

第 3 章

ケーブル構造の形状決定解析

本章では、ケーブル構造特有の問題である設計目標としての形状を制御する形状決定解析について論じる。最初に、形状決定問題について解説している。続いて、直線部材の組み合わせとして構成されているケーブル構造を対象に、完成形状および完成状態における部材力を変数として、つり合い条件および形状や部材力に関する制約条件付きの最適値問題を構成して、その最適値を決定する形状決定解析を論じる。さらに、より高度な形状決定解析法として、設計計算に課せられる各種の条件を満たし、かつ、後載荷重が作用した状態下での変位や応力が許容範囲内に収まる適切な部材断面を有する構造系を決定する最適化手法についても節をあらためて論じる。ここでは、目標形状と部材力に加え、付加される積載荷重によって生じる応力と変形、および部材断面をも制御の対象として最適化問題を構成している。最後に、数値計算例を紹介している。

3.1 ケーブル構造の形状決定問題

ケーブル構造の力学的特徴として、幾何学的非線形性が大きいこと、部材(要素)は圧縮力を受けないこと、構造の形状や内力をあらかじめ知ることは一般にできず、初期部材長等の構造パラメータを調整して所定の荷重条件下のもとでつり合い条件と設計目標としての形状(目標形状)を制御することが必要であることなどがあげられる。

すなわち、一般の構造では、当初に設定された形状の近傍で所定の荷重に対するつり合い形状が存在するのに対し、ケーブル構造では、力学的考慮を払わずに形状が設定された場合、所定の荷重につり合う内力系が存在せず、有限の変形を生じた後つり合い状態に達するので、そのつり合い状態の形状は設計上の目標として設定された形状とかけ離れたものになるのが普通である。

このような理由から、ケーブル構造では、設計者の意図に応じて、幾何学的形状や内力である部材力を制御して、所定の荷重条件や境界条件のもとに、形状と部材力に関する設計上の要求をできるかぎり満たすようなつり合い状態を求めることが重要になる。このことを、ケーブル構造の形状決定問題と呼んでいる。

もう少し詳しく形状決定問題を論じるため、図 3.1 に示すケーブルトラス構造を設計し施工する場合について考えてみよう。

まず、歩行性や美観あるいは空間上の制限などの面から、設計者は上弦ケーブルや下弦ケーブルの形状を定める。続いて、自重や歩行者荷重、風荷重などの外力条件から簡単な計算により、使用ケーブルの概略断面寸法を仮定する。次に、所定の荷重のもとに生じる変位や応力が許容範囲内に収まるようケーブル断面や導入プレストレス量を決定する。この段階で、ケーブル構造の形状決定問題を解くための設計上の要求が定まったことになる。

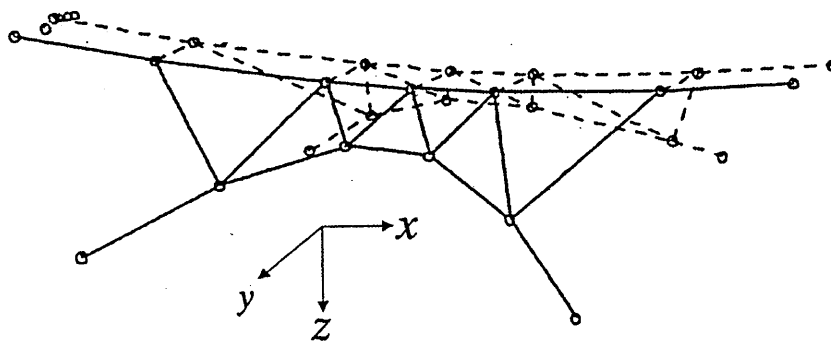


図 3.1: ケーブルトラス構造

つぎに、施工を考えると、ケーブルトラスを形成する上弦材、下弦材および斜材などの所要長さの各部材を接合点(節点)で結合していくことになるが、この段階では、部材力は零であり、形状は不定である。このようにして、前もって定められた無応力長さとなるよう製作された個々の部材を組み合わせた後、ケーブル端部を固定端に緊結し、所定のプレストレスと固定荷重を作用させたときに、目標の形状でつり合い状態(完成状態)に達すればよいことになる。

以上のことから、ケーブル構造の形状決定問題とは、完成状態(完成形状)が、要求された目標状態(目標形状)を可能な限り忠実に再現するように、各部材の無応力長さを決定することといえる。

このような形状決定の問題を取り扱う方法として、有限変形解析法をくり返し適用することによって、最終のつり合い状態における部材の長さが、あらかじめ目標値として与えられている値になるようにする方法¹⁾や、節点座標および部材力を未知量としてつり合い方程式を作り、上と同様に、部材の長さが与えられた目標値を保持しなければならないとする制約条件の下で、このつり合い方程式を直接解いて未知量を決定する方法²⁾などがある。また、完成形状および完成状態における部材力を変数(未知数)として、力学的(つり合い)条件および形状や部材力に関する設計上の制約条件付きの最適値問題を構成して、その最適値を決定する最適値問題の手法がある。

次節では、このような最適値問題としての形状決定解析法³⁾について述べる。

ただ、これらの形状決定方法では、固定荷重(死荷重)が作用している場合のつり合い状態を求めるのに用いられるが、つぎのような問題が残されている。

先に述べた形状決定解析では、固定荷重(死荷重)は与えられたものとしているが、固定荷重には部材重量を含むので、部材断面諸元が仮定されていることを前提としている。形状決定の後に、固定荷重のほかに後載荷重も作用したときのつり合い状態について、変位や部材応力を検定する必要があるが、部材断面が不足している場合には、これを増して固定荷重を修正し、形状決定をやり直す必要がある。本来、設計計算の一般論として、部材断面設計と形状決定とを互いに独立に論ずることは不合理である。固定荷重に占める部材重量の割合が十分小さい場合には、このような部材断面の変更が形状決定計算の結果に及ぼす影響は小さいが、そうでない場合には、試行錯誤的な設計プロセスは避けられない。

そこで、このような問題に対処するため、形状決定計算に課せられる各種の条件を満たすと同時に、後載荷重が作用した状態下での変位や応力が許容範囲内に収まる適切な部材断面を有する構造系(完成状態および部材断面諸元)を決定する最適化手法⁴⁾についても節をあらためて論じる。ここでは、目標形状と部材力に加え、付加される積載荷重によって生じる応力と変形、および部材断面をも制御の対象として最適化問題を構成している。

なお、本章で述べるケーブル構造はすべて直線部材の組み合わせとして構成されているものとする。

ケーブル部材の力学的特性をより忠実に表現する曲線部材を用いた形状決定問題については、本書 1.4 および 2.2 に述べた弾性カテナリーケーブルの接線撓性式をもとに、つり合い形状や部材張力と部材長さや支持節点間との線形化式を修正式として、弾性カテナリーの形状決定へ応用した研究がある⁵⁾。そこでは、(a) 無応力時の部材長さ (b) 変形前の支持節点位置を制御量として、(A) 部材張力、(B) 支持節点反力、(C) 支持節点の変形後の位置および (D) 部材上の確定点の空間位置などを制御変数の関数として表現し、(A) ~ (D) の関数値を指定したときの制御変数値 (a),(b) を求める問題として形状決定問題を論じている。

以上に述べた形状決定問題は、ケーブルトラスやケーブルネットなどのケーブル構造を対象としたものであるが、広い意味でのケーブル構造である吊橋や斜張橋でも、桁を支える部材としてケーブルが用いられ、設計計算や製作の際に、ケーブルの無応力長が必要になる。このような構造では、完成状態で、構造が満足すべき条件より、ケーブルの無応力長が決定される。吊橋では、完成状態で補剛桁が無応力状態なので、すべての死荷重を主ケーブルで支える必要があり、主ケーブルの形状や各節点間のケーブルの無応力長さは、各節点におけるつり合い条件のみで決定される。一方、斜張橋では、完成状態で塔には水平力によるモーメントを作用させないという条件と桁に生じる曲げモーメントや軸力による応力をできるだけ均等にかつ少なくなるよう各ケーブルの最適なプレストレス量が決定される⁶⁾。

3.2 最適化手法による形状決定法

本節では、ケーブル構造の形状および部材力のそれぞれに課せられる設計上の制約条件をできるだけ満たすつり合い状態を求める方法として、設計上の要求の厳しさの程度を表す重み関数を導入して形状や部材力に関する一種の「望ましさ」を表す目的関数を作り、その停留点を求めることによって「望ましさ」をもっとも高める最適値問題としての形状決定解析法を示す³⁾。

あらためて、前項に述べた設計条件を列挙すると

S-1 内力 (部材力) と外力は安定なつり合い状態にあること

S-2 すべての部材に圧縮力が作用しないこと

D-1 つり合い状態での形状があらかじめ設定された目標形状にできるだけ近いものであること

D-2 任意に指定された部材の張力があらかじめ規定された値になること

D-3 任意に選ばれた部材の張力が目標として設定された値にできるだけ近いこと

のようになる。

いま、 f および M をそれぞれケーブル構造の自由度および部材総数、 \boldsymbol{x} を $f \times 1$ の節点座標ベクトルとする。完成状態におけるつり合い条件 (**S-1**) は任意の節点 i について

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^{N_i} (x_i - x_j) \phi_m &= P_{ix} \\ \sum_{m=1}^{N_i} (y_i - y_j) \phi_m &= P_{iy} \\ \sum_{m=1}^{N_i} (z_i - z_j) \phi_m &= P_{iz} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

と表せる。ここに、 N_i は節点 i に接続する部材の総数、 j はこれらの部材の他端節点番号、 x_i, y_i, z_i および x_j, y_j, z_j は部材 m の両端の節点番号 i および j における座標を表す。また、 $\phi_m = T_m / \bar{l}_m$ で、 \bar{l}_m および T_m は、それぞれ完成状態における部材の長さおよび張力係数を表す。この ϕ_m を張力係数と呼ぶ。 P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}

は節点 i に作用する外力である。同様の式が他の節点についても成立し、その総数は構造の自由度 f に等しい。それらをマトリックス表示して

$$\Phi_N \mathbf{x}_N = \mathbf{P} \quad (3.2)$$

と表す。ここに、 Φ_N は ϕ_m からなる $f \times 3N$ (N は全節点数) のマトリックス、 \mathbf{x}_N および \mathbf{P} はそれぞれ $3N \times 1$ の節点座標ベクトルおよび $f \times 1$ の外力ベクトルである。

いま、全節点を自由節点と境界上の節点(固定節点)に分類し、それぞれの節点の座標を \mathbf{x}_J および \mathbf{x}_{I^*} と表し

$$\mathbf{x}_N = \{\mathbf{x}_J | \mathbf{x}_{I^*}\}^T \quad (3.3)$$

とすると、式(3.2)は

$$[\Phi_J | \Phi_{I^*}] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_J \\ \mathbf{x}_{I^*} \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \quad (3.4)$$

となる。ここに、 Φ_J は $f \times f$ の優対角の正方マトリックス、 Φ_{I^*} は $f \times (3N - f)$ のマトリックスである。また、 \mathbf{x}_J および \mathbf{x}_{I^*} はそれぞれ $f \times 1$ および $(3N - f) \times 1$ のベクトルである。式(3.4)より

$$\mathbf{x}_J = \Phi_J^{-1}(\mathbf{P} - \Phi_{I^*} \mathbf{x}_{I^*}) \quad (3.5)$$

が得られる。これより、つり合い条件を満足する節点座標は張力係数の値に対応して一義的に決まることがわかる。このように、つり合い条件を満足する節点座標を張力係数によって陽な形で表すことができるから、後述の目的関数も同様に張力係数により陽な形で表せ、最適値問題としての定式化が容易になる。

すべての部材の非抗圧性(S-2)は張力係数を用いて

$$\phi_m > 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (3.6)$$

と表せる。ここに、 M は未知張力係数の個数である。

つぎに、指定された部材の張力をあらかじめ与えられた値にする制約条件(D-2)を表現するため、すべての部材の張力係数 ϕ_N を

$$\phi_N = \{\phi | \phi_C\}^T \quad (3.7)$$

と表す。ここに、 ϕ は $M \times 1$ の未知張力係数、 ϕ_C はあらかじめ与えられた値になるよう張力を指定された部材の張力係数である。すなわち、式(3.7)は ϕ_C を既知の値として変数群から取り除くことを意味している。ここで、張力係数は部材力を部材長で除したものであり、その部材長は式(3.1)より明らかかなようにつり合い状態における部材長 \bar{l} でなければならない。しかし、 ϕ_C を設定する段階ではつり合い状態での部材長は不明である。このため、 ϕ_C を設定するときは近似的に原設計での部材長を用いる。最終的につり合い状態が得られ、張力係数より部材力を逆算するときは、そのつり合い状態での部材長を用いる。したがって、あらかじめ指定された部材の張力は当初に与えられたものにはならず、これに完成状態での部材長と原設計での部材長の比を乗じたものになる。

さらに、完成状態における形状と部材力をできるかぎり目標値に近づけるという制約条件(D-1および(D-3))を定式化するため、つぎの量を導入する。

$$W = \sum_{j=1}^f \left(\frac{R_j}{qR_j} \right)^2 + \sum_{m=1}^M \left(\frac{\phi_m - \phi_{0m}}{q\phi_m} \right)^2 = \|\mathbf{Q}_R \mathbf{R}\|^2 + \|\mathbf{Q}_\phi (\phi - \phi_0)\|^2 \quad (3.8)$$

ここに,

$$Q_R = \text{diagonal} \left[\frac{1}{q_{R1}}, \frac{1}{q_{R2}}, \dots, \frac{1}{q_{Rf}} \right], \quad Q_\phi = \text{diagonal} \left[\frac{1}{q_{\phi1}}, \frac{1}{q_{\phi2}}, \dots, \frac{1}{q_{\phi M}} \right]$$

である。 R_j は目標形状と完成形状の節点座標の差, ϕ_m は設計変数となる部材 m の未知の張力係数, ϕ_{0m} はあらかじめ設定された目標張力に関する張力係数であり, R, ϕ および ϕ_0 はこれらをそれぞれベクトル表示したものである。 q_{Rj} と $q_{\phi m}$ はそれぞれ R_j および ϕ_m と同じ単位を有する重み係数で, 形状により大きな重みを置くか, 部材力により大きな重みを置くかによって設計上の判断から設定される定数である。すなわち, 式 (3.8) から明らかのように, q_{Rj} と $q_{\phi m}$ はそれぞれ目的関数 W の形状誤差 R_j^2 あるいは部材力誤差 $(\phi_m - \phi_{0m})^2$ に重み $1/q_{Rj}^2$ あるいは $1/q_{\phi m}^2$ を課す量であると考えられることができる。 Q_R および Q_ϕ は q_{Rj} と $q_{\phi m}$ の逆数を対角項とするマトリックスである。

式 (3.8) の R は, 式 (3.5) より

$$R = \Phi_J^{-1}(P - \Phi_{I^*} x_{I^*}) - x_0 \quad (3.9)$$

となる。ここに, x_0 は目標座標からなる $f \times 1$ のベクトルである。このように, 式 (3.8) で与えられる目的関数 W を, 設計変数のうちの張力係数のみで表すことができる。

式 (3.8) で定義された目的関数 W が最小になるとき, 形状および部材力のそれぞれが重み係数に応じた望ましさ, すなわち設計者が意図したそれぞれの目標値に近づいたと考えることができる。したがって, M を未知張力係数の個数, ϕ を未知張力係数 (設計変数) として

「 $\phi_m > 0 (m = 1, 2, \dots, M)$ の領域で式 (3.8) の目的関数 W を最小にする ϕ_m を求めよ」

という最適値問題を解くことが形状決定問題を解くことになる。

目的関数 W を最小化する手法として, Gauss の反復法と最大傾斜法あるいは Maximum Neighborhood Method などの修正ベクトルの補正法を組み合わせた方法が用いられる³⁾。

3.3 拡張最適化手法による形状決定法

前節に述べた形状決定解析法では, 固定荷重下でのつり合い状態を対象としている。前述のように, 固定荷重に占める部材重量が大きい場合や固定荷重以外の積載荷重 (後載荷重) の割合が大きい場合には, この方法では, 仮定した断面諸元を試行錯誤的に修正する繰り返し計算が必要になるなどの問題が残されている。

本節では, 最適化手法による形状決定解析法の考え方を拡張して, 部材断面積も設計変数に取り入れ, さらに, 固定荷重に対しては完成形状決定を, 後載荷重に対しては応答 (変位や応力) の制御を行い, 完成状態の形状, 部材力および部材断面積の最適解を求める手法を示す⁴⁾。

前節に述べた設計条件 (S-1, S-2, D-1, D-2, D-3) に加え, あらたに, つぎの設計条件を設定する。

S-3 後載荷重の作用下で, 部材力と外力がつり合うこと

D-4 固定荷重および後載荷重の作用下で, 部材張力はあらかじめ定められた許容値を越えないこと

D-5 後載荷重により生じる変位は可能な限り小さい値をとること

D-6 部材総重量を可能な限り小とすること

条件 D-4 は, 完成状態および後載荷重作用時における部材張力の許容領域を規定するものである。また, 条件 D-5 は最大の剛性を要求するものであり, 条件 D-6 は最小重量設計を目指すものである。

いま, 節点に作用する外力 P を, ケーブル重量による固定荷重 (死荷重) P_R とそれ以外の積載荷重 P_C とに分けて,

$$P = P_C + P_R \quad (3.10)$$

のように表す。ここで、 P_R は、つぎのように書き換えることができる。

$$P_R = C_\gamma L_m A \quad (3.11)$$

ここに、 C_γ はケーブルの比重を成分とする $f \times M$ のマトリックス、 L_m は部材の長さ \bar{l}_m を対角成分とする $M \times M$ の対角マトリックス、 A は各部材の断面積を表す $M \times 1$ のベクトルである。

部材重量が、部材両端の節点に均等に分配されると仮定すると、マトリックス C_γ の第 m 列は、つぎのように表せる。

$$C_{\gamma m} = \left\{ 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\gamma_m C_x, \frac{1}{2}\gamma_m C_y, \frac{1}{2}\gamma_m C_z, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\gamma_m C_x, \frac{1}{2}\gamma_m C_y, \frac{1}{2}\gamma_m C_z, 0, \dots, 0 \right\}^T$$

ここに、 γ_m は、 m 番目の部材の単位長さ当たりの重量、 C_x, C_y, C_z は、それぞれ重力の x, y, z 方向の方向余弦である。

一方、ケーブル構造は、多数のロープにより構成され、それら個々のロープは両端の固定節点間に張り渡され、複数のロープが結合される各節点で分割されて個々の部材を形成する。このことから、いくつかの部材は等しい断面諸元 (部材特性) を有することになる。したがって、すべての部材の断面積 A は、個々のロープの断面積によりつぎのように表される。

$$A = C_P A_P \quad (3.12)$$

ここで、 C_P は $M \times N_P$ (N_P は部材特性の個数) のマトリックス、 A_P は $N_P \times 1$ のベクトルで部材特性の断面積を表す。 m 番目の部材の断面積が k 番目の部材特性断面積に該当するとき、 C_P の m 行は k 列目のみ 1 でその他は 0 になる N_P 次元の行ベクトルとなる。

式 (3.12) を式 (3.11) に代入すると

$$P_R = C_\gamma L_m C_P A_P \quad (3.13)$$

を得る。式 (3.5) と式 (3.10) より、完成状態の節点座標はつぎのように表せる (S-1)。

$$x_J = \Phi_J^{-1} (P_C + P_R - \Phi_{I^*} x_{I^*}) \quad (3.14)$$

つぎに、完成状態のケーブル構造に後載荷重が作用したときの変形状態についてのつり合い条件式は S-4 より

$$x'_J = \Phi_{JL}^{-1} (P_C + P_R + P_L - \Phi_{I^*C} x_{I^*}) \quad (3.15)$$

と書き表される。ここに、 x'_J および P_L は、それぞれ $f \times 1$ のベクトルで、変形後の節点座標および後載荷重を表す。 Φ_{JL} および Φ_{I^*C} は Φ_J, Φ_{I^*} と同様のマトリックスで、変形状態の張力係数からなり、次式により与えられる。

$$\Phi_{JL} = \Phi_J |_{\phi_T = \phi_L}, \quad \Phi_{I^*C} = \Phi_{I^*} |_{\phi_T = \phi_L}$$

ここで、 ϕ_T および ϕ_L はそれぞれ完成状態および変形状態の張力係数ベクトルである。 ϕ_L の成分は

$$\phi_{Lm} = \frac{T_m + T'_m}{\bar{l}'_m} \quad m = 1, 2, \dots, M_T$$

と表され、 M_T は全部材数、 T_m は部材 m の完成状態における張力、 T'_m は部材 m の変形状態における張力増分である。 \bar{l}'_m は変形状態における部材長さである。すなわち、

$$T'_m = \frac{E_m A_m}{\bar{l}'_m} e_m - \alpha E_m A_m \Delta T, \quad \bar{l}'_m = \bar{l}_m + e_m, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

と書かれる。ここで、 \bar{l}_m は部材 m の完成状態における部材長さ、 E_m 、 A_m および e_m はそれぞれ弾性係数、部材断面積、および部材の弾性伸びである。また、 α および ΔT はそれぞれ線膨張係数および温度変化量である。以下の解析では、完成状態から変形状態への微小変形を仮定して、つぎの近似を行う。

$$\phi_{Lm} = \frac{T_m + T'_m}{\bar{l}_m} = \phi_m + \frac{E_m A_m}{\bar{l}_m^2} e_m - \alpha \frac{E_m A_m}{\bar{l}_m} \Delta T, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3.16)$$

すべての部材の非抗圧性 (S-2) は張力係数を用いて次式のように書かれる。

$$\left. \begin{array}{l} \phi_m > 0 \\ \phi_{Lm} \geq 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (m = 1, 2, \dots, M) \\ (m = 1, 2, \dots, M_T) \end{array} \quad (3.17)$$

指定された部材の張力をあらかじめ与えられた値にする制約条件 (D-2) については、前項と同じく、すべての部材の張力係数 ϕ_N を

$$\phi_N = \{\phi | \phi_C\}^T$$

と表す。ここに、 ϕ は $M \times 1$ 個の未知張力係数、 ϕ_C は $(M_T - M) \times 1$ 個の張力を指定された部材の張力係数である。

完成状態および変形状態における部材張力に関する条件 (D-4) を、それぞれつぎのように表す。

$$\left. \begin{array}{l} T_m \leq \frac{T_{cm}}{n_c} \\ T_m + \frac{E_m A_m}{\bar{l}_m} e_m - \alpha E_m A_m \Delta T \leq \frac{T_{cm}}{n_s} \end{array} \right\} \quad (m = 1, 2, \dots, M_T) \quad (3.18)$$

ここに、 T_{cm} は部材 m の破断張力、 n_c および n_s はそれぞれ完成状態および変形状態における安全率である。以下の解析では、この破断張力 T_{cm} は部材断面積 A_m に比例すると仮定し、

$$T_{cm} = k A_m \quad (m = 1, 2, \dots, M_T)$$

と書く。ここに、 k は破断張力と部材断面積との比例定数である。上式を式 (3.18) に代入すると

$$\left. \begin{array}{l} \bar{l}_m \phi_m \leq C_c A_m \\ \bar{l}_m \phi_m + \frac{E_m A_m}{\bar{l}_m} e_m - \alpha E_m A_m \Delta T \leq C_s A_m \end{array} \right\} \quad (m = 1, 2, \dots, M_T) \quad (3.19)$$

となる。ここに、 C_c および C_s はそれぞれ k/n_c および k/n_s である。

完成状態における形状と部材力、後載荷重による変位、および部材総重量に関する設計上の制約条件 (D-1, D-3, D-5 および D-6) を定式化するために、前項における式 (3.8) と同様に次式を定義する。

$$\left. \begin{array}{l} W = \sum_{i=1}^f \left(\frac{R_i}{q_{Ri}} \right)^2 + \sum_{k=1}^M \left(\frac{\phi_k - \phi_{0k}}{q_{\phi k}} \right)^2 + \sum_{i=1}^f \left(\frac{\delta x_i}{q_{xi}} \right)^2 + \sum_{m=1}^M \left(\frac{L_m A_m}{q_{Am}} \right)^2 \\ = \|\mathbf{Q}_R \mathbf{R}\|^2 + \|\mathbf{Q}_\phi (\phi - \phi_0)\|^2 + \|\mathbf{Q}_x \delta \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{Q}_A L_m \mathbf{A}\|^2 \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

ここで、 R_i 、 ϕ_k および ϕ_{0k} はそれぞれ前述の目標形状と完成形状との節点座標差、未知張力係数および目標張力係数、 δx_i は後載荷重による節点変位である。また、 \mathbf{R} 、 ϕ 、 ϕ_0 および $\delta \mathbf{x}$ はこれらをベクトル表示したもので、それぞれ $f \times 1$ 、 $M \times 1$ 、 $M \times 1$ および $f \times 1$ のベクトルである。

式 (3.20) の q_{Ri} 、 $q_{\phi k}$ 、 q_{xi} および q_{Am} の逆数は前項に述べたようにそれぞれ設計変数 R_i 、 $\phi_k - \phi_{0k}$ 、 δx_i および $L_m A_m$ の各項に対し、設計者の意図に応じて目標関数の望ましさに重みを与える量である。 \mathbf{Q}_R 、 \mathbf{Q}_ϕ 、 \mathbf{Q}_x および \mathbf{Q}_A は各 $1/q$ 値を対角成分とする $f \times f$ 、 $M \times M$ 、 $f \times f$ および $M_T \times M_T$ の対角マトリックスである。

なお、式(3.20)における目標形状と完成形状との節点座標差のベクトル R は式(3.14)よりつぎのように書き換えられる。

$$R = \Phi_J^{-1}(P_C + P_R - \Phi_{I^*} x_{I^*}) - x_0 \quad (3.21)$$

ここに、 x_0 は目標形状の節点座標ベクトルである。そして、完成状態のケーブル構造に後載荷重が作用したときの節点変位ベクトル δx は式(3.15)より

$$\delta x = \Phi_{JL}^{-1}(P_C + P_R + P_L - \Phi_{I^*} x_{I^*}) - x_J \quad (3.22)$$

と表される。これらの R (あるいは x_J) および δx は ϕ および A_P が決まれば一意的に定められる。

式(3.20)における目的関数 W の右辺第1項と第2項は、前項の最適値問題における目的関数の式(3.8)と同じものである。これに、第3項と第4項とが付加されて本項の最適値問題の目的関数が構成されている。注意すべきことは、前節の式(3.8)が ϕ のみの関数であったのに対し、式(3.20)が、座標 x_J 、節点変位 δx および A_P の関数になっていることである。

さて、このように定義された目的関数 W が最小になるとき、条件 $D-1$, $D-3$, $D-5$ および $D-6$ が満たされ、望ましいケーブル構造が得られたと考えられる。

したがって、この問題は、

「未知張力係数 ϕ (M 個) および部材特性の断面積 A_P (N_P 個) を数値解析上の独立変数として、式(3.17)および式(3.19)の制約条件を満たし、式(3.20)に示す目的関数 W を最小にする ϕ および A_P を決定する」

という最適値問題を解くことに帰着する。

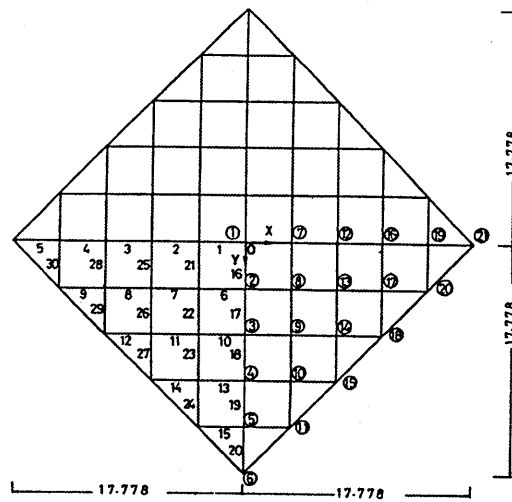
最適値問題の解法として、前節と同様、Gaussの反復法と最大傾斜法あるいはMaximum Neighborhood Methodなどの修正ベクトルの補正法を組み合わせた方法が用いられる。ただし、前節との相違点として、目的関数が、未知張力係数 ϕ に加え、座標 x_J 、節点変位 δx および A_P の関数になっているので、以下の修正が必要になる。

目的関数の最小化の繰り返し過程で、 ϕ および A_P の近似解に対応した x_J および δx の値を計算せねばならない。そこで、式(3.14)および式(3.22)を厳密に解く代わりに、各繰り返し過程で部材長さは大きく変化しないとして、式(3.14)等の荷重 P_R を計算するための部材長さにはその時点で得られている近似値を用い、荷重 P_R を A_P のみの関数と考える。このように、式(3.14)を近似的に扱い、近似解 x_J と荷重 P_R の近似値を用いて、部材の非抗圧性を考慮した厳密な有限変位解析法¹⁾により δx を計算する。式(3.22)は、近似解に対する修正ベクトルの決定に用いる。また、各繰り返し過程で、制約条件式(3.19)に含まれる一部の変数を固定して、部材特性 A_P のみに関する制約条件とみる。式(3.19)に含まれる完成状態の張力係数や部材長さ、および部材弾性伸び等は、その時点で得られている値を用いる。

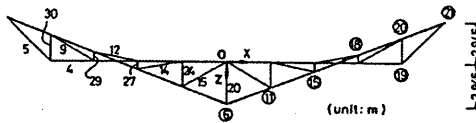
この問題に関する解法の詳細は、参考文献4)に述べられている。

3.4 形状決定問題の数値計算例

ケーブル構造の形状決定解析の具体的な応用例として、対角型ケーブルネットの計算例を紹介する³⁾⁴⁾。解析モデルの目標形状を図3.2に示した。



(a) Plan



(b) Elevation

図 3.2: 対角型ケーブルネットの目標形状

計算例 1)

まず, 3.2 節に述べた最適化手法による³⁾計算例を示す. 解析モデルの目標形状の座標と荷重を表 3.1 の左半分に示す. この目標形状では周辺上にない節点の z 座標値をすべて 0 としている. これは明らかに外力とつり合い得ない形状であるが, 解析の汎用性を示すため極端な例を扱っている. このモデルについて, 以下の 2 通りの計算を行なう.

(1) 計算例 1-1: 条件 S-1, S-2, D-1 および押さえ部材 (No.16~No.30) にのみ D-3 を課する. すなわち, 部材 No.16~No.20 に対しては $T_0 = 2.5$ ton, 部材 No.21~No.30 に対しては $T_0 = 5.0$ ton を目標張力とする.

(2) 計算例 1-2: 計算例 1-1 の条件に加え, 主吊材にも D-3 を課する. すなわち, 部材 No.1~No.15 に対し $T_0 = 10$ ton を目標張力とする.

これらの計算例の主目的は条件 D-3 がつり合い状態に及ぼす影響を見ることにある. なお, 式 (3.8) の Q_R および Q_ϕ の部材として, $q_{Rj} = 1$ m ($j = 1, \dots, f$) および $q_{\phi m} = 1$ ton/m ($m = 1, \dots, M$) を設定する. また, 表 3.2 の左半分に初期値として用いた部材力と, これに対応する張力係数 ϕ_0 を示す. これらの値は上記のように設定された目標値でもある.

これらの計算例で得られた完成形状とその節点座標を, それぞれ図 3.3 と表 3.1 の右半分に, また, 最適値 ϕ_m とそれに対応する部材力を表 3.2 の右半分に示す.

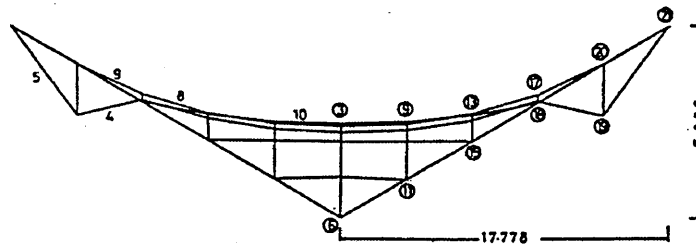
計算例 1-1 では, 完成形状は目標形状とかなりよく似通ったものになっているが, 主吊材の部材力には何らの制約条件を課していないため, 表 3.2 に示したように部材 No.1~No.5 には過小な張力が, No.13, No.14 には過大な張力が発生するという結果を招いている.

一方, 計算例 1-2 では, 全部材に目標張力を設定したから, 部材力はすべて目標値に近いものになっているが, 形状は目標値からかなりかけ離れている.

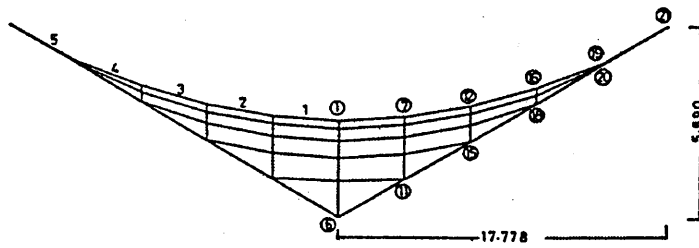
表 3.2 の下段にそれぞれの例について $\|R\|^2$ と $\|(\phi - \phi_0)\|^2$ の値を示す。目的関数を構成するこれらの自乗和が、形状条件 D-1 と部材力条件 D-3 をよく表現するものであることがこれらの数値例から理解できる。

表 3.1: 解析モデルの目標形状および完成形状 (計算例 1)

節点	荷重 (t)	目標形状 (m)			完成形状 (1-1) (m)			完成形状 (1-2) (m)		
		x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	0.125	0	0	0	0	0	-0.061	0	0	-0.081
2	0.252	3.536	0	0	3.520	0	0.200	3.512	0	0.192
3	0.254	7.071	0	0	7.018	0	0.567	7.014	0	0.582
4	0.256	10.707	0	0	10.589	0	1.098	10.591	0	1.143
5	0.259	14.142	0	0	14.044	0	1.779	13.968	0	1.880
6	0	17.778	0	2.946	17.778	0	2.946	17.778	0	2.946
7	0.251	0	3.536	0	0	3.463	-0.174	0	3.444	-0.194
8	0.503	3.536	3.536	0	3.523	3.494	0.080	3.514	3.468	0.073
9	0.508	7.071	3.536	0	7.019	3.537	0.440	7.021	3.506	0.454
10	0.515	10.707	3.536	0	10.573	3.553	0.970	10.592	3.516	1.000
11	0	14.142	3.536	1.768	14.142	3.536	1.768	14.142	3.536	1.768
12	0.252	0	7.071	0	0	6.919	-0.512	0	6.875	-0.528
13	0.506	3.536	7.071	0	3.531	6.968	-0.275	3.520	6.929	-0.281
14	0.510	7.071	7.071	0	7.041	7.037	0.066	7.043	7.021	0.072
15	0	10.707	7.071	0.589	10.707	7.071	0.589	10.707	7.071	0.589
16	0.255	0	10.707	0	0	10.412	-1.079	0	10.375	-1.090
17	0.510	3.536	10.707	0	3.534	10.483	-0.877	3.523	10.466	-0.883
18	0	7.071	10.707	-0.589	7.071	10.707	-0.589	7.071	10.707	-0.589
19	0.259	0	14.142	0	0	13.644	-1.803	0	13.635	-1.810
20	0	3.536	14.142	-1.768	3.536	14.142	-1.768	3.536	14.142	-1.768
21	0	0	17.778	-2.946	0	17.778	-2.946	0	17.778	-2.946



(a) 解 (1-1)



(b) 解 (1-2)

図 3.3: 対角型ケーブルネットの完成形状 (計算例 1)

表 3.2: 部材力の目標値と解 (計算例 1)

部材 番号	目標値		解 (1-1)		解 (1-2)	
	ϕ_{0m}	T_{0m}	ϕ_m	T_m	ϕ_m	T_m
	(t/m)	(t)	(t/m)	(t)	(t/m)	(t)
1	2.828	10.0	10^{-5}	3.6×10^{-5}	2.659	9.351
2	2.829	10.0	10^{-5}	3.5×10^{-5}	2.693	9.366
3	2.750	10.0	10^{-5}	3.5×10^{-5}	2.665	9.396
4	2.911	10.0	10^{-5}	3.6×10^{-5}	2.873	9.430
5	2.137	10.0	10^{-5}	4.6×10^{-5}	2.073	8.863
6	2.828	10.0	3.133	11.240	2.735	9.671
7	2.829	10.0	3.183	11.276	2.777	9.702
8	2.750	10.0	3.266	11.391	2.749	9.755
9	2.588	10.0	3.073	11.406	2.580	9.660
10	2.828	10.0	9.206	33.048	2.830	10.085
11	2.829	10.0	9.408	33.158	2.884	10.168
12	2.715	10.0	9.202	33.324	2.798	10.352
13	2.828	10.0	116.48	413.95	2.882	10.295
14	2.790	10.0	117.68	413.93	2.952	10.414
15	2.529	10.0	5.111	18.143	2.620	9.312
16	0.707	2.5	0.756	2.638	0.689	2.438
17	0.707	2.5	0.722	2.573	0.694	2.424
18	0.688	2.5	0.687	2.539	0.675	2.397
19	0.728	2.5	0.916	3.035	0.699	2.339
20	0.534	2.5	0.330	1.363	0.335	1.390
21	1.414	5.0	1.437	5.045	1.410	4.998
22	1.414	5.0	1.412	5.017	1.430	5.001
23	1.375	5.0	1.377	5.085	1.396	4.976
24	1.414	5.0	1.271	4.613	1.252	4.617
25	1.414	5.0	1.417	5.013	1.449	5.154
26	1.414	5.0	1.407	4.969	1.478	5.197
27	1.357	5.0	1.363	5.081	1.420	5.251
28	1.414	5.0	1.343	4.803	1.489	5.292
29	1.395	5.0	1.436	5.041	1.510	5.345
30	1.265	5.0	0.162	0.630	1.366	4.874
$\ \mathbf{R}\ ^2$		(m^2)	5.209		12.256	
$\ (\phi - \phi_0)\ ^2$		(t^2/m^2)	1.303		0.160	

計算例 2)

つぎに、3.3 節に述べた拡張最適化手法による⁴⁾計算例を示す。解析モデルは計算例 1) と同じ対角型ケーブルネット (図 3.2) を用いる。目標形状の座標と荷重は、表 3.1 の左半分に示したものと同じで、ここでは、後載荷重による変形を制御して完成形状に加え部材断面積を決定する。

表 3.3 および表 3.4 の最左欄にそれぞれ、部材重量を除く固定荷重 P_C 、目標形状の節点座標および目標張力等の値を示す。これらの値は、計算例 1) の固定荷重、目標形状および目標張力の値そのものである。また、部材重量による固定荷重 P_R を、各部材重量の 1/2 づつその部材の両端の節点の z 方向に作用するよう設定している。後載荷重 P_L として、 P_C の 1/2 を使い、部材特性には、主吊材 (No.1 ~ No.15) と押え材 (No.16 ~ No.30) の 2 種類をとり、望ましい領域の大きさを

$$q_{Rj} = 1 \text{ m } (j = 1, \dots, f) \quad q_{\phi m} = 1 \text{ ton/m } (m = 1, \dots, M)$$

$$q_{xj} = 0.05 \text{ m } (j = 1, \dots, f) \quad q_{Am} = 10^{-3} \text{ m}^3 (m = 1, \dots, M_T)$$

を設定する ($f = 35, M = 30, M_T = 30$)。ここで、 $q_{Rj}, q_{\phi m}$ 等は、望ましい領域を表すものと等価であることが文献 4) に示されている。したがって、本計算例の完成状態の形状および部材力に対する設計上の制約条件は、計算例 1) のケース 1-2 と同じものになる。ただし、本計算例の固定荷重には、計算例 1) の固定荷重

表 3.3: 解析モデルの目標形状および完成形状 (計算例 2)

節点	P_C (t)	目標形状 (m)			完成形状 (m)			節点変位 (m)		
		x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	0.125	0	0	0	0	0	-0.058	0	0	0.011
2	0.252	3.536	0	0	3.511	0	0.213	-0.003	0	0.040
3	0.254	7.071	0	0	7.015	0	0.600	-0.004	0	0.035
4	0.256	10.707	0	0	10.592	0	1.156	-0.003	0	0.023
5	0.259	14.142	0	0	13.972	0	1.886	-0.003	0	0.015
6	0	17.778	0	2.946	17.778	0	2.946	0	0	0
7	0.251	0	3.536	0	0	3.443	-0.172	0	0.001	0.018
8	0.503	3.536	3.536	0	3.514	3.468	0.093	-0.003	0.002	0.038
9	0.508	7.071	3.536	0	7.021	3.505	0.470	-0.003	0.002	0.033
10	0.515	10.707	3.536	0	10.593	3.515	1.010	-0.003	0.001	0.019
11	0	14.142	3.536	1.768	14.142	3.536	1.768	0	0	0
12	0.252	0	7.071	0	0	6.874	-0.510	0	0.002	0.020
13	0.506	3.536	7.071	0	3.520	6.928	-0.266	-0.002	0.003	0.033
14	0.510	7.071	7.071	0	7.044	7.021	0.081	-0.002	0.002	0.022
15	0	10.707	7.071	0.589	10.707	7.071	0.589	0	0	0
16	0.255	0	10.707	0	0	10.374	-1.079	0	0.003	0.019
17	0.510	3.536	10.707	0	3.523	10.465	-0.876	-0.001	0.003	0.019
18	0	7.071	10.707	-0.589	7.071	10.707	-0.589	0	0	0
19	0.259	0	14.142	0	0	13.635	-1.806	0	0.003	0.015
20	0	3.536	14.142	-1.768	3.536	14.142	-1.768	0	0	0
21	0	0	17.778	-2.945	0	17.778	-2.946	0	0	0

表 3.4: 部材力の目標値と解 (計算例 2)

部材 番号	目標値		完成状態		変形状態の 部材力 (t)
	ϕ_{0m} (t/m)	T_{0m} (t)	ϕ_m (t/m)	T_m (t)	
1	2.828	10.0	2.826	9.732	11.033
2	2.829	10.0	2.827	9.744	11.063
3	2.750	10.0	2.748	9.751	11.079
4	2.911	10.0	2.910	9.734	11.107
5	2.137	10.0	2.136	9.185	10.630
6	2.828	10.0	2.826	9.832	12.534
7	2.829	10.0	2.828	9.852	12.573
8	2.750	10.0	2.750	9.884	12.645
9	2.588	10.0	2.589	9.801	12.637
10	2.828	10.0	2.827	9.935	12.473
11	2.829	10.0	2.829	10.030	12.578
12	2.715	10.0	2.716	10.194	12.768
13	2.828	10.0	2.828	9.971	11.807
14	2.790	10.0	2.791	10.021	11.881
15	2.529	10.0	2.530	8.894	9.936
16	0.707	2.5	0.709	2.454	1.745
17	0.707	2.5	0.708	2.471	1.760
18	0.688	2.5	0.689	2.452	1.727
19	0.728	2.5	0.729	2.484	1.752
20	0.534	2.5	0.534	2.046	1.246
21	1.414	5.0	1.415	4.958	4.201
22	1.414	5.0	1.415	4.944	4.174
23	1.375	5.0	1.376	4.931	4.144
24	1.414	5.0	1.295	4.643	3.775
25	1.414	5.0	1.415	4.973	4.307
26	1.414	5.0	1.416	4.989	4.320
27	1.357	5.0	1.359	4.993	4.433
28	1.414	5.0	1.415	4.977	4.433
29	1.395	5.0	1.397	4.968	4.412
30	1.265	5.0	1.266	4.540	4.194

に加え部材重量による固定荷重が考慮されている。さらに、設計上の制約条件として、後載荷重による変位および部材総重量に対する制約条件も考慮されている。

これらの計算例で得られた完成形状の節点座標および部材力の値を、表 3.3 および表 3.4 の中欄に、後載荷重による節点変位およびその状態の部材力の値を表 3.3 および表 3.4 の右欄に示す。部材特性の断面積 A_p の解を表 3.5 に示す。すなわち、この問題の場合、この断面積を用いることにより最も剛性の高い構造が実現されることになる。図 3.4 は、完成形状と後載荷重による変形状態を示す。

表 3.3 に示す完成形状は、計算例 1-2 で得られた完成形状とかなりよく一致していることがわかる。これらの間に生じたわずかな差は、本計算では節点変位や部材総重量に対する制約条件をも考慮したことによるものである。表 3.3 および表 3.4 より、後載荷重による変位や変形後の部材力に関しても、設定した設計上の制約条件を満足していることがわかる。

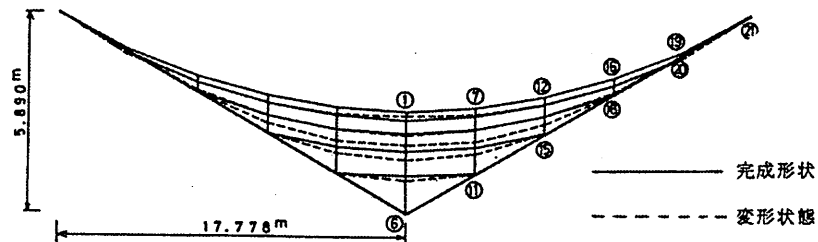


図 3.4: 対角型ケーブルネットの完成形状と変形状態 (計算例 2)

表 3.5: 部材特性の断面積の初期値と解 (計算例 2)

	初期値 (m ²)	解 (m ²)
主吊材 1 ~ 15	2.0×10^{-4}	2.61×10^{-4}
押え材 16 ~ 30	1.0×10^{-4}	1.14×10^{-4}

参考文献

- 1) 波田凱夫, 中西 宏: 吊構造の形状決定解析に関する一考察, 建築学会論文報告集, 第 212 号, pp.13-23, 1973.
- 2) 中西 宏, 波田凱夫: 吊構造の形状決定解析に関する一計算手法について, 建築学会論文報告集, 第 224 号, pp.31-39, 1974.
- 3) 中西 宏, 波田凱夫: 最適値問題の手法による吊構造の形状決定解析, 建築学会論文報告集, 第 224 号, pp.13-23, 1974.
- 4) Namita, Y. and Nakanishi, H: Optimum design analysis of structural cable networks, Proc. of JSCE, No.432/I-16, pp.21-30, 1991.
- 5) 阿井正博, 西岡 隆, 奥村敏恵: ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, 第 260 号, pp.17-32, 1977.
- 6) 山田善一ほか: 斜張橋ケーブルの最適プレストレス量決定に関する研究, 土木学会論文集, 第 356 号 /I-3, pp.415-423, 1985.