性曲線網を近似した網に沿う差分近似であるため、他の差分スキームで問題となる安定性、収束性の議論が不要という利点を有するとされている¹⁸⁾。

ケーブルの場合、特性曲線が 4 本であるため、図 4.6 に示すように、定数として確定される特性曲線 C^1 (縦波) の作る曲線網の交点を基本的な積分点とし、時間及び場所により変化する特性曲線 C^2 (横波) と C^1 の交点での情報は線形補間法を用いて決定して、積分点での状態ベクトルを求めて行く。具体的には、図 4.6 に示され

た $s-t$ 平面内の 3 点 O, P_+, P_- での状態ベクトル \mathbf{r} は既知であるとし, 2 点 R_+, R_- での状態ベクトル \mathbf{r} については O, P_\pm 間の線形補間によって推定し, 新たな積分点 Q での状態ベクトルを差分近似により求める.

縦波に関する波動方程式 (4.27a) を $\overline{QP_\pm}$ で, 横波に関する波動方程式 (4.27b) を $\overline{QR_\pm}$ で差分化し, 点 Q での未知状態ベクトル $\mathbf{r}(Q)$ につき解いてマトリックス表示すれば,

$$\mathbf{r}(Q) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm c_1 t^{1T} & -t^{1T} \\ \pm c_2 t^{2T} & -t^{2T} \\ \pm c_2 t^{3T} & -t^{3T} \end{bmatrix}_{P_\pm} \\ \begin{bmatrix} \pm c_1 t^{1T} & -t^{1T} \\ \pm c_2 t^{2T} & -t^{2T} \\ \pm c_2 t^{3T} & -t^{3T} \end{bmatrix}_{R_\pm} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm c_1 t^{1T} & -t^{1T} \\ \pm c_2 t^{2T} & -t^{2T} \\ \pm c_2 t^{3T} & -t^{3T} \end{bmatrix}_{P_\pm} \mathbf{r}(P_\pm) - \frac{\Delta t}{m} [t^{1T} \bar{\mathbf{f}}]_{P_\pm} \\ \begin{bmatrix} \pm c_1 t^{1T} & -t^{1T} \\ \pm c_2 t^{2T} & -t^{2T} \\ \pm c_2 t^{3T} & -t^{3T} \end{bmatrix}_{R_\pm} \mathbf{r}(R_\pm) - \frac{\Delta t}{m} [t^{2T} \bar{\mathbf{f}}]_{R_\pm} \\ \begin{bmatrix} \pm c_1 t^{1T} & -t^{1T} \\ \pm c_2 t^{2T} & -t^{2T} \\ \pm c_2 t^{3T} & -t^{3T} \end{bmatrix}_{R_\pm} \mathbf{r}(R_\pm) - \frac{\Delta t}{m} [t^{3T} \bar{\mathbf{f}}]_{R_\pm} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

ただし, $[]_{P_\pm}, []_{R_\pm}$ はマトリックスおよびスカラーの点 P_\pm, R_\pm での値を意味し, Δt は時間座標の差分間隔である. また, 上述したように, 点 R_\pm での状態ベクトルについては O, P_\pm 間の線形補間によって求めるものとし, 次式で推定する.

$$\mathbf{r}(R_\pm) = \frac{t(P_\pm) - t(R_\pm)}{\Delta t} \mathbf{r}(O) + \frac{t(R_\pm) - t(O)}{\Delta t} \mathbf{r}(P_\pm) \quad (4.54)$$

式 (4.53), (4.54) により, 未知状態ベクトル $\mathbf{r}(Q)$ が既知積分点での状態から求められ, 基本的には積分が進められる. ただし, 点 R_\pm の座標の決定には, 特性曲線 $\overline{QR_\pm}$ の傾き $\pm c_2$ が \mathbf{r} に依存することから, 何らかの近似を導入することになる. 例えば, 文献 7) では縦波の波動方程式を近似的に解いて点 Q でのひずみを評価し, それにより $\pm c_2$ を決定して点 R_\pm の座標を算出している.

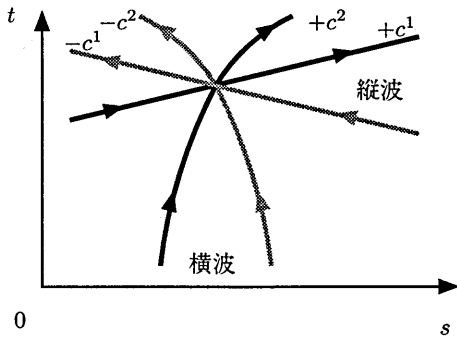


図 4.5: $s-t$ 空間での 4 つの特性曲線

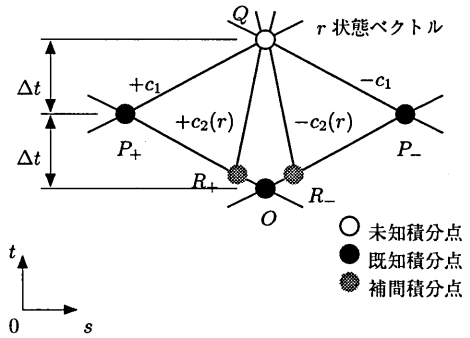


図 4.6: 差分法による $s-t$ 空間での積分点

4.3 ケーブルの固有振動

構造物の動力学問題を考える上で最も基本となるのが, 構造物そのものの自由振動特性である固有振動である. ケーブルの場合, その剛性が初期形状に大きく依存することから, 固有振動特性も初期形状によって大きく異なり, ここでは, 固有振動数, 固有振動モード, モード減衰比について, ケーブル特有の性質を示すこととする.

4.3.1 弦の固有振動固有振動

サグのないケーブルは弦として扱われ, 弦の固有振動は振動論の最も基本的な問題として古くから考えられている. その運動方程式は, ケーブル一般の線形化された運動方程式 (4.14c a-c) において, サグが 0 の初期

形状を有する条件； $s_e = x_e, x'_e = 1, y'_e = 1$ を適用し，外力を0とすれば，どの方向の横振動（軸に垂直な方向の振動）に対しても，以下のように導かれる．

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (4.55)$$

あるいは，弦の横波伝播速度 c_0 の代わりに質量 m と水平張力 H_e を用いれば，

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - H_e \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (4.56)$$

振動数を ω とし，この自由振動方程式の解を

$$v(x, t) = \bar{v}(x) e^{i\omega t} \quad (4.57)$$

と表して運動方程式 (4.56) に代入すれば，次式を得る．

$$H_e \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} + m\omega^2 \bar{v} = 0 \quad (4.58)$$

両端で変位が0という境界条件を考慮して，この微分方程式を境界値問題として解けば，固有振動数および固有振動モードが以下のように求められる．

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{H_e}{m}}, \bar{v}_n = A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.59)$$

良く知られているように，弦の横振動の n 次固有振動数は，基本振動数を $\pi/l\sqrt{H_e/m}$ として，振動次数 n 倍（整数倍）であり，固有振動モードは $n-1$ 個の節を持った正弦波となる．

4.3.2 放物線ケーブルの固有振動

4.1 で示したケーブルの一般的な基礎方程式や運動方程式は，サグ比の小さな放物線ケーブルの場合に簡略化することができる．最も重要な仮定は，サグが十分に小さい扁平な初期形状を有すること，およびそのことからケーブル軸方向の振動変位成分は重要ではなく無視することである．支点間傾斜角が0の水平ケーブルを考えれば，具体的には近似式として $s_e \doteq x, x'_e \doteq 1, y'_e \doteq dy_e/dx$ の関係を採用する．運動方程式 (4.3) にこの近似式と初期水平張力 $H_e (= T_e dx/ds_e)$ ，および動的な水平張力 $h (= \Delta T dx/ds_e)$ を導入して線形化することにより，放物線ケーブルの，初期静的つり合い状態からの微小振動に対する運動方程式が以下のように導かれる．

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - H_e \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - h \frac{d^2 y_e}{dx^2} = 0 \quad (4.60a)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - H_e \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4.60b)$$

式 (4.60 a) は面内鉛直振動，式 (4.60 b) は面外水平振動の運動方程式であるが，面内振動にのみ，サグの影響でケーブル張力の変動が関係してくる．この動的付加張力の水平成分 h は，応力-ひずみ関係式 (4.5 b) にひずみ-変位関係式 (4.7) の線形項のみを代入して導かれる，ケーブル方程式と呼ばれる次式で面内振動変位と関係付けられる．

$$\frac{h}{EA} \left(\frac{ds_e}{dx} \right)^3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy_e}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.61)$$

このケーブル方程式を x についてスパン全域にわたって積分し、境界条件を考慮すれば、動的水平張力 h が面内鉛直変位 v のみによって、かつ時間のみの変数として、以下のように表される。

$$\frac{hL_e}{EA} = \frac{mg}{H_e} \int_0^l v dx \quad (4.62)$$

ただし、初期つり合い形状 $y_e(x)$ として放物線を考え、第1章の式(1.9)を用いている。また、 L_e は初期状態でのケーブル長であり、これも第1章の式(1.15)を用いて以下のように近似できる。

$$L_e = \int_0^l \left(\frac{ds_e}{dx} \right)^3 dx = l \left\{ 1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right\} \quad (4.63)$$

1) 面外固有振動

放物線ケーブルの面外振動の運動方程式(4.60 b)は弦の場合と全く同じ方程式となり、前述の解法をそのまま適用できる。つまり、振動数 ω として自由振動解を

$$w(x, t) = \tilde{w}(x) e^{i\omega t} \quad (4.64)$$

と表して運動方程式(4.60 b)に代入すれば、次式を得る。

$$H_e \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{w} = 0 \quad (4.65)$$

これに両端で変位が0という境界条件を考慮して、微分方程式の境界値問題として解けば、固有振動数および固有振動モードが以下のように求められる。

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{H_e}{m}}, \quad \tilde{w}_n = A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.66)$$

2) 面内固有振動

積分形のケーブル方程式(4.62)から分かるように、面内鉛直変位 v をスパン全域にわたって積分した量が0となれば、面内振動によってもケーブル張力に付加成分は生じない。このような状況となる固有振動は逆対称振動であり、放物線ケーブルの面内逆対称振動は面外振動、あるいは弦の振動と全く同じ特性となる。つまり、自由振動解を

$$v(x, t) = \tilde{v}(x) e^{i\omega t} \quad (4.67)$$

と表して面内振動の運動方程式(4.60 a)に代入すれば、付加張力項が0となることより、

$$H_e \frac{d^2 \tilde{v}}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v} = 0 \quad (4.68)$$

となり、逆対称振動としての境界条件

$$\tilde{v}(0) = \tilde{v}(l/2) = 0 \quad (4.69)$$

を用いてこの微分方程式を解けば、面内逆対称振動の固有振動数と固有振動モードが以下のように求められる。

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{l} \sqrt{\frac{H_e}{m}}, \quad \tilde{v}_n = A_n \sin \frac{2n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.70)$$

なお、この面内鉛直逆対称変位 \tilde{v}_n に基づく軸方向変位 \tilde{u}_n は、ケーブル方程式 (4.61) に式 (4.70) 第2式を代入して積分することにより、次のように求められる。

$$\tilde{u}_n = -\frac{1}{2} \frac{mgl}{H_e} A_n \left\{ \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \sin \frac{2n\pi x}{l} + \frac{1}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) \right\} \quad (4.71)$$

一方、対称振動に対しては、周期解 (4.67) を面内運動方程式 (4.60 a) に代入しても付加張力項が残り、

$$H_e \frac{d^2 \tilde{v}}{dx^2} + m\omega^2 \tilde{v} = \frac{mg}{H_e} \tilde{h} \quad (4.72)$$

となる。適切な無次元化を行い、 \tilde{h} が定数であることを考えれば、この微分方程式は比較的簡単に解くことができ、両端で変位が0という境界条件により、固有振動モードが以下のように求められる。

$$\bar{w} = \frac{\tilde{h}}{\bar{\omega}^2} \left(1 - \tan \frac{\bar{\omega}}{2} \sin \bar{\omega} \bar{x} - \cos \bar{\omega} \bar{x}\right) \quad (4.73)$$

ただし、各無次元量は以下の通りである。

$$\bar{w} = \frac{\tilde{w}}{mgl^2/H_e}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \tilde{h} = \frac{\tilde{h}}{H_e}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega l}{\sqrt{H_e/m}} \quad (4.74)$$

式 (4.73) を積分形ケーブル方程式 (4.62) に代入して \tilde{h} を消去すれば、面内対称振動に対する振動数方程式が以下のように導かれる。

$$\tan \frac{\bar{\omega}}{2} = \frac{\bar{\omega}}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right)^3 \quad (4.75)$$

ここで、 λ^2 はケーブルの力学挙動を特徴付ける重要なパラメータであって、次式で定義する。

$$\lambda^2 = \left(\frac{mgl}{H_e}\right)^2 l / \frac{H_e L_e}{EA} \quad (4.76)$$

この独立パラメータ λ^2 は、ケーブルの力学挙動における幾何学的影響と弾性的影響とを共に表していると言える。つまり、第1章の式 (1.21)、あるいは Ernst の式 (1.22) に示されるように、 $12H_e/l(mgl/H_e)^2$ はケーブルにサグがあることにより生ずる弦軸方向剛性の低減分(幾何学的影響)であり、残りの EA/l はケーブル軸方向剛性(弾性的影響)である。あるいは、式 (4.76) の分子の mgl/H_e はサグ比 f/l (幾何学的影響)、分母は初期水平ひずみ H_e/EA (弾性的影響) であって、幾何学的にサグが小さいケーブルや材料的に伸び剛性の小さいケーブルでは λ^2 の値が小さくなる。

振動数方程式 (4.75) を数値的に解けば、放物線ケーブルの面内対称モードの固有振動数が求められ、これを式 (4.73) に代入して、固有振動モードが確定する。Irvine は種々の λ^2 に対して解析を行って、後述するモード遷移現象も含め、放物線ケーブルの固有振動特性につき詳しく考察し、かつ簡潔に纏めている¹⁾。図 4.7(a) は λ^2 に対する固有振動数の変化の様子を1次から4次モードまでについて示したものである。 λ^2 が小さい時にケーブルは弦に近づくが、その場合の各無次元固有振動数は次数の大きさになっている。 λ^2 が大きくなるにつれ、奇数次の対称モードの固有振動数が徐々に大きくなり、それと共にモード形状が変化する、いわゆるモード遷移が生じていることが示されている。図 4.7(b) には、対称1次モードの λ^2 による遷移状況を示した。

なお、Irvine によれば、サグ比が 1/10 程度までの扁平ケーブルについては、ここで示した放物線ケーブルとしての扱いで固有振動を精度良く推定できるとされている。

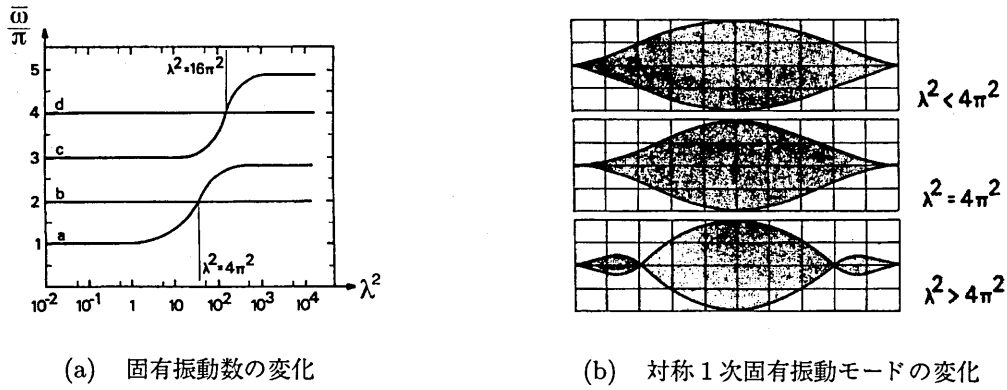


図 4.7: 放物線ケーブルの固有振動ととの関係¹⁾

4.3.3 一般的なケーブルの固有振動

以上では、ケーブルのサグ比が小さい場合を対象とし、適切な近似を導入することで、ケーブルの固有振動を解析的に導いたが、サグ比が大きい一般的なケーブルの場合には、数値解法によらざるを得ない。その一つの方法は 4.2.1 で示した有限要素法による離散化解析であり、増分形運動方程式 (4.32) を初期の静的つり合い状態について考えれば、質量マトリクスと接線剛性マトリクスが確定して、固有振動がマトリクスの固有値問題として解析される。つまり、静的つり合い位置 x_e からの微小自由振動 u に関する運動方程式が

$$M\ddot{u} + K_T(x_e)u = 0 \tag{4.77}$$

となり、通常多自由度系振動理論を適用して、固有振動数と固有振動モードが求められる。

もう一つの方法は 4.2.2 で示した一般化変位法であり、ケーブルの微小振動に対する最も一般的な運動方程式 (4.14c a-c) を直接、解く方法である。以下にその概要を示す。

(1) 面内固有振動

面内振動の線形運動方程式 (4.14c a,b) で外力を 0 とし、その固有振動の解を、境界条件を考慮して、以下のような正弦級数に展開する。

$$u(s_e, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_x^i(t) \sin \frac{i\pi s_e}{l^*} \tag{4.78a}$$

$$v(s_e, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_y^i(t) \sin \frac{i\pi s_e}{l^*} \tag{4.78b}$$

ここで、 q_x^i, q_y^i は x, y 方向の一般化変位、 l^* は初期状態でのケーブル長である。

面内線形自由振動の支配方程式にこれを代入して Galerkin 法を適用する。さらに適切な無次元化を行えば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^2/l^2 c_0^2 \cos \theta} \ddot{q}_x^j + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i^2}{\sigma_l^3 \cos \theta} (I_1^* + k^2 I_2^*) - \frac{2i}{\pi \sigma_l^2 \cos \theta} (-I_3^* + 2k^2 I_4^*) \right\} q_x^i \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i^2}{\sigma_l^3 \cos \theta} k^2 I_5^* - \frac{2i}{\pi \sigma_l^2 \cos \theta} k^2 (I_6^* + I_7^*) \right\} q_y^i = 0 \quad j = 1, 2, \dots \tag{4.79a} \\ & \frac{1}{\pi^2/l^2 c_0^2 \cos \theta} \ddot{q}_y^j + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i^2}{\sigma_l^3 \cos \theta} (I_1^* + k^2 I_8^*) - \frac{2i}{\pi \sigma_l^2 \cos \theta} (-I_3^* + 2k^2 I_9^*) \right\} q_y^i \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i^2}{\sigma_l^3 \cos \theta} k^2 I_5^* - \frac{2i}{\pi \sigma_l^2 \cos \theta} k^2 (I_6^* + I_7^*) \right\} q_x^i = 0 \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.79b)$$

ここで、 σ_l は無次元ケーブル長、 k は前出の縦波・横波(弦)伝播速度比(伸び剛性・初期水平張力比に対応)である。つまり、

$$\sigma_l = \frac{l^*}{l}, \quad k = \frac{c_1}{c_0} \left(= \sqrt{\frac{EA}{H_e}} \right) \quad (4.80)$$

また、 $I_1^* - I_9^*$ は Galerkin 法による積分項で、初期形状に依存する無次元係数であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} I_1^* &= \int_0^{\sigma_l} \frac{1}{x_e^*} \sin \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \sin \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma, & I_2^* &= \int_0^{\sigma_l} (x_e^{*'})^2 \sin \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \sin \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma, \\ I_3^* &= \int_0^{\sigma_l} \frac{x_e^{*''}}{(x_e^{*'})^2} \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \sin \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma, & I_4^* &= \int_0^{\sigma_l} x_e^{*'} x_e^{*''} \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \sin \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma, \\ I_5^* &= \int_0^{\sigma_l} x_e^{*'} y_e^{*'} \sin \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \sin \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma, & I_6^* &= \int_0^{\sigma_l} x_e^{*'} y_e^{*''} \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \sin \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma, \\ I_7^* &= \int_0^{\sigma_l} x_e^{*''} y_e^{*'} \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \sin \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma, & I_8^* &= \int_0^{\sigma_l} (y_e^{*'})^2 \sin \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \sin \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma, \\ I_9^* &= \int_0^{\sigma_l} y_e^{*'} y_e^{*''} \cos \frac{i\pi\sigma}{\sigma_l} \sin \frac{j\pi\sigma}{\sigma_l} d\sigma \end{aligned} \quad (4.81)$$

ただし、 x_e^*, y_e^*, σ はスパン長で無次元化した初期空間位置、および曲線座標である。

式(4.79)において級数を有限項で打ち切り、マトリックス表示すれば、

$$\frac{1}{\pi^2/l^2 c_0^2 \cos \theta} \mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{A} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.82)$$

ここで、 $\mathbf{q}, \mathbf{I}, \mathbf{A}$ はそれぞれ、一般化変位ベクトル、単位マトリックス、係数マトリックスである。

一般化変位で表した運動方程式 4.82 に $\mathbf{q} = \phi \exp(i\omega t)$ を代入すれば、

$$\left[\mathbf{A} - \frac{\omega^2}{\pi^2/l^2 c_0^2 \cos \theta} \mathbf{I} \right] \phi = \mathbf{0} \quad (4.83)$$

となる。したがって、 \mathbf{A} の固有値として、弦の基本振動数 $\pi/lc_0\sqrt{\cos\theta}$ (4.3.1での解析に傾斜角を考慮すれば、容易に導かれる) で無次元した固有振動数 ω^* が求められる。

$$\omega^* \equiv \frac{\omega}{\pi/lc_0\sqrt{\cos\theta}} \quad (4.84)$$

なお、級数解における形状関数は弦の基準関数であり、サグを有するケーブルの振動をサグのない弦の固有振動で展開することを意味している。したがって、この解析法は、弦に近い扁平ケーブルの場合に、級数項数、つまり自由度数が少なくとも比較的精度の良い解を与えるという特徴を有する。

(2) 面外固有振動

面外固有振動の解を、やはり弦の基準関数で展開する。

$$w(s_e, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_z^i(t) \sin \frac{i\pi s_e}{l^*} \quad (4.85)$$

これを面外線形自由振動の支配方程式(4.14c)に代入して Galerkin 法を適用し、面内振動の場合と同様の無次元化を行えば、

$$\frac{1}{\pi^2/l^2 c_0^2 \cos \theta} \ddot{q}_z^j + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i^2}{\sigma_l^3 \cos \theta} I_1^* + \frac{2i}{\pi \sigma_l^2 \cos \theta} I_3^* \right\} q_z^i = 0 \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.86)$$

級数を有限項で打ち切り，マトリックス表示して，

$$\frac{1}{(\pi^2/l^2)c_0^2 \cos \theta} I \ddot{q} + Bq = 0 \tag{4.87}$$

を得る．ただし， q, B はそれぞれ，面外一般化変位ベクトル，係数マトリックスである．したがって， B の固有値として面外無次元固有振動数 ω^* が求められる．

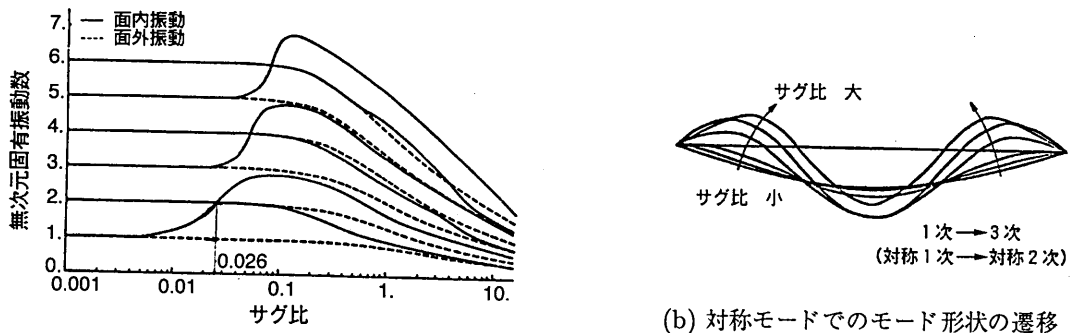
4.3.4 ケーブルの固有振動特性

一般化変位に関する無次元化された支配方程式(4.79 a,b)，(4.86)をみると，その係数は伝播速度比 k と無次元ケーブル長 σ_l ，および無次元定数 $I_1^* - I_0^*$ である． $\sigma_l, I_1^* - I_0^*$ は初期形状により決定されるもので，ケーブルの初期形状は，第1章で示したカタナリー曲線式(1.26)，およびそのケーブル長を与える式(1.29)を無次元化することによって，サグ比 $\gamma(f/l)$ ，放物線ケーブルの場合は $mgl/8H_e$ で与えられる)と支点間傾斜角 θ にのみ依存することがわかる．したがって，ケーブルの固有振動特性を支配する無次元パラメーターは，形状パラメーターとしてのサグ比 γ ，傾斜角 θ と，材料パラメーターとしての伝播速度比 k ということになる．以下では，これら無次元パラメーターを種々に変えて行った固有振動解析の結果に基づき，ケーブルの固有振動特性を示す．なお，4.3.2において水平放物線ケーブルの固有振動を考察した際に導入した無次元パラメータ λ^2 は， γ, k と以下の関係にある．

$$\lambda^2 \doteq \gamma^2 k^2 \tag{4.88}$$

1) サグ比の影響

$k = 30, \theta = 0^\circ$ の水平ケーブルの場合，サグ比 γ に対する面内，面外振動の固有振動数の変化をみたもの(以下，固有振動数曲線と呼ぶ)が図4.8(a)である．縦軸は固有振動数をサグが0の弦の基本振動数で無次元化したもの，横軸がサグ比で，対数目盛を採っている．図4.8(a)により，サグ比が小さい範囲での各次の無次元固有振動数は1, 2, 3等と，いずれも弦のそれにほぼ一致して一定値をとっていることがわかる．特に偶数次(逆対称モード)の面内振動，および面外振動については，比較的大きなサグ比に対してもその値を一定に保っており，これらの固有振動に対するサグの影響は大変に小さいと言える．これに対し，奇数次の面内モード(対称モード)についてはあるサグ比の範囲で1段階高次のモードに遷移し，それにつれて固有振動数も増加する．図では $\gamma \doteq 0.005 - 0.08$ の範囲において最低次固有振動数が3次のそれに近づいているが，このときのモード形は図4.8(b)のように1次モードから3次モード(対称1次 → 対称2次)へと遷移する．したがっ



(a) 固有振動数とサグ比との関係

(b) 対称モードでのモード形状の遷移

図 4.8: 水平ケーブルの固有振動数と振動モード

て、このような領域では、奇数次面内モードと偶数次面内モードの固有振動数曲線は交点を持ち、固有振動数は同一で、振動モードが異なるような面内固有振動が発生するサグ比が存在する。また、そのときの面外モードも同じ固有振動数をとるので、結局、同一振動数に対して3つの固有モード(面内2, 面外1)が存在することになる²⁾。

サグ比が大きくなると、面内振動、面外振動のどのモードに対しても、固有振動数は単調に減少する。また、面内逆対称モードはスウェイモード (sway mode) となり、面外方向のスウェイモードとともに吊り下げられた弦の固有振動に近づく²⁾。図においてサグ比の増大に伴い、実線(面内モード)と破線(面外モード)とが漸近しているものがそのスウェイモードに相当する。

2) 傾斜角の影響

$\theta = 30^\circ$ および $\theta = 60^\circ$ の場合の固有振動数曲線を示したものが図4.9である。水平ケーブルの場合と特に異なる点はモード形の遷移である。つまり、水平ケーブルでは奇数次(対称)モードだけが1次高い奇数次(対称)モードに移る(図4.8)のであったが、傾斜ケーブルの場合には奇数次モードは1次高い偶数次モードへ、偶数次モードはさらに1次高い奇数次モードへと遷移する(図4.10)。この特徴は θ が大きいくほど顕著である。また、その遷移領域は θ の増加に伴い、サグ比の大きい方向へ移動する傾向がみられる。さらに面外モードに着目すれば、固有振動数は θ が大きくなるほど、サグ比の比較的大きな範囲まで一定値をとり、それ以後単調に減少することがわかる。このように傾斜ケーブルのモード形の遷移は水平ケーブルのそれと異なるが、このことは、傾斜ケーブルでは自重の影響が非対称となることに基づく本質的な違いと考えられる。ただし、自重の影響の少ない偏平ケーブルについては、その差は少ない。

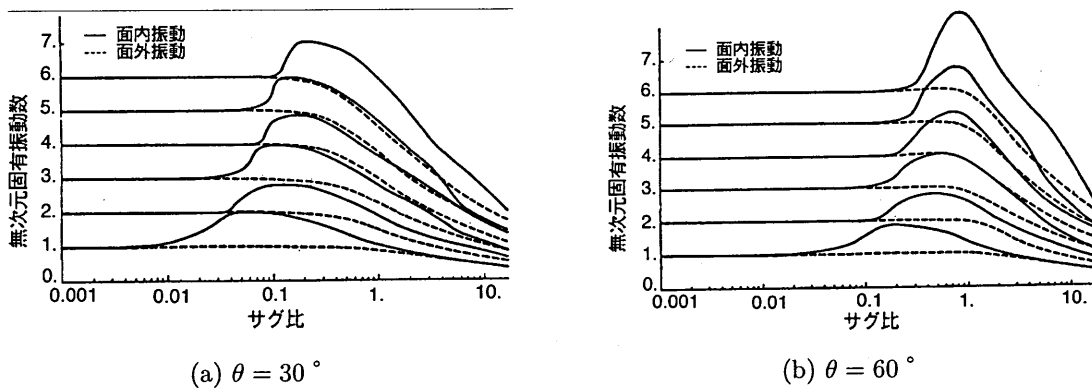


図 4.9: 傾斜ケーブルの固有振動数とサグ比との関係

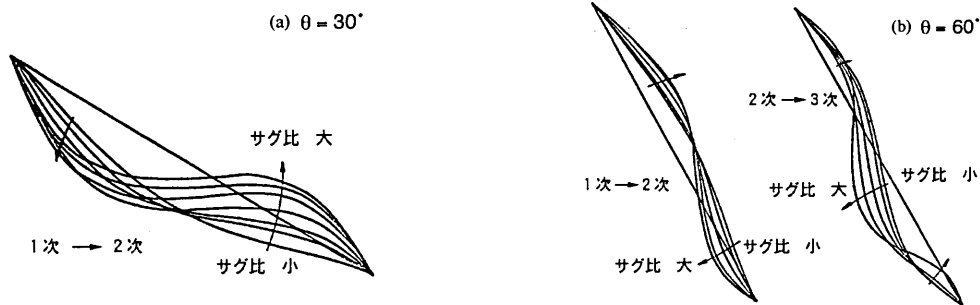


図 4.10: 傾斜ケーブルにおける振動モード形の遷移状況

3) 材料パラメータの影響

面外振動の一般化座標に関する支配方程式 (4.86) をみると、材料パラメータである伝播速度比 k が式に含まれていない。つまり、そのもとの運動方程式 (4.14c c) の線形項中に縦波の伝播速度 c_1 が現われないのであって、面外振動では縦波は伝播しない(あくまで線形振動についてである)。このことは物理的には、面外振動は張力変化を伴わず、形状変化だけによる振動であるということを示している。したがって、面外振動の固有振動数、固有振動モードは k によらず一定となる。

これに対し、面内振動については、図 4.11 に示されるように、材料パラメータ k の影響は奇数次モードの遷移領域を移動させる点にあるということがわかる。つまり、 k の増加に伴い、遷移領域はサグ比の小さな方向に移動する。また、面内偶数次モードについては影響がほとんどみられないが、これは偶数次モードでは面外モードと同様、張力変化を伴わず、形状変化だけの振動であることを表わしている。

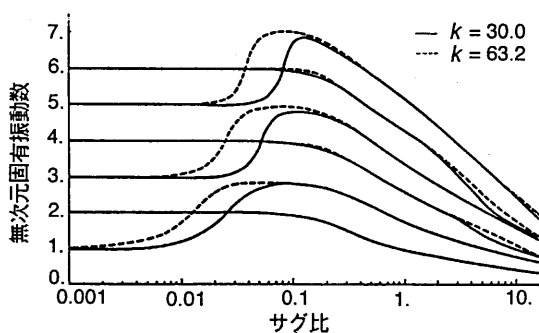


図 4.11: 固有振動数に及ぼす材料パラメータの影響

4.3.5 ケーブルのモード減衰

1) エネルギーに基づくモード減衰の評価

一般に構造物の振動減衰の要因は多種多様であり、その要因を一つ一つ評価することは困難である。そこで、構造物の動的解析にあって極めて有用なモード解析法とリンクして、構造物の減衰を表すのに通常用いられるのが各モードに対して定義する減衰比、いわゆるモード減衰である。これは、構造物の複雑な減衰性状を、各振動モードに対して等価な粘性減衰で表すことに相当する。

粘性減衰を有する 1 自由度系の減衰比 ξ は、1 周期当たりのエネルギー散逸の、最大変位によって蓄えられるポテンシャル・エネルギー(ひずみエネルギー)に対する比として、エネルギー的に定義することが可能である¹⁹⁾。これを n 次振動モードに付随するモード減衰に対して拡張して考えれば、 n 次モード減衰比 ξ_n は次式で評価される。

$$\xi_n \equiv \frac{D_n}{4\pi U_n} \quad (4.89)$$

ここで、 D_n は n 次モードでケーブル構造が振動したときの 1 周期当たりのモード散逸エネルギー、 U_n はそのときの最大変位によって蓄えられるモードポテンシャル・エネルギーである。

初期張力が導入されて初めて構造部材として成り立つケーブルでは、4.1.1 で示したように、モードポテンシャル・エネルギーにはひずみエネルギーだけではなく、初期張力ポテンシャルも存在する。したがって、式 (4.89) の分母は次式で評価する必要がある。

$$U_n = U_{an} + U_{tn} \quad (4.90)$$

ここで、 U_{an}, U_{tn} は n 次モードのモードひずみエネルギー、モード初期張力ポテンシャルであり、固有振動解析によって n 次モード (基準関数) が求められれば、各エネルギーの定義式 (4.10), (4.11), および動的ひずみの表記式 (4.7) における動的変位 u^i に基準関数を代入することで評価できる。

一方、エネルギーに基づくモード減衰評価式 (4.89) の分子にあるモード散逸エネルギーについては、いくつかの実験的な研究がある^{20) 21)}。辻・加納²⁰⁾は、種類の異なる構造用ケーブルについて、繰り返し軸引張試験を実施して応力・ひずみ関係を得て、そのヒステリシスループの面積を測定することによって、ケーブルの、材料としての1周期当たりの散逸エネルギーを求めている。その結果、実験データにばらつきはあるにせよ、ケーブルの種類や初期応力によらず、散逸エネルギー D_0 が次式で与えられることが実験的に示された。

$$D_0 = \alpha E A l (\Delta \varepsilon)^2 \quad (4.91)$$

ここで、 α は実験的に決定される係数で、その平均値は 0.190 として求められている²⁰⁾。

式 (4.91) は、ケーブルの散逸エネルギーがケーブルに蓄えられるひずみエネルギー $1/2 E A l (\Delta \varepsilon)^2$ に比例することを意味しているが、単一ケーブルの振動モードに付随した減衰エネルギーについても、それが動的ひずみの2乗に比例することが既往の実験的研究²¹⁾で示されている。そこで、材料の減衰能を表すパラメータとして用いられることの多いロスファクター (損失係数)²²⁾を、ケーブルに対しても同様に定義し、ケーブルのモード散逸エネルギーを次のように表すこととする。

$$D_n = 2\pi \eta U_{an} \quad (4.92)$$

ここで、 η はケーブルに対して定義したロスファクターであり、上述の辻・加納の実験係数 α からその値は 0.06 程度であると推定できる。

式 (4.90), (4.92) を式 (4.89) に代入すれば、モード減衰比は最終的に次式で評価される。

$$\xi_n = \frac{1}{2} \eta \frac{U_{an}}{U_{an} + U_{tn}} \quad (4.93)$$

したがって、ケーブルのモード減衰の推定には、減衰能としてのロスファクターの同定、および各振動モードに対応したモードエネルギー比 (モードひずみエネルギーの総ポテンシャル・エネルギーに対する比) の評価が必要になる。

モード減衰比評価に必要なモードポテンシャル・エネルギー、あるいはモードエネルギー比の算出には、例えば、放物線を形状関数に用いた3節点ケーブル要素に基づく有限要素法⁸⁾も適用できる。まず、自重によるケーブルの初期静的つり合い形状を、幾何学的非線形性を考慮して求め、そのつり合い位置からの微小振動として固有値解析を行う (式 (4.77))。固有ベクトルとして求められた振動モードを用いれば、動的ひずみ、モードポテンシャル・エネルギーが各要素ごとに決定される。つまり、ケーブル要素の2次形状関数ベクトルを $N(s_e)$ 、第 a 要素に対応する n 次固有モードベクトルの x^i 方向成分を ϕ_n^{ai} 、モード振幅 (減衰の評価振幅とも言える) を A_r とすれば、第 a 要素内のモード変位が

$$u_n^{ai}(s_e, t) = N(s_e) A_r \phi_n^{ai} \cos \omega_n t x^i \quad (4.94)$$

として求められ、これを式 (4.7), (4.10) および (4.11) の動的変位 u^i に代入、積分を実行することによって、モードエネルギーを評価することができる²³⁾²⁴⁾。

2) モード減衰の実測データ

図 4.12 は、斜張橋ケーブルおよび通信線ケーブルの面内振動モード減衰について、文献調査により、現地振動試験による減衰データを収集し、その特性を示したものである。対数減衰率で表したモード減衰を各ケーブ

ルのサグ比で整理し、ケーブルの種類には関係なく、モード次数別に示している。斜張橋ケーブルのサグ比は 0.01 以下と小さく、この場合に、モード減衰の値は 1 次モード以外はサグ比によらずほぼ一定であること、1 次モード減衰はサグ比の増加に伴い増大する傾向にあること、低次モード減衰が高次モード減衰よりやや高くなる傾向があること、さらに対数減衰率は 0.01 程度以下であり、平均で 0.005 程度と大変小さいことが特徴的である。これに対して、サグ比の比較的大きい通信線ケーブルの場合、モード減衰は対数減衰率で 0.01 以上と大きい。特に対称 1 次モードの減衰は他のモード減衰に比べて 1 オーダー大きく、またその大きさがサグ比に依存している。

3) エネルギー特性と減衰特性との関係

上述の斜張橋ケーブルと通信線ケーブルのモード減衰特性を理論的に解釈するために、エネルギーに基づくモード減衰解析を行った。代表的なケーブルとして $k = 25, \theta = 30^\circ$ の場合を想定し、面内振動についてのみ数値解析を行って、モード減衰のエネルギー的評価式 (4.93) でのモードひずみエネルギー比とサグ比の関係性を求めた。

図 4.13は、減衰評価振幅を対スパン比で $A_r/l = 0.001$ とした場合の、モードエネルギー比とサグ比の関係である。斜張橋ケーブルのサグ比の範囲に着目すれば、1 次モードに対するひずみエネルギー比だけがサグ比の増加に伴って急激に(縦軸は対数目盛)大きくなっている。これに対して、同じサグ比の範囲で高次モードのひずみエネルギー比はほぼ一定であり、1 次モードのそれよりも常に小さい。これは、4.3.4 で示したように、1 次モードにおいてサグ比の増加とともにモード遷移が生じ、モード形状が変化するのに対し、高次モードではこのサグ比の範囲内ではモード遷移が生じないことによる。このことがより顕著になるのが、通信線ケーブルの場合に相当する、よりサグ比の大きい範囲である。このサグ比の変化に対するモードひずみエネルギー比の変化の様子は図 4.12のモード減衰特性と良く対応している。

図 4.13の減衰解析結果からのさらに重要な知見として、サグ比の小さなケーブルの場合、ひずみエネルギー比の値そのものが大変に小さいことが挙げられる。通常の斜張橋ケーブルの場合、1 次モードでも大きくて 0.1、高次モードでは 1 桁オーダーが低い。式 (4.93) からわかるように、ケーブルに初期張力がなければモードエネルギー比は 1 になり、モード減衰も 10 倍以上になったわけで、サグ比の小さな斜張橋ケーブルの場合、大きな初期張力の存在が低減衰性をもたらすといえる。

なお、ケーブルのモード減衰特性については、模型ケーブルを用いた自由振動実験を基に系統的な検討が行われ、モード減衰と動的軸ひずみとの関連が明確に示されている²¹⁾²⁵⁾²⁶⁾。

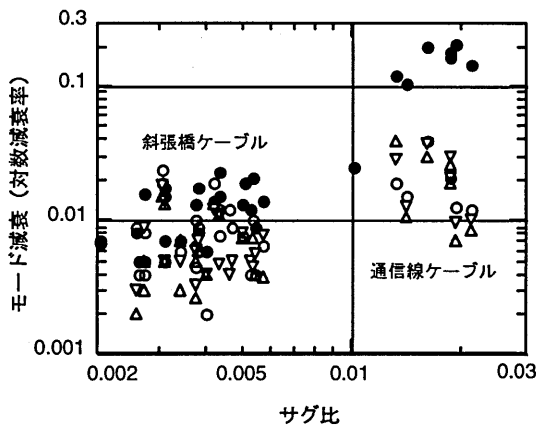


図 4.12: ケーブルのモード減衰とサグ比の関係

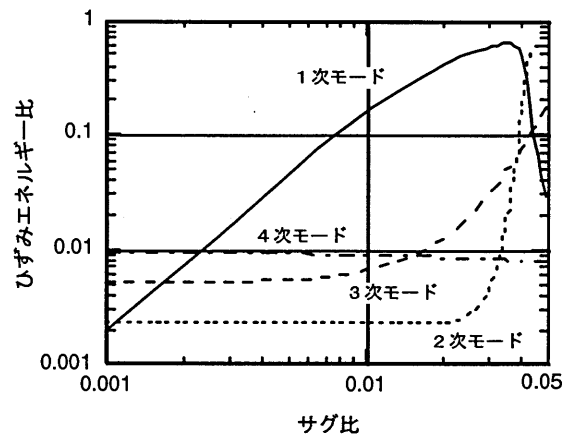


図 4.13: ひずみエネルギー比とサグ比の関係

4.4 ケーブルの連成振動

前節では微小振動を対象として、ケーブル振動が面内運動と面外運動とに完全に分離され、それぞれに特有の固有振動性状を有することを示した。しかし、フレキシブルなケーブルの特徴は変位が大きくなり得ることであり、非線形振動についてもケーブル特有の性質が存在する。つまり、4.1.2において動的問題に対する支配方程式から考察したように、ケーブルの非線形振動は本質的に3次元の連成振動となることが特徴であり、本節では、まず単一のケーブルについて、その具体的な例を示すことにする。

一方、ケーブルは単体としての振動が問題とされるのみならず、斜張橋のように、構造物の振動に連成して生ずるケーブル部材振動も重要となる。いわゆる内部共振問題であるが、それには線形共振および非線形共振があってそれぞれに特徴的であることから、本節ではケーブルの連成振動の一つとして、斜張橋での内部共振を第二に取り上げることとした。

4.4.1 面外外力による非線形連成振動

面内運動方程式(4.12 a,b)あるいは(4.15b a,b)に面外変位 w の2次非線形項が存在するため、面外外力によるケーブルの非線形振動では、面外振動と連成した面内振動が常に生ずる。図4.14は、面外対称1次固有振動数に等しい振動数を有する調和分布外力が水平ケーブル ($k = 30$) の面外方向に作用することを想定し、それによって生ずる連成振動を数値解析により求めて、結果をケーブル中央点での軌跡(リサージュ図)として、6つの異なるサグ比に対して比較して示したものである¹¹⁾。図より明らかなように、面内固有振動数が面外固有振動数に一致するモード遷移点の $\gamma = 0.026$ の場合(図4.8参照)に、面内振動も共振を起こして連成が最も顕著になる。

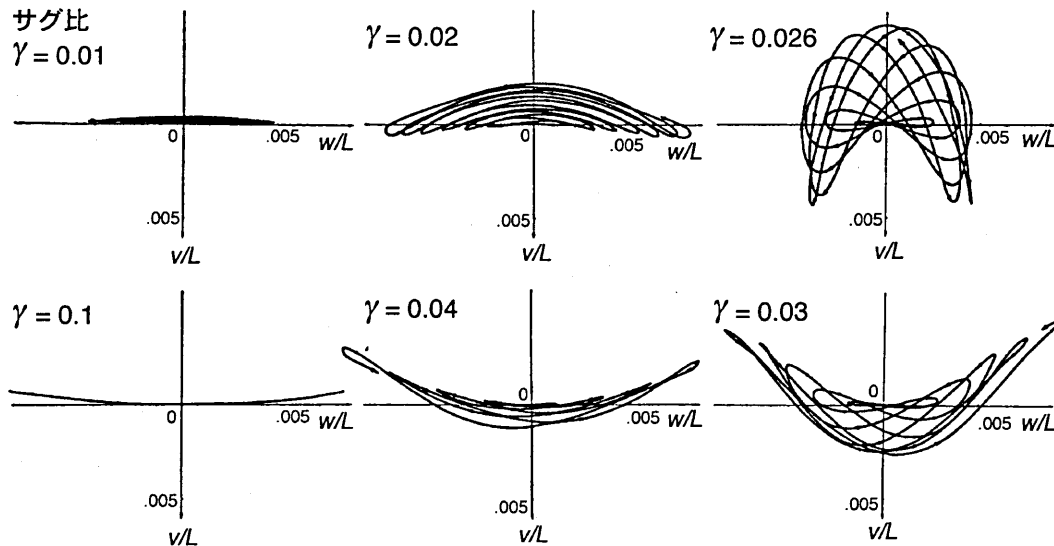


図 4.14: 面外調和外力によるケーブル中央点の応答のリサージュ図

4.4.2 面内外力によるパラメトリック連成振動

面外運動方程式(4.12 c)あるいは(4.16)の剛性項には面内振動変位 u, v の項が面外変位 w の係数として存在していることから、面内振動が面内外力によって調和的なものとなる場合、動的不安定現象である分岐応答としてのパラメトリック振動が面外方向に可能となる²⁷⁾⁻²⁹⁾。

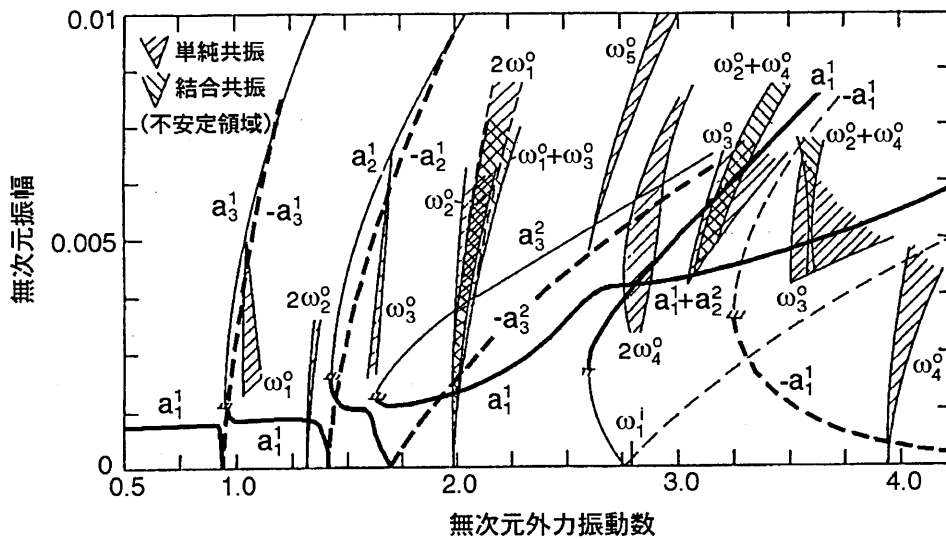


図 4.15: 面内調和外力によるケーブル中央点の面内非線形応答と面外不安定領域²⁸⁾

一例として、高橋らの解析結果²⁸⁾を図 4.15に示した。水平ケーブル ($\gamma = 0.1, k = 30$) に面外方向の対称分布調和外力を作用させた場合の面内非線形応答と、面外振動の発生し得る不安定領域を示したもので、横軸は対応する弦の基本振動数で無次元化した無次元外力振動数、縦軸はスパン長で無次元化したケーブル中央点の無次元振幅である。実線は外力と同位相、破線は外力と逆位相の面内応答曲線を表し、共に太線のみが安定な振幅 (実際に生じ得る応答) であって、応答曲線に付した a_j^n は面外 n 次振動数の j 倍 (1 の場合は主調波, 2 以上の場合は高調波) の振動数成分が卓越することを意味している。

この安定な面内非線形応答のもとに生ずる面外振動の不安定領域が図中の斜線部である。領域に付した記号 ω_i^0 は面外 i 次振動の単純共振の不安定領域を、和として表したものは結合共振の不安定領域を示している。詳細な考察は文献 28) に譲るが、広範囲の振動数領域で面外振動が不安定となっており、面内外力によっても 3 次元連成振動が生じ得ることが理解されよう。

なお、面内対称加振によって面内方向の逆対称振動が不安定となるなど、面内パラメトリック振動についても知られており³⁰⁾³¹⁾、ケーブルの非線形連成振動特性の一つとしてあげられる。

4.4.3 軸力変動によるパラメトリック振動

これまでは分布調和外力が作用するとして、ケーブルの非線形連成振動およびパラメトリック振動の特性を示した。しかし、斜張橋ケーブルのように、ケーブルに直接、分布外力が作用しなくとも、ケーブルの端部から動的な外乱が作用することによって振動を生ずる場合がある。この問題は、軸力が周期的に変動する単一ケーブルのパラメトリック振動問題としてモデル化され、解析される。サグ比の小さな放物線ケーブルに対する高橋らの研究を紹介しよう³²⁾⁻³⁴⁾。

放物線ケーブルの面内鉛直振動の運動方程式 (4.60 a) において、初期水平張力が周期的変動分を有するとすれば、次式を得る。

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (H_e + H_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - h \frac{d^2 y_e}{dx^2} = 0 \quad (4.95)$$

ここで、 H_t は変動軸力振幅、 Ω はその振動数である。剛性項である第 2 項の係数が周期関数となっており、パラメトリック振動の可能性のあることが理解される。つまり、ケーブルの軸力変動によって面内鉛直振動が励起される動的な不安定現象が存在する。

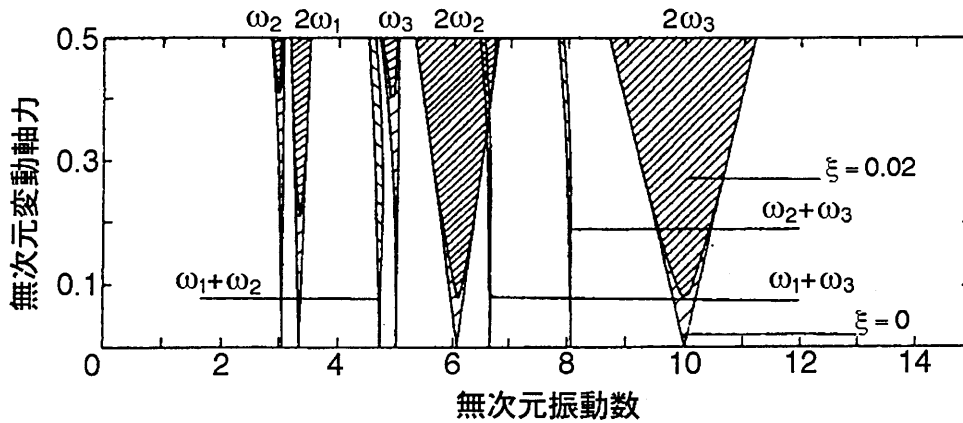


図 4.16: 軸力変動による放物線ケーブルの不安定領域³²⁾

この不安定領域は、ケーブルの固有振動モードを形状関数とした一般化変位法により運動方程式 (4.95) を離散化し、調和バランス法を適用することによって容易に求めることができる³²⁾。図 4.16は水平ケーブル ($\gamma = 0.02, k = 30$) に対する解析結果であり、横軸は対応する弦の固有振動数で無次元化した軸力変動振動数、縦軸は初期水平張力で無次元化した変動軸力振幅である。単純共振の主不安定領域 ($2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3$) が大きく、面内固有振動数の 2 倍の振動数で軸力を変動させた場合にその面内固有振動が不安定振動を生じ易いことが理解できる。軸力変動の振動数が固有振動数に等しい場合に生ずる副不安定領域 (ω_2, ω_3) や 2 つの面内振動モードが同時に励起される結合共振の不安定領域 ($\omega_1 + \omega_2$ など) も認められるが、ケーブルの運動にモード減衰比 $\xi = 0.02$ を考慮した場合、それらは有意な拡がりとはなり得ていない。

4.4.4 斜張橋における内部共振

吊形式橋梁の振動モードは全て、全体モードと局所モードとの組み合わせから成ると考えられる。全体モードとは、ケーブルの横振動を無視し、ケーブルをトラス部材としてモデル化して得られる橋全体の振動モードであり、局所モードはケーブル部材の両端を固定したとして得られるケーブル部材単独の振動モードである (図 4.17)。吊橋の場合、主ケーブルは多数のハンガーを介して桁に連結されているため、主ケーブルの振動は常に桁の全体モードに含まれ、局所モードが可能なのはハンガーのみである。これに対し、斜張橋では、ケーブルは通常、その両端のみが桁及び塔に連結されているだけであってその長さも数百メートルにも及ぶことから、ケーブルの局所振動のみならず、局所的ケーブル振動と全体振動との連成が大変に重要となる³⁵⁾。

桁、あるいは塔が振動する全体モードが励起された場合、ケーブルの支点が動的強制変位を受けることになる。結果として、ケーブルの局所振動が生じ、これを内部共振と呼ぶ。この斜張橋の内部共振については藤野らがモデル実験ならびに解析から検討を加え³⁶⁾、線形的にも非線形的にも生ずる可能性を有することが明らかにされている。

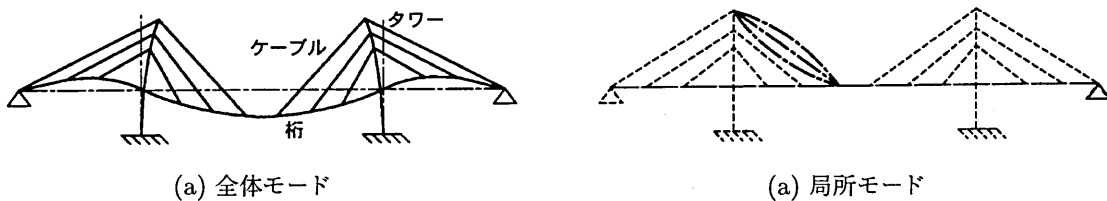


図 4.17: 斜張橋における全体モードとケーブル局所モード

線形共振は全体モードの固有振動数がケーブルの局所モードの固有振動数に一致した場合に生ずる内部共振である。マルチケーブル斜張橋は長さの異なる多数のケーブルを有することから、ケーブル局所モードの固有振動数は広範囲に及ぶこと、風、地震、あるいは交通荷重によっていくつかの全体モードが励起され得ることから、この線形内部共振に基づくケーブルの局所振動は比較的簡単に起こると考えられる。このケーブル局所振動の大きさは全体モードの種類やケーブルの振動減衰に依存する。起振機実験などで、局所モードを押さえた全体モードだけの振動を励起することの難しさをよく経験するが、今のところ、線形内部共振によるケーブルの局所振動が実際の斜張橋で問題になるほどの振幅にまで達したという報告はない。

多くの工学的問題の場合、ケーブルを線形系として扱うことが可能であるが、全体振動によって支点到ケーブル軸方向の動的強制変位が与えられ、しかもその振動数がケーブル局所モードの固有振動数の2倍である場合には、前述したように、非線形のパラメトリック共振が生ずる。中央スパン420mの櫃石島橋の起振機実験時にも、ねじれ逆対称1次モードにおいて何本かのケーブルがパラメトリック共振を起こしたことが報告されている³⁷⁾。その応答記録を図4.18に示すが、桁および塔が加振振動数1.9Hzで応答しているのに対し、ケーブルではほぼその1/2の振動数で大きく振動している。

1999年現在、世界最長の斜張橋である多々羅大橋についても、その固有振動数から内部共振の可能性が検討され、図4.19に示すように、種々の内部共振が予想されている³⁵⁾。しかし、非線形のパラメトリック共振については、多々羅大橋の風洞実験結果より予想されるガスト応答よりかなり大きな全体振動が生じない限り、可能性が少ないと考えられ、現時点では、非線形内部共振が工学的に重要となるかどうかについて不明である。

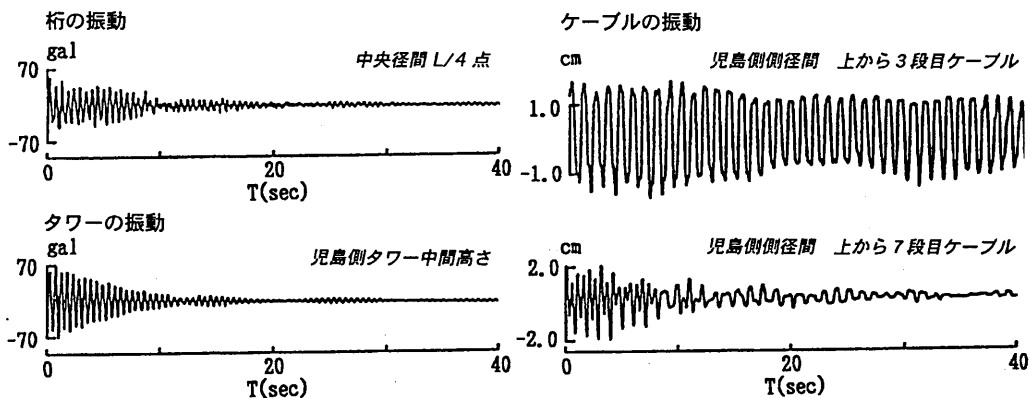


図 4.18: 櫃石島橋のねじれ逆対称1次モードでのケーブル・パラメトリック共振記録³⁷⁾

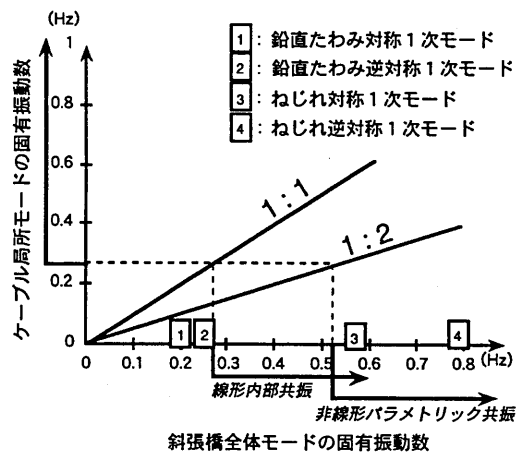


図 4.19: 多々羅大橋における全体モードと局所モードの振動数の関係³⁵⁾

4.4.5 内部共振が及ぼす斜張橋モード減衰への影響

斜張橋の線形内部共振により生ずるケーブルの連成振動は、斜張橋のモード減衰に影響を及ぼす³⁸⁾。

中央スパン 490m の生口橋では、鉛直たわみ対称 2 次モードにケーブルの顕著な連成振動が認められ、そのモード減衰がケーブル連成のない他のモード減衰よりも小さくなっている。実橋振動実験においては、連成するケーブル自身の減衰をオイルダンパーを付加して変化させ、斜張橋のモード減衰を再度測定して、ケーブル振動連成のモード減衰への影響が検討された³⁹⁾。その実験結果を再整理してグラフにしたものが図 4.20 であり、連成ケーブル単体の 1 次モード減衰 (対数減衰率) と斜張橋の鉛直たわみ対称 2 次のケーブル連成モード減衰 (対数減衰率) との関係を示している。図に示されるように、斜張橋のケーブル連成モード減衰はケーブルの減衰が大きくなるに伴い、線形的に増加している。図には、ケーブルの連成を実験的に、強制的に止めた場合の非連成モード減衰も示してあるが、ケーブル減衰が非連成モード減衰より小さい場合は連成が生ずることによってモード減衰も小さくなってしまふことが理解される。

図 4.21 は、橋ごとにいくつか測定されているモード減衰の平均をとって、斜張橋の代表減衰とし、最大スパン長に対してプロットしたものである^{38) 40)}。横浜ベイブリッジ、榎石島橋、六甲大橋など、トラス桁を有する斜張橋は全般に平均減衰が大きい。鶴見つばさ橋は箱桁を有するにも関わらず、平均減衰が大きいことが注目される。これは、一面吊りである鶴見つばさ橋でのケーブル連成が大きく、かつオイルダンパーなどの制振装置が実装されているケーブルの減衰が大きいことによるもので、このことは減衰のエネルギー的評価法を適用して確認されている⁴¹⁾。生口橋の場合とは逆に、内部共振が斜張橋のモード減衰を高めた例と言える。

また、図 4.21 で多々羅大橋の平均減衰が大変に小さくなっているが、前述したように、多々羅大橋では線形内部共振の可能性が多く、500m にも及ぶ長さを有するケーブルそのものの減衰性が非常に小さいことから、ケーブル連成による影響と考えられている。

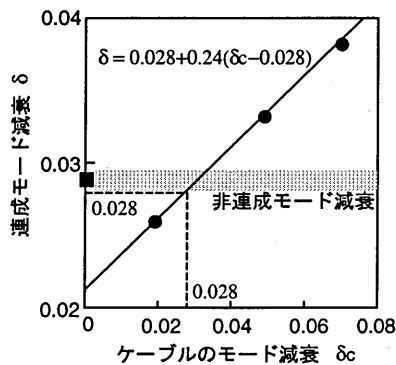


図 4.20: 生口橋での内部共振が及ぼすモード減衰への影響³⁸⁾

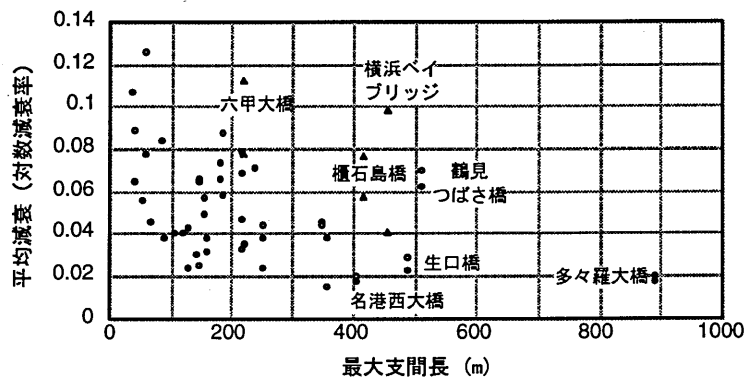


図 4.21: 斜張橋の平均モード減衰と最大支間長との関係

4.5 ケーブルの振動制御の基礎

ケーブルはフレキシブルかつ比較的軽量であるため、風などの動的外力により振動を起し易く、減衰が極めて小さいためにその応答や不安定性が大きくなるものとなって工学的に重要な問題となっている。その振動を小さく制御する方法には種々考えら、その例は 9 章 9.3.2 に詳しいが、ここでは減衰付加による振動制御の基礎的解析法を示すこととする。

4.5.1 粘性ダンパーを有するケーブルの減衰解析

ケーブルそのものの内部減衰を減衰材などの利用によって高めることは、ケーブルの振動が内部に大きなひずみをもたらさないために極めて難しく、通常は粘性ダンパーなどの外部デバイスが減衰制御に用いられる。その減衰付加効果は以下のように解析によって調べることができる。

図 4.22 に示すように、1つの粘性ダンパーを有するケーブルを考え、簡単のため、そのサグを小さいとして無視すれば、運動方程式は以下のように表される。

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - H_e \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c \frac{\partial v}{\partial t} \delta(x - x_c) = 0 \tag{4.96}$$

ここで、 c は粘性ダンパーの減衰係数、 x_c はダンパー設置位置、 $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数である。

非減衰系としてのケーブル (弦) の振動モードである基準関数で解を展開して一般化変位法を適用すれば、

$$\ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n 2 \left(\frac{c}{mL\omega_{01}} \right) \sin \frac{i\pi x_c}{L} \sin \frac{j\pi x_c}{L} \dot{q}_j + i^2 q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{4.97}$$

ここで、 ω_{01} は弦の基本振動数 $(\pi/l) \sqrt{H_e/m}$ である。

この減衰系運動方程式 (4.97) を複素固有値解析することにより、その複素固有値から粘性ダンパー付きケーブルの i 次モード減衰比 ξ_i を求めることができ、それによってダンパーの減衰効果が明らかにされる。図 4.23 は、粘性ダンパーの設計無次元パラメータである、ケーブルの制御対象モード次数、ダンパー取り付け位置、ダンパー減衰係数を適切に変化させて数値解析を行い、結果を近似的に整理して提案された設計用チャートである⁴²⁾。図の横軸はダンパーの減衰係数を含み、縦軸はダンパーの付加によって得られるケーブルのモード減衰比を含んでいるが、これより、粘性ダンパーの減衰係数にはモード減衰を最大とする最適値が存在することがわかる。これは、ダンパーの減衰係数が大きすぎると、ダンパー取り付け位置のケーブル変位が拘束されて減衰効果が小さくなり、減衰係数が無限大の極限では、ダンパー取り付け点は全く変位できずに減衰効果がなくなることによる。したがって、減衰係数の大きい場合には振動モード形状が変化するため、非減衰系ケーブルの振動モードで解を展開するという上述の解法では、その項数を多くとる必要があるので注意を要する。

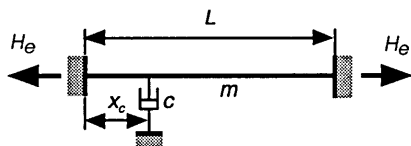


図 4.22: 粘性ダンパーを有するケーブル

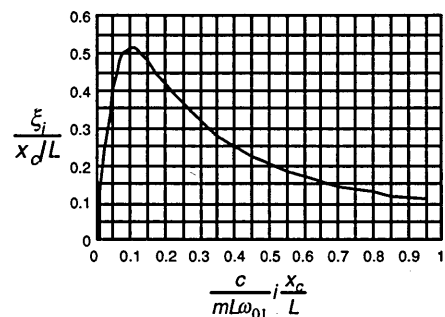


図 4.23: 粘性ダンパーによるモード減衰⁴²⁾

4.5.2 ケーブル連結による振動制御とその減衰効果

斜張橋ケーブルの風による振動対策の一つにケーブルを連結する方法がある。その制振メカニズムには種々考えられるが、多数のケーブルを連結してケーブルシステムとすることによる剛性効果や質量効果の他に、減衰性の向上も期待され得る。

1) ケーブル連結の減衰効果

斜張橋ケーブルを連結したことによる減衰効果は実橋では測定されていないが、簡単な模型実験によりケーブルシステムのモード減衰を計測して、ケーブル連結の減衰効果が検討されている⁴³⁾⁴⁴⁾。これは、図4.24に示すように、長さの異なる2本の水平ケーブルを2本の連結ワイヤーで繋いだ簡単なケーブルシステムを作成し、連結ワイヤーに導入するプレストレスの大きさをパラメータにケーブルシステムの面内1次モード減衰を自由振動波形から測定して、上部単一ケーブルの面内1次モード減衰との比較から連結の減衰効果を明確にしたものである。連結ワイヤーは2種類用意され、ケーブル模型と同じ剛性を有する剛連結ワイヤーと、ゴム製でケーブル模型より剛性が小さく、減衰性も大きい柔連結ワイヤーが用いられている。図4.25に自由振動波形記録の例を示すが、ケーブルを連結することによって減衰が高くなっていることがわかる。

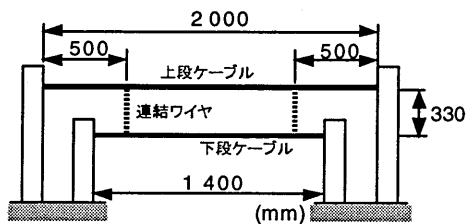


図 4.24: ケーブル連結システム模型

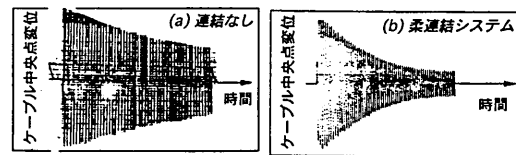


図 4.25: 自由振動波形記録

図4.26には、ケーブル連結システムの1次モード減衰(対数減衰率)とプレストレスパラメータ(連結ワイヤーのスパン長の減少率で定義し、連結ワイヤーに導入されるプレストレスの大きさに対応する)との関係を示した。図には、ケーブルを連結する前の上部単一ケーブルの1次モード減衰を比較して示してある。図よりわかるように、剛連結にせよ、柔連結にせよ、ケーブルを連結することによりモード減衰が大きくなっており、ケーブル連結による制振対策に減衰効果があることが言える。また、柔連結ワイヤーを用いたほうが付加される減衰はかなり大きいこと、連結ワイヤーに導入するプレストレスは、それが極めて小さい場合を除いて、減衰効果にはほとんど影響しない。

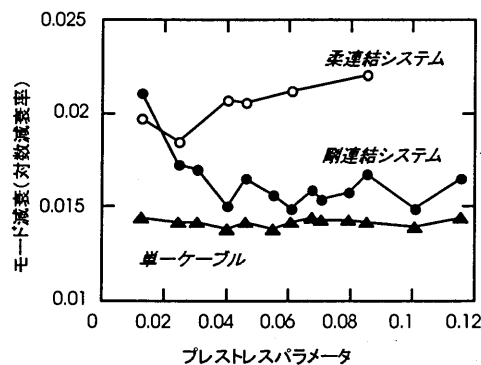


図 4.26: ケーブル連結によるモード減衰の増加

2) ケーブルシステムの減衰解析

ケーブル連結の減衰効果は減衰解析によっても解釈することができる⁴⁴⁾。実験に用いられたケーブルシステムは上下ケーブルと連結ワイヤーより成り、それぞれに異なる減衰エネルギーを有すると考えれば、式(4.93)のモードエネルギー評価式は以下のように書き換えられる。

$$\xi_n = \frac{1}{2} \left\{ \eta_{cable} \left(\frac{U_{an}^{upper\ cable}}{U_n^{system}} + \frac{U_{an}^{lower\ cable}}{U_n^{system}} \right) + \eta_{tie} \frac{U_{an}}{U_n^{system}} \right\} \quad (4.98)$$

ここで、ケーブルと連結ワイヤーに別々のロスファクターを定義しており、また各項の分母はケーブルシステムのモードポテンシャル・エネルギーの総和を意味する。

ケーブルシステムに対するこの減衰評価式 (4.98) を基に、有限要素法による固有振動解析で求めた振動モードから各部材のモードひずみエネルギー比を算出すれば、減衰解析を行うことができる。なお、連結前の単一ケーブルについて1次モード減衰が測定されていることから、単一ケーブルのひずみエネルギー比を有限要素解析により求め、それとモード減衰実験値とによって、ケーブルのロスファクター η_{cable} が推定できる。解析の結果、模型で使用したケーブルのロスファクターは平均で 0.052 と推定された。

図 4.27は、実験的に推定したこのケーブルのロスファクターと、ケーブルシステムの固有値解析から求めたケーブル部材のひずみエネルギー比とから、上部ケーブルおよび下部ケーブルがもたらすモード減衰の寄与を求め、ケーブルシステムのモード減衰実験値と共に示したものである。解析値としては、上段ケーブルのもたらす対数減衰率、下段ケーブルのもたらす対数減衰率、および上下ケーブルの減衰寄与を足しあわせたものを示している。図 4.27(a) の剛連結では、プレストレスが小さい場合を除いて、連結ワイヤーでの減衰も連結したことによる上部ケーブルの減衰増加も認められず、連結の減衰効果は連結先の下部ケーブルでのわずかな減衰が付加されることによるものであることがわかる。プレストレスが小さい場合には状況が異なり、プレストレスの減少に伴い、上部ケーブルの減衰寄与が低下すると同時に下部ケーブルの減衰寄与が大きくなって、両者がほぼ同程度にまで近づき、トータルとして減衰効果がもたらされる。このように、上下ケーブルの減衰寄与の割合がプレストレスによって変わるのには、モード形状がプレストレスによって変化することによる。

一方、図 4.27(b) の柔連結の場合には、プレストレスが小さい場合を除いて、上部ケーブルの減衰そのものが増加し、連結先の下部ケーブルの減衰が付加され、さらに連結ワイヤーにおいてもエネルギーが散逸されて、大きな減衰効果が得られる。また、連結ワイヤーでの減衰はプレストレスの増大によって大きくなる傾向を示す。

なお、図 4.27(b) で 実験値(システム) と 解析値(上下段) の差が減衰評価式 (4.98) 右辺の中括弧内の第 2 項に対応し、連結ワイヤーのモードひずみエネルギー比は解析により求められることから、柔連結ワイヤーのロスファクターを推定することができる。結果としてほぼ一定のロスファクター値 0.076 を同定することができ、ケーブル減衰のエネルギー的評価法の妥当性が示される。

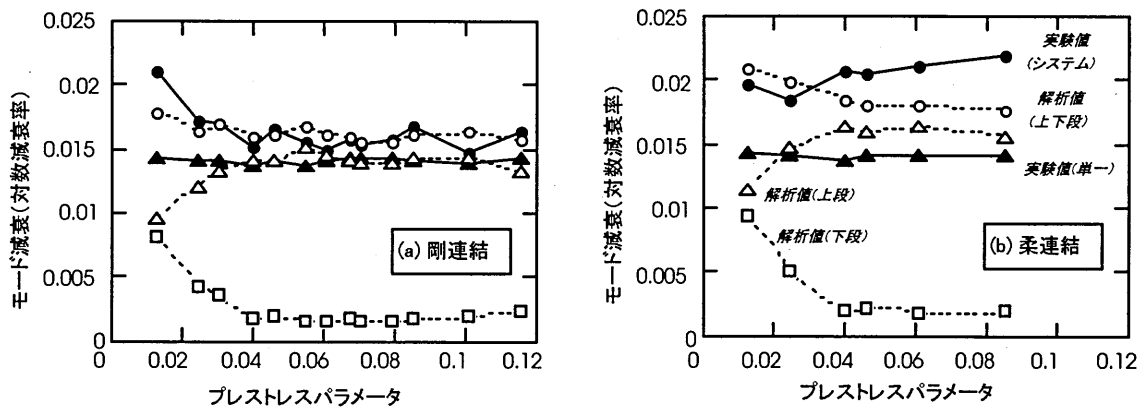


図 4.27: ケーブルシステムの減衰実験値と解析値との比較

参考文献

- 1) Irvine, M.: Cable Structures, Dover edition, pp.87-134, 1992 (MIT Press, 1981).
- 2) 山口宏樹・伊藤 学：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文報告集，第 286 号，pp.29-36, 1979.
- 3) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd Ed., Pergamon Press, pp.93-96, 1974.
- 4) Nayfeh, A.H. and Mook, D.T.: Nonlinear Oscillations, John Wiley and Sons, pp.258-304, 1979.
- 5) Forsythe, G.E. and Wasow, W.R. (藤野精一訳)：偏微分方程式の差分法による近似解法(上)，吉岡書店，pp.43-56, 1967.
- 6) 谷内俊弥・西原功修：非線形波動，岩波書店，pp.21-48, 1977.
- 7) Cristescu, N. (黒崎永治訳)：衝撃塑性学，コロナ社，pp.180-285, 1970.
- 8) Henghold, W.M. and Russell, J.J.: Equilibrium and natural frequencies of cable structures (A nonlinear finite element approach), Computers and Structures, Vol. 6, pp.267-271, 1976.
- 9) Clough, R.W. and Penzien, J.: Dynamics of Structures, 2nd Ed., McGraw-Hill, pp.325-340, 1993.
- 10) 山口宏樹：構造振動・制御，共立出版，pp.62-83, 1997.
- 11) 山口宏樹・宮田利雄・伊藤学：正弦波外力を受けるケーブルの時間応答解析，土木学会論文報告集，第 308 号，pp.37-45, 1981.
- 12) 高橋和雄ほか：調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析，土木学会論文報告集，第 338 号，pp.59-68, 1983.
- 13) Finlayson, B.A. (鷲津久一郎他訳)：重みつき残差法と変分原理，培風館，pp.3-15, 1974.
- 14) 長井正嗣ほか：ケーブルにモード座標を用いた桁・ケーブル系の固有値および応答解析，構造工学論文集，土木学会，Vol.38A, pp.63-72, 1992.
- 15) 川畑治・長井正嗣・新居準也：ケーブル振動を考慮した斜張橋の立体振動解析，土木学会第 47 回年次学術講演会概要集，I, pp.482-483, 1992.
- 16) 長松昭男：モード解析，培風館，pp.189-250, 1985.
- 17) 長松昭男・大熊政明：部分構造合成法，培風館，1991.
- 18) Forsythe, G.E. and Wasow, W.R. (藤野精一訳)：偏微分方程式の差分法による近似解法(上)，吉岡書店，pp.74-79, 1967.
- 19) Clough, R.W. and Penzien, J.: Dynamics of Structures, 2nd Ed., McGraw-Hill, pp.56-58, 1993.
- 20) 辻松雄・加納勇：ワイヤーロープの減衰能，建設コンサルタンツ協会近畿支部第 13 回研究発表会，pp.73-85, 1980.
- 21) Yamaguchi, H. and Fujino, Y.: Modal damping of flexural oscillation in suspended cables, Structural Eng./Earthquake Eng., JSCE, Vol.4, No.2, pp.413s-421s, 1987.
- 22) Nashif, A.D., Jones, D.I.G. and Henderson, J.P.: Vibration Damping, John Wiley and Sons, Inc., pp.45-51, 1985.
- 23) Yamaguchi, H. and Jayawardena, L.: Analytical estimation of structural damping in cable structures, J. of Wind Eng. and Industrial Aerodynamics, 41-44, pp.1961-1972, 1992.
- 24) Yamaguchi, H. and Adhikaro, R.: Energy-based evaluation of modal damping in structural cables with and without damping treatment, J. of Sound and Vibration, 181(1), pp.71-83, 1995.
- 25) Yamaguchi, H. and Fujino, Y.: Effects of support flexibility on modal damping of cables, Structural Eng./Earthquake Eng., JSCE, Vol.5, No.2, pp. 303s-311s, 1988.
- 26) 山口宏樹：支点減衰を有するケーブルのモード減衰，埼玉大学工学部建設系研究報告，第 18 巻，pp.31-42, 1988.
- 27) 山口宏樹・宮田利雄・伊藤学：ケーブル系の非線形動的応答における一挙動，第 24 回構造工学シンポジウム論文集，土木学会，pp.51-61, 1978.
- 28) 高橋和雄・田川賢・佐藤秀雄：ケーブルの面外不安定振動，土木学会論文集，第 350 号 /I-2(ノート)，pp.355-358, 1984.
- 29) 高橋和雄ほか：面内加振を受けるケーブルの面外分岐応答，構造工学論文集，Vol.35A, 土木学会，pp.699-707, 1989.
- 30) 高橋和雄・田川賢・池田虎彦：ケーブルの面内非線形分岐応答解析，土木学会論文集，第 344 号 /I-1, pp.333-340, 1984.
- 31) 高橋和雄・白石隆俊：水平ケーブルの面内対称加振による逆対称分岐応答，構造工学論文集，Vol.36A, 土木学会，pp.711-718, 1990.
- 32) 高橋和雄ほか：変動軸力を受けるケーブルの動的安定性，構造工学論文集，Vol.37A, 土木学会，pp.921-928, 1991.

- 33) 高橋和雄ほか：支点が動きうるサグ比の小さいケーブルの動的安定性，土木学会論文集，No.495/I-28 (ノート)，pp.127-130，1994.
- 34) 高橋和雄・鎌田智之・花田博史：係数励振力と周期的変動荷重を受ける偏平ケーブルの非線形振動，土木学会論文集，No.549/I-37，pp.115-124，1996.
- 35) Fujino, Y. and Kimura, K.: Cables and cable vibration in cable-supported bridges, Proc. Int. Seminar on Cable Dynamics, Tokyo, 13 Oct. 1997, pp.1-11, 1997.
- 36) 藤野陽三・Warnitchai, P.・Pacheco, B.M.: ケーブル・はりモデルを用いた斜張橋の内部共振に関する実験と解析，土木学会論文集，No.432/I-16，pp.109-118，1991.
- 37) 岡内功ほか：大振幅加振による長大斜張橋の実橋振動実験，土木学会論文集，No.455/I-21，pp.75-84，1992.
- 38) 山口宏樹：ケーブル構造のモード減衰性状と減衰理論，鋼構造論文集，第1巻3号，日本鋼構造協会，pp.129-138，1994.
- 39) 藤原亨ほか：マルチケーブル複合構造形式斜張橋の固有振動特性，構造工学論文集，Vol. 39A，土木学会，pp.831-839，1993.
- 40) 山口宏樹ほか：鶴見つばさ橋の振動実験による動的特性の同定，土木学会論文集，No.543/I-36，pp.247-258，1996.
- 41) 山口宏樹他：斜張橋振動減衰のエネルギー的評価法と鶴見つばさ橋への適用，土木学会論文集，No.543/I-36，pp.217-227，1996.
- 42) 藤野陽三・Pacheco, B.M.・Sulekh, A.: ダンパーをつけた斜張橋ケーブルの減衰評価曲線，橋梁と基礎，Vol.26，No.4，pp.41-45，1992.
- 43) 山口宏樹：ケーブルシステムの振動減衰の推定，構造工学論文集，Vol.39A，土木学会，pp.851-860，1993.
- 44) Yamaguchi, H. and Nagahawatta, H.D.: Damping effects of cable cross ties in cable-stayed bridges, J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 54/55, pp.35-43, 1995.