

第13章 パイプおよびシェル

13.1 概 説

構造部材としてのパイプは海洋作業台、送電鉄塔、網目状シェル屋根あるいはアーチ橋弦材などの3次元載荷状態にある構造物中において柱として使用される。柱として使用される場合、円筒は最も効率的な形状であるといえる。パイプが水圧鉄管およびパイプラインなどの各種流送管として使用される場合にも一面では構造部材としての役割を有し各種の荷重作用を受ける。

パイプと比較して大きな径長比を有する円筒構造は通常円筒シェルと呼ばれる。径厚比の大きい円筒シェルは薄肉円筒シェルと呼ばれ、ほとんどの場合軸方向、周方向あるいは両方向に補剛して使用される。円筒シェルは穀物貯蔵庫、液体貯蔵庫、圧力容器、潜水艦、航空機胴体、ロケット、屋根構造、あるいは建設工事におけるケーソンなどに用いられる。この他にも化学反応容器や冷却塔などの多くの構造物が円筒または楕円筒、球形シェル、楕円形シェル、円錐形シェル、双曲線回転体シェルなどその他の薄肉および厚肉シェルより構成されている。これらのシェルは軸圧縮、曲げ、ねじり、せん断あるいは外圧などの作用を受け、それらのどの一つの作用によっても、場合によっては内圧によってもまたそれらのどの組合せによっても座屈破壊が生じ得る（図13.1参照）。

シェルの座屈の他の構造のそれとの大きな相違は、一般に後座屈強度の著しい低下（図13.2参照）およびそれに起因する幾何学的不完全性や残留応力などの初期不整に対する敏感性にあるといえる。この点は薄肉シェルの場合に特に顕著であり、薄肉シェルの設計に際しては座屈問題の検討が重要となる。その際、冷却塔が偏圧により座屈崩壊した事例が示すように、作用荷重についても十分配慮することが必要である。

本章においては、シェル構造の中でも最も代表的でまた最も広く使用されている円筒パイプおよび円筒シェルを主な対象として、各種荷重下における静的弾性座屈強度について述べる。補剛円筒シェルの座屈および非弾性

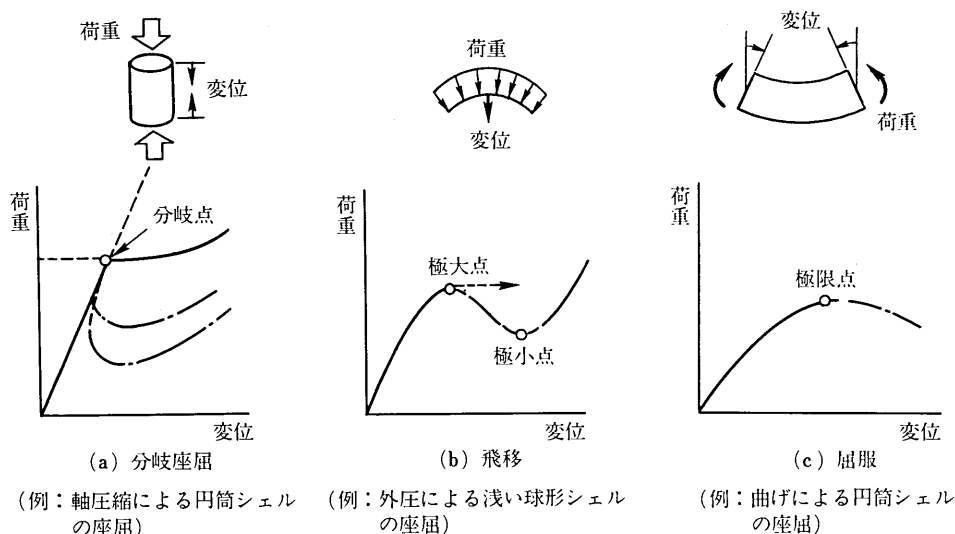


図13.1 シェルの座屈様式の分類^{13.2)}

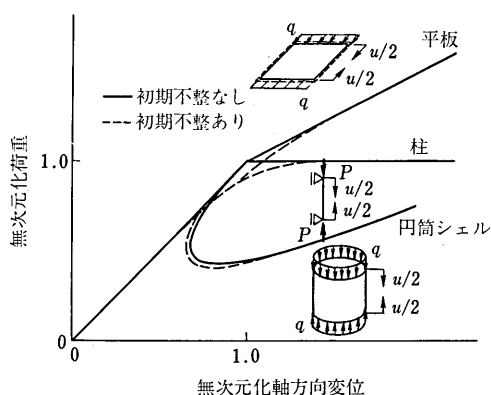


図 13.2 シェルおよびその他の構造の軸圧縮下における後座屈挙動の比較模式図^{13.5)}

座屈についても若干触れるが、動的座屈やクリープ座屈など時間に依存する現象についてはここでは取り扱わない。リングの座屈についてはアーチの章で扱っている。

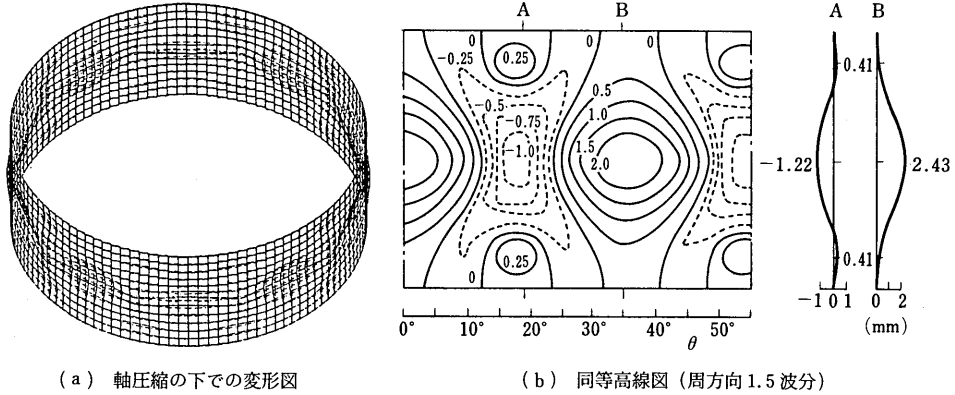
なお、シェルの座屈に関する総論としては文献 13.1), 13.2) などがあり、前者には 1960 年頃までの研究成果が詳細にまとめられている。また、文献 13.3) には 1970 頃までの研究成果を含めて、各種シェルの各種荷重下での座屈強度が詳しく図表にまとめられている。さらに、その後の成果を含めて主として米国の研究成果を下に、より具体的な設計を念頭においてシェルの座屈を論じたものに文献 13.4) がある。また、最近の欧州における同様の成果をまとめたものが文献 13.5) として発表されている。この文献には補剛円筒シェルに関しての研究成果が収録されている。これらはシェルの座屈に関して論じた膨大な資料の一部であるが、代表的なものとして取り上げた。

13.2 パイプおよび円筒シェルの座屈

13.2.1 座屈挙動総論および記号の規約

薄肉壁を有するパイプおよびシェル部材の座屈は前述したように幾つかの異なった様式で生じ得る。したがって、それぞれの座屈様式において座屈に至るまでの過程や座屈後の挙動を知ることが座屈設計を行う上で重要である。たとえば、円筒シェルが軸圧縮の作用を受ける場合、形状寸法比および両端縁支持条件によっては軸方向並びに周方向に幾つかの異なった波長を有するいわゆるダイヤモンド形の座屈波形（図 13.3 参照）が生じ得る。また薄肉シェルは一般に補剛されて使用されるので、補剛材の寸法、間隔、位置などが新たなパラメータとなる。作用荷重の種類・組合せも重要な因子である。本章では主として弾性座屈を扱うが、厚肉シェルや高温下の材料を取り扱う場合など実際問題としては材料の非弾性特性が座屈強度に大きな影響を及ぼす場合も少なくない。さらに、局部座屈と全体座屈の連成の可能性も考慮に入れておかなければならない。

以上の因子については、それらの座屈強度へ及ぼす影響は比較的明らかであり、設計に反映させることも容易である場合が多い。したがって、初期不整にそれほど敏感ではない厚肉パイプ部材の場合、比較的高い信頼性を有する座屈設計公式を得ることができる。しかし、薄肉シェルの座屈強度に及ぼす初期不整の影響は、初期不整が現実の構造物には不可避でありかつその影響が大きいにもかかわらず、現実の複雑な初期不整の定量的な評価の難しさもあって、必ずしも明瞭にはされていない。このため、薄肉シェル実構造物に対する座屈強度設計公式を確立することも困難になっている。

図 13.3 ダイヤモンド形座屈波形^{13.7)}

本節では初期不整のない完全円筒形状のパイプおよびシェルのみを扱う。初期不整の影響については13.3節において述べる。本節における記号の規約を図13.4に示す。

また、ここで対象とする端縁境界条件は表13.1に示す通りである。ただし、 u 、 v 、 w はそれぞれ、座屈時における x 、 y 、 z 座標方向の変位増分である。これらが自由とは、対応する断面力成分の座標時における増分が0であることを意味している。

なお、円筒シェルの座屈解析における支配方程式としては、Donnellの式^{13.8)}とFlüggeの式^{13.9)}が用いられる場合が多い^{13.10)}。前者は取り扱いが簡単であるが、扁平シェル近似に基づいたわみが面内変位成分に比し十分大きいことを前提としているため、円筒シェルが細長くかつ周方向波数が少ない場合には大きな誤差を伴う。これに対して後者は比較的厳密でありより広い範囲にわたる形状係数 $Z = \sqrt{1-\nu^2} \cdot L^2/Rt$ に対して適用可能である。形状係数 Z は、径長比の自乗に対する径厚比の比に比例し、Batdorfの曲率パラメータと呼ばれる。

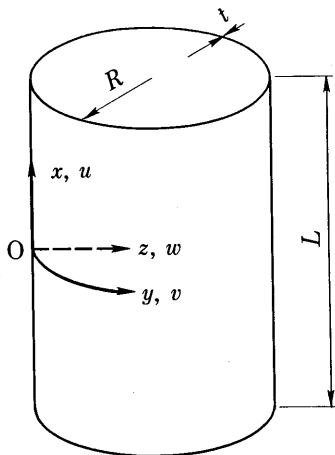


図 13.4 記号の規約

E : 縦弾性係数

ν : ポアソン比

$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$: 板の曲げ剛性

L : 円筒の長さ

R : 円筒半径 (肉厚中心まで)

t : 肉厚

x, y, z : 軸, 周, 半径方向座標

u, v, w : x, y, z 座標に関する座屈時増分変位

m : 軸方向座屈波数 $\times 2$ (半波数)

n : 周方向座屈波数

$\sigma_{ct} = (1/\sqrt{3(1-\nu^2)}) \cdot Et/R$: 古典理論軸圧縮座屈強度

$Z = \sqrt{1-\nu^2} \cdot L^2/Rt$

$= \sqrt{1-\nu^2} (R/t)/(R/L)^2$
: 形状係数 (Batdorf パラメータ)

Σ : 座屈応力の古典理論座屈応力に対する比

μ : 周方向座屈波数の古典理論周方向座屈波数に対する比

表 13.1 対象とする端縁境界条件 (図 13.4 参照)

分類 記号	面外拘束条件	面内拘束条件		分類 記号	面外拘束条件	面内拘束条件	
		(軸方向)	(周方向)			(軸方向)	(周方向)
C 1	$w=\partial w/\partial x=0$	$u=0$	$v=0$	S 1	$w=0, \partial w/\partial x$: 自由	$u=0$	$v=0$
C 2	"	u : 自由	"	S 2	"	u : 自由	"
C 3	"	$u=0$	v : 自由	S 3	"	$u=0$	v : 自由
C 4	"	u : 自由	"	S 4	"	u : 自由	"
F 1	$w, \partial w/\partial x$: 自由	$u=0$	v : 自由	注) 記号 C, S, F は面外拘束条件が固定, 単純支持, 自由であることを表わす。			
F 2	"	u : 自由	"				

13.2.2 軸圧縮力による座屈

薄肉シェル構造物の座屈強度評価上最も基本的な弾性完全円筒パイプおよびシェルの軸圧縮力による座屈強度は表 13.1 の境界条件の下で八巻ら^{3.11)}によりほぼ完全に明らかにされており, その結果は座屈強度, 座屈波数—形状係数曲線として図 13.5 のようにまとめられている。ここに Σ および μ はそれぞれ座屈強度 σ_{scr} および周方向座屈波数 n_{cr} の対応する古典理論値 σ_{cl} , n_{cl} に対する比である。

古典理論値は, 微小変位理論に基づき, また座屈前における変形を無視して, 表 13.1 における S2 の境界条件の下で求められ, 径長比にはよらず径厚比のみによって次式のように与えられる (図 13.4 参照)。

$$\sigma_{cl} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot E \cdot \frac{t}{R} \quad (13.1 a)$$

$$n_{cl} = \sqrt[4]{(3/4)(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{R/t} \quad (13.1 b)$$

この結果を基に以下若干説明を加える。

(1) 柱としての座屈

形状係数 Z が各境界条件ごとに定まるある値 Z_u (表 13.3 参照) より大きな長い円筒シェルにおいては座屈様式は急に Flugge 形 (径長比 R/L の減少と共に円周方向座屈波数 n および座屈強度 σ_{scr} の減少を伴う座屈様式) に移行し, 座屈強度比 Σ の値は $\Lambda = \sqrt{Z} \cdot t/R$ の増加と共に波状の変化を繰り返しながら減少し, 同時に座屈波数 n (一般に 4 より小) も逐次減少して 1 に至るが, $n=1$ の場合の座屈強度は両端固定または単純支持の長柱の座屈強度に一致する。すなわち, 極端に長い円筒シェルは座屈に際して境界における周方向変位を拘束する場合には両端固定の長柱として, 拘束しない場合には両端単純支持の長柱として座屈する。これらの関係の適用範囲は前者では $Z \geq 64 \sqrt{1-\nu^2} (R/t)^2$, 後者では $Z \geq 16 \sqrt{1-\nu^2} (R/t)^2$ としてよい。

なお, 非弾性座屈を考える場合には, 円形パイプの柱座屈に対する有効長さを KL とし, 無次元化細長比 $\lambda = (KL/R) \cdot (1/\pi) \cdot \sqrt{\sigma_y/E}$ を用いて, 第 5 章で述べた方法により評価する。詳細については第 5 章を参照されたい。

(2) シェルとしての座屈

“シェルとしての座屈” または “局部座屈” は主として断面の形状変化を伴う座屈をいうが, その現れ方には図 13.6 に示すように非常に多くの様式がある。短かい円筒シェルの座屈強度は L/t および R/t の双方に影響されるが, 長いシェルの場合は R/t のみに支配される。図 13.5 は Flugge 形の式に基づく結果であるが, 各境界条件に対し, Z の値が表 13.2 中に示す Z_p の値より小さい領域では, Donnell 形の式による結果とほぼ一致する^{13.10)}。 Z が十分大きい領域での境界条件の影響は, S2, S4 の場合, すなわち面外単純支持, かつ座屈時の面内変位増分に関し軸方向変位自由の条件の下では座屈強度が式 (13.1 a) の古典理論値に比し約 50 % となる。その他の境界条件の場合には古典理論値に対し概ね 0.83~0.927^{13.12)} の間のそれぞれほぼ一定の座屈強度とな

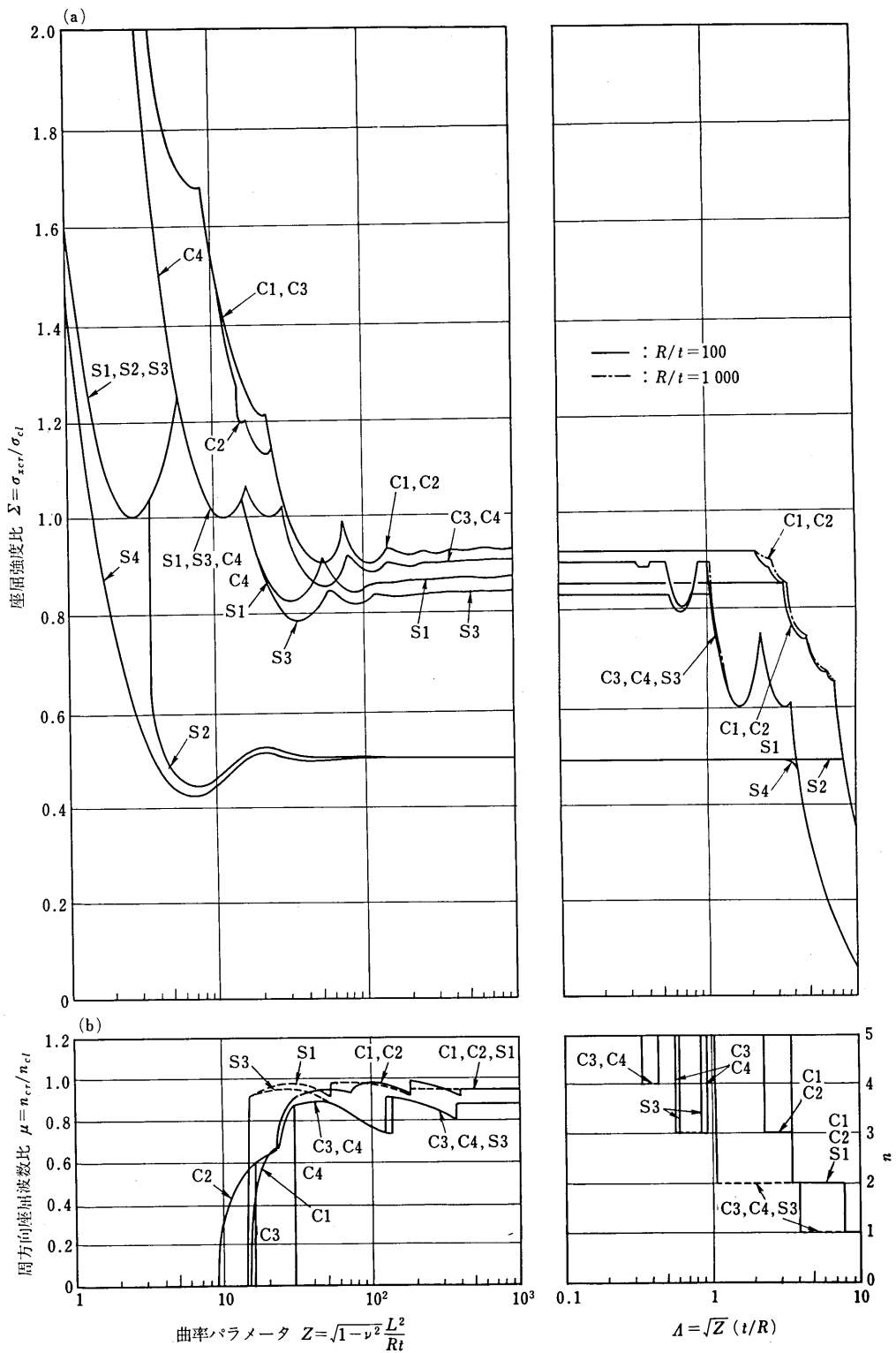


図13.5 軸圧縮による完全円筒パイプ・シェルの弾性座屈強度^[3,11)] (表13.1および図13.4参照)

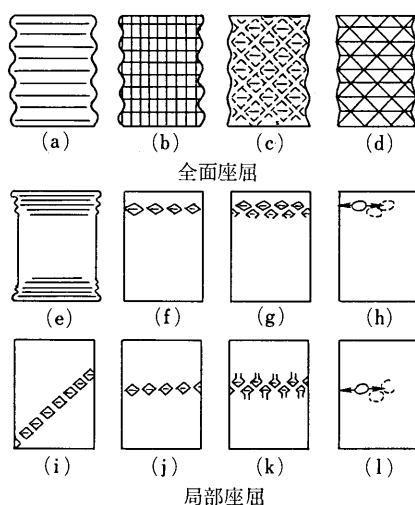
表 13.2 Donnell 式と Flügge 式による結果が一致する Z 値の上限値 $Z_p^{13,10)}$

境界条件	C 1	C 2	C 3	C 4	S 1	S 2	S 3	S 4
$\frac{Z_p}{\sqrt{1-\nu^2}}$	100	32	32	10	10	30	2.6	30

表 13.3 各境界条件下での座屈強度比 Σ の収束値およびその収束域
($Z_l < Z < Z_u; \nu=0.3$)^{3,11)}

境界条件	Σ	Z_l	$Z_u(R/\Delta t)^2$
C 1, C 2	0.92	400	4.0
C 3, C 4	0.90	400	0.1
S 1	0.85	400	10
S 2	0.50	40	60
S 3	0.83	400	0.32
S 4	0.50	40	15

$$\Sigma = \sigma_{xcr} / \sigma_{cl}$$

図 13.6 軸圧縮によるシェルとしての座屈波形の種類^{13,13)}

る。この領域すなわち Z が表 13.3 中の Z_l と Z_u に関して $Z_l < Z < Z_u$ の間にある比較的長い円筒シェルにおいては、座屈波形は荷重端より約 $15\sqrt{Rt}$ の狭い範囲内で急激な変化を示し、それより中心側においてはほぼ一定となるかまたはほとんど生じないことが計算結果からわかっている。各境界条件に対する Z_l および Z_u の値と共に Σ の収束値を表 13.3 に示す^{13,11)}。

(3) 無限帯板としての座屈

$Z < Z_l$ の領域では Z の値の減少と共に若干波を打ちつつも全体として座屈強度比は上昇する。さらに Z の値の小さくなった $Z < 1$ の極端に短い円筒シェルの座屈強度は境界で固定か単純支持かによって定まり、その大きさ σ_{xcr} は円筒シェルの高さ L を幅とする厚さ t の無限帯板が幅方向に圧縮されるときに圧縮座屈強度にほとんど一致する。無限帯板の幅方向圧縮強度は次式で与えられる。ただし、 D は板の曲げ剛性である。

$$\sigma_{xcr} = k_{xcr} \cdot \frac{\pi^2 D}{L^2 t} \quad (13.2a), \quad k_{xcr} = \begin{cases} 4 : \text{C 1} \sim \text{C 4} \text{ に対して} \\ 1 : \text{S 1} \sim \text{S 4} \text{ に対して} \end{cases} \quad (13.2b)$$

なお、 $Z < 2.85$ の領域での理論座屈強度 σ_{xcr} は上式において k_{xcr} の値を次のように置き換えて得られる^{13,4)}。

$Z < 2.85$ に対して,

$$k_{xcr} = \begin{cases} 4 + 3Z^2/\pi^4 : C1 \sim C4 \text{ に対して} \\ 1 + 12Z^2/\pi^4 : S1 \sim S4 \text{ に対して} \end{cases} \quad (13.3)$$

(4) シェルとしての非弾性座屈

円筒シェルの非弾性座屈強度は通常次の2つの方法のいずれかの方法で決定される。1つは弾性係数を有効係数で置き換える方法であり、他の1つは個々の材料に対して示された実験式による方法である。前者では通常塑性補正係数 $\eta = \sqrt{E_s E_t} / E$ を導入し、弾性座屈式の E を ηE に置き換える。ただし、 E_s , E_t はそれぞれ割線弾性係数および接線弾性係数であり、したがって繰り返し計算が必要となる。後者の例としては、応力—ひずみ関係が Ramberg-Osgood-Hill の式^{注1)}を満足する材料を対象とした次式がある^{13.14)}。

$$\sigma_{xc} = B_t - D_t \sqrt{\frac{R}{t}} \quad (13.4a)$$

ここに,

$$B_t = \sigma_2 \left\{ 1 + 4.6 \left(\frac{1000 \sigma_2}{E} \right)^{0.2} \cdot \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} - 1 \right) \right\} \quad (13.4b)$$

$$D_t = \frac{B_t}{0.9} \left(\frac{B_t}{E} \right)^{1/3} \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - 1} \quad (13.4c)$$

ただし、 σ_1 , σ_2 はそれぞれ 0.1%, 0.2% オフセット圧縮降伏応力であり、 $\sigma_2/\sigma_1 \leq 1.06$ とする。一方明瞭な降伏点を有する鋼材に対しては図 13.7 のような曲線が得られている^{13.4)}。このうち、製造管に関して最も一般的に使用されているのは以下の Plantema の式である。

$$\frac{\sigma_{xc}}{\sigma_Y} = \begin{cases} 1.0 & : \alpha \geq 8 \text{ に対して} \\ 0.75 + 0.031 \alpha & : 2.5 \leq \alpha < 8 \text{ に対して} \\ 0.33 \alpha & : \alpha \leq 2.5 \text{ に対して} \end{cases} \quad (13.5a)$$

ここに、 α は無次元化局部座屈パラメータで、円形パイプに対しては次式で与えられる。

$$\alpha = (E/\sigma_Y) \cdot (t/2R) \quad (13.5b)$$

わが国の道路橋示方書^{13.15)}においては局部座屈を考慮しない耐荷力曲線の式が次式で与えられている。

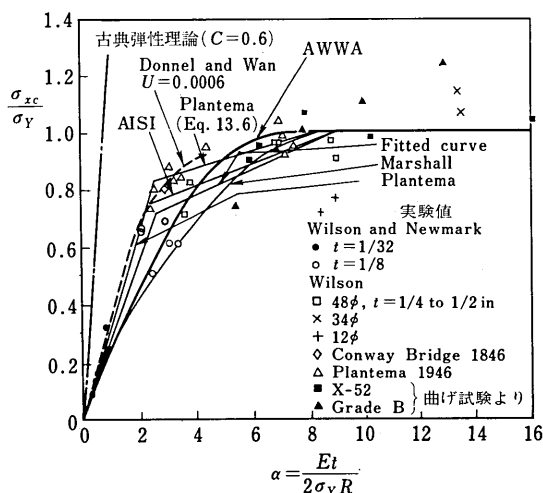


図 13.7 明瞭な降伏点を有する鋼材の局部座屈強度曲線^{13.4)}

注 1) $\epsilon = \sigma/E + 0.002(\sigma/\sigma_Y)^n$, $n = 0.301/\log_{10}(\sigma_2/\sigma_1)$

$$\sigma_{xc}/\sigma_y = \begin{cases} 1.0 & : \bar{\lambda} \leq 0.2 \text{ に対して} \\ 1.109 - 0.545 \bar{\lambda} & : 0.2 < \bar{\lambda} \leq 1.0 \text{ に対して} \\ 1.0/(0.773 + \bar{\lambda}^2) & : 1.0 < \bar{\lambda} \text{ に対して} \end{cases} \quad (13.6a)$$

ここに,

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \cdot \frac{L}{r} \quad (13.6b)$$

であり, r は断面二次半径である. 上式は式 (13.5) と類似しているが, 式 (13.5) が局部塑性座屈に対する式であるのに対して, 式 (13.6) は全体塑性座屈に対する式である.

(5) 連成座屈

局部座屈と柱座屈とがほぼ同時に生じ得るような場合の一つの設計方法は, 両者に対する座屈耐荷力のうちの低い方の荷重を基準荷重とする道路橋示方書で採用している方法である. これに対し Marshall^{13,16)} は次のような考え方を推奨している. すなわち, 局部座屈が生じないときの座屈耐荷力曲線に (局部座屈から定まる座屈強度)/ (全断面降伏荷重) を乗じて座屈耐荷力を低減する方法である. 別の表現をすれば, 柱座屈の耐荷力曲線における全断面降伏強度を局部座屈強度に置き換える方法である.

13.2.3 セン断力による座屈

波浪荷重を受ける海洋構造物や地震荷重を受けるタンクの設計をする場合などにおいて基本的に考慮する必要のある問題であるが, この問題についての情報はあまりない. Schilling^{13,17)} はせん断座屈応力として弾性座屈の場合, ねじり座屈応力の 1.25 倍, 塑性座屈の場合 1.0 倍とすることを推奨している.

13.2.4 曲げモーメントによる座屈

(1) 屈 服

極端に短くはない円筒の場合, 純曲げを受けたときに断面が楕円形に変形することにより曲げ剛性が減少し, 曲率が増大して偏平化が進みついには曲げモーメントが極大値 M_{ku} に達することがある. この極大値すなわち屈服強度は次式で与えられる^{13,18)}.

$$M_{ku} = \beta \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \cdot R t^2; \quad \beta = \frac{2\sqrt{2}}{9} \pi = 0.99 \quad (13.7a), (13.7b)$$

β の値の実験値として平均値 1.14, 最小値 0.72 が示されている. 軸方向と周方向に主軸を有する直交異方性円筒シェルの場合, この関係式は次のようになる.

$$M_{ku} = \frac{4\sqrt{6}}{9} \pi R \sqrt{D_2 \alpha_1} \quad (13.8)$$

ここに, $D_2 = E_y \cdot t^3 / 12(1-\nu^2)$, $\alpha_1 = E_x \cdot t / (1-\nu^2)$ はそれぞれ周方向曲げ剛性および軸方向引張剛性である.

(2) 局 部 座 屈

実際には偏平化による屈服が生ずる前に圧縮側に局部座屈が生ずることが多い. 両端単純支持の薄肉円筒シェルが軸方向に一樣な曲げモーメントを受けるとき, 座屈直前まで断面平面保持の仮定が成り立つものとし, 座屈時変位増分を周方向にフーリエ級数展開して求めた座屈応力度を Lundquist^{13,19)}, Donnell^{13,20)} の実験値と比較して図 13.8 に示す^{13,21)}. この結果は $k=10^{-6}$ (ただし, $k=(1/12) \cdot (t/R)^2$) で $Z \cong 3 \times 10^3$ ($L/R \cong 3.2$) 以下の短い円筒シェルに対する Donnell の線形理論とほぼ一致する.

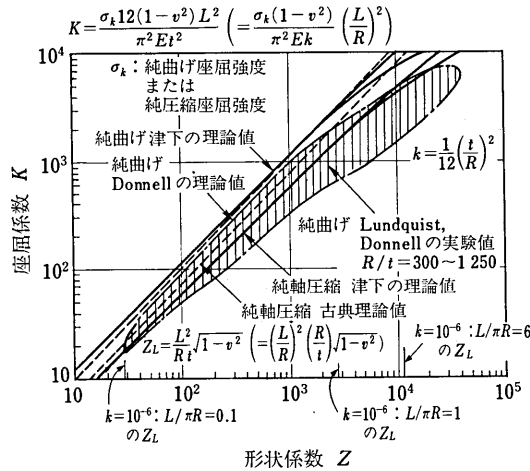


図 13.8 純曲げ局部座屈理論強度と実験値との比較^{13.21)}

Donnell の線形理論の Flugge^{13.22)} による解析結果によれば曲げ座屈の座屈荷重係数 k_{bcr} ($k_{bcr} \equiv \sigma_{bcr} L^2 t / \pi^2 D$;ここに、 σ_{bcr} は曲げ座屈モーメントを M_{cr} とするとき $\sigma_{bcr} \equiv M_{cr} / \pi R^2 t$ である) は軸圧縮座屈の座屈荷重係数 k_{xcr} ($k_{xcr} \equiv \sigma_{xcr} L^2 t / \pi^2 D$) に対しては $k_{bcr} \approx 1.3 k_{xcr}$ の関係があり、このことから曲げ座屈では圧縮側の局部座屈が問題であって、軸圧縮を受ける円筒シェルの座屈強度より、座屈強度を推定できることがわかる。

13.2.5 ねじりモーメントによる座屈

(1) シェルとしての座屈

円筒シェルにねじりが作用する場合には軸圧縮が作用する場合とは異なり、座屈後大幅に強度が低下することなく、初期不整の影響もあまり大きくはない (Schilling^{13.17)} によれば中間の長さの円筒シェルの場合初期不整の影響は実際上高々 15 % 程度である)。したがって線形理論値が実用上はほぼ問題なく使用でき、表 13.1 に示した境界条件のうち F1, F2 を除く 8 種の境界条件の下での座屈強度が八巻ら^{13.23)} により図 13.9 のようにまとめられている。境界条件 C2, C3 および S2, S3 に対する曲線は、それぞれ C1 と C4 および S1 と S4 に対する

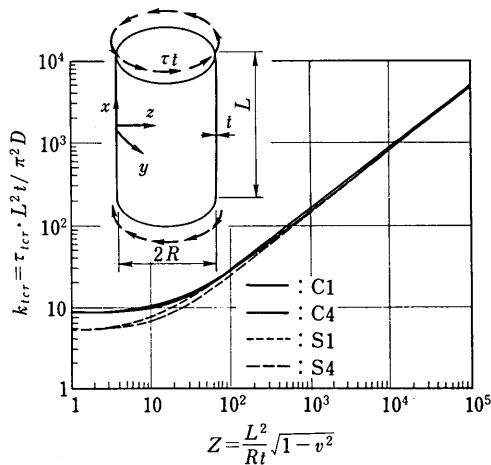


図 13.9 ねじり座屈強度曲線^{13.23)}

曲線で挟まれる。これらの曲線は $100 \leq Z \leq 76.8(1-\nu^2)\left(\frac{R}{t}\right)^2$ の中間的な長さの円筒シェルではほぼ1つの曲線

$$k_{tcr} = 0.85 Z^{3/4} \quad (13.9)$$

になる。ここに、 k_{tcr} ($k_{tcr} \equiv \tau_{tcr} L^2 t / \pi^2 D$; τ_{tcr} はねじりせん断座屈強度) はねじり座屈の座屈荷重係数である。円筒シェルが十分長くなった場合には座屈荷重係数 k_{tcr} は境界条件に無関係に Flugge による漸近値 $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\nu^2} \cdot Z$ に近づくことが計算結果からわかっている。

(2) 無限帯板としての座屈

円筒シェルの半径が無限に大きくなった場合には既知の無限帯板の解に一致する。 $L/R < 5$ の領域では次の実験式がある^{13.1)}。

$$\tau_{tcr} = 0.1 E \frac{t}{R} + k_{tcr} E \left(\frac{t}{L}\right)^2, \quad k_{tcr} = \begin{cases} 9.1 : C1 \sim C4 \text{ に対して} \\ 5.0 : S1 \sim S4 \text{ に対して} \end{cases} \quad (13.10 a), (13.10 b)$$

あるいは、 $Z < 50$ に対して^{13.4)}

$$k_{tcr} = \begin{cases} 8.98 + 0.10 Z : C1 \sim C4 \text{ に対して} \\ 5.35 + 0.213 Z : S1 \sim S4 \text{ に対して} \end{cases} \quad (13.11)$$

(3) シェルとしての非弾性座屈

軸圧縮力による座屈の場合と同様に2通りの決定方法がある。有効係数を用いる方法では $\sigma = 2 \tau_{tcr}$ における割線係数 E_s を (E に代えて) 通常用いるが、せん断応力一ひずみ関係が得られる場合にはさらに E_s に代えて $G_s \cdot E/G$ を用いることができる。

なお、明確な降伏点を有する鋼材に関してはねじりせん断座屈強度 τ_{tc} に対し次式が実験公式として提案されている^{13.17)}

$$\tau_{tc} = \begin{cases} \tau_Y & : \alpha < 1.076 \\ \tau_{tcr} \text{ (弾性座屈強度)} & : \alpha \geq 1.076 \end{cases} ; \quad \alpha = \left(\frac{\tau_Y}{E}\right) \left(\frac{2R}{t}\right)^{5/4} \cdot \left(\frac{L}{2R}\right)^{1/2} \quad (13.12 a), (13.12 b)$$

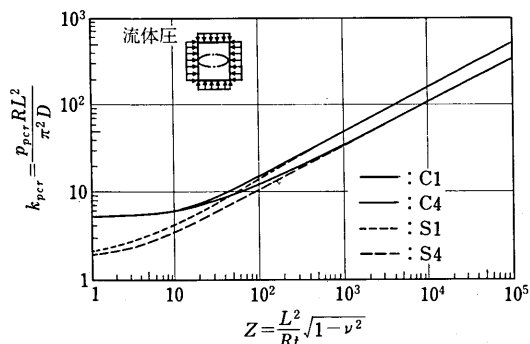
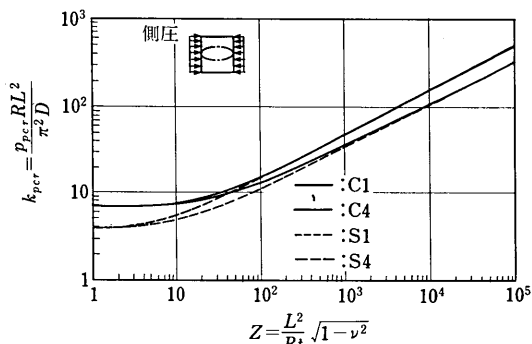
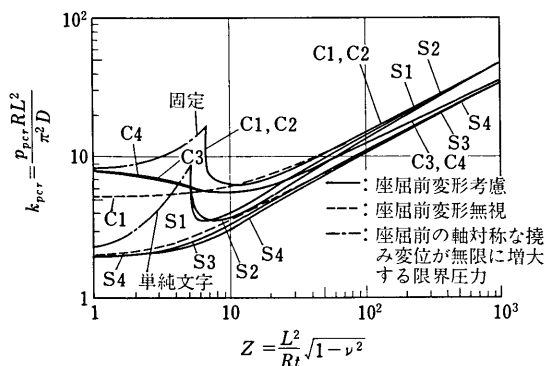
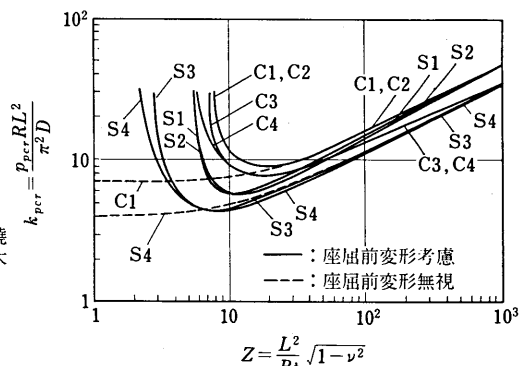
13.2.6 外圧による座屈

外圧を受ける円筒シェルの崩壊挙動は柱のそれに類似しており、柱の細長比 (KL/r) に対応する円筒シェルの薄さ係数は $K_c = (2R/t)^{3/4} \sqrt{(L/2R)(\sigma_Y/E)}$ によって与えられる。大略的には $K_c > 1.2$ では弾性座屈、 $0.8 < K_c < 1.2$ では非弾性座屈、 $K_c < 0.8$ では降伏崩壊が生ずる。

(1) 一様外圧による座屈

ねじり座屈の場合と同様に表 13.1 に示す C1～S4 の8種の境界条件の下での無次元化した座屈強度 (座屈係数) k_{pcr} と形状係数 Z との関係を図 13.10 および図 13.11 に示す^{13.24), 13.25)}。ただし、図 13.10 はバルクヘッドにも圧力が作用する流体圧に対する結果であり、図 13.11 は側面のみに圧力が作用する側圧に対する結果である。また、図 13.10(a) および図 13.11(a) の曲線を $k_{pcr} = a\sqrt{Z}$ とおいたときの a の値を図 13.12 に示す^{13.24)}。なお、文献 13.4) には座屈強度に対する近似式が形状係数の適用範囲を分けて示されている。またそこではヘッドが半球形であって安定な場合には各ヘッドにつき R/n だけ軸長を長くとりとしている。 n はそのような等価な円筒シェルの周方向座屈波数である。

およそ $Z > 200$ においては周方向変位の拘束の有無が支配的となり、周方向変位を拘束したときの座屈強度は拘束しないときのそれより約 50 % 大きい。 $Z \geq 10^3$ では境界条件 C1, C2, S1, S2 に対しては $a = 1.51 \pm 3\%$, C3, C4, S3, S4 に対しては $a = 1.08 \pm 4\%$ とおくことができる。なお、同一の形状係数および境界条件の下

(a) 座屈前変形を無視(Z の小さい領域では誤差が大きい→図(b)参照)(a) 座屈前変形を無視(Z の小さい領域では誤差が大きい→図(b)参照)(b) Z の小さい領域での結果($\nu=0.3$)図 13.10 流体圧による座屈強度^{13.24), 13.25)}(b) Z の小さい領域での結果($\nu=0.3$)図 13.11 側圧による座屈強度^{13.24), 13.25)}

では側圧に対する座屈強度は流体圧に対するそれより常に大きい。流体圧が作用する場合 Z がある値より小さい領域では周方向変位が拘束されているときの座屈強度は無限大となり、座屈が生ずる以前に座屈前変形が無限大となる (図 13.10(b))。このときの耐力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{両端固定の場合} \quad k_{pc} &= 20 + \frac{15}{16} Z_0 - \left(144 - \frac{27}{2} Z_0 + \frac{145}{256} Z_0^2 \right)^{1/2} \\ \text{両端単純支持の場合} \quad k_{pc} &= 2(1 + Z_0) \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

ここに、 $Z_0 = (12/\pi^4) \cdot Z^2$ である。

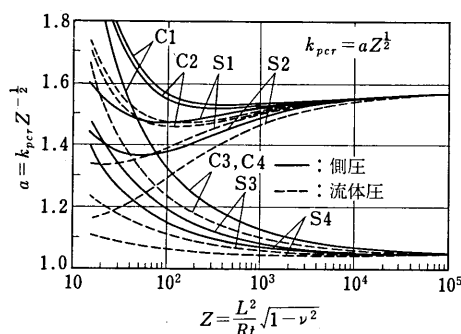
一方、側圧を受ける極く短い円筒シェルでは境界条件に拘わらず座屈を生ずる前に軸対称変形によって降伏破壊する。外圧 p による周方向の圧縮応力は pR/t である。

(2) 直線的に変化する外側圧による座屈

海中貯蔵タンクや土中貯蔵タンクなどにおいてはこのような荷重条件による座屈を考慮する必要がある。この問題に関して植村ら^{13.26)}は軸方向外圧力を考慮する場合としない場合2つのケースについて、両端単純支持の境界条件の下に座屈強度を求めている。これによれば R/L が極端に小さい長い円筒シェルを除いて、座屈強度は平均圧力が均一に作用する場合の座屈強度より数%低くなる。極端に長い円筒シェルの場合は外圧の小さい部分には無関係に外圧の大きい部分が座屈する。

(3) ライナーの座屈

コンクリートタンクや圧力鉄管のライナーあるいは化学プラント用圧力容器内における防食対策として用いら

図 13.12 近似式の係数 a の値 ($\nu=0.3$)^{13.24)}

れる内張り板は、供用時に熱応力、負圧などの作用を受け、外側の構造本体よりの拘束のため、内側にのみ変形し得る特性を有する。このようなシェルの座屈を取り扱った論文に、文献 13.27)、13.28) がある。

13.2.7 組合せ荷重による座屈

実構造物を考えた場合、前項までに述べた単一荷重だけではなく各種荷重が複合的に作用する荷重条件下での座屈が問題となることが多い。この点に関しては未だ十分に説明されていないが、以下に代表的な幾つかの結果を示す。

(1) 非圧力荷重の組合せによる座屈

軸方向力と曲げモーメント、軸方向力とねじりモーメント、軸方向力と曲げモーメントおよびねじりモーメント、曲げモーメントとねじりモーメントなどの非圧力荷重の組合せによる座屈については、弾性域・塑性域に拘わらず適用できる次の簡単な式が Schilling^{13.17)} により提案されている。

$$\frac{\sigma}{\sigma_{xcr}} + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 = 1.0 \quad (13.14)$$

ここに、 σ および τ は組合せ荷重の下で座屈が生ずる際の直応力およびせん断応力であり、 σ_{xcr} は軸圧縮力のみまたは曲げモーメントのみによる座屈強度、また τ_{cr} はせん断力またはねじりモーメントのみによる座屈強度である。

軸力とねじりモーメントが同時に作用する場合の座屈強度および座屈波数の解析結果を図 13.13 に示す^{13.29)}。図中、 $\bar{k}_c$ 、 $\bar{k}_t$ はそれぞれ軸圧縮力、ねじりモーメントが単独に作用して座屈するときの座屈強度により無次元化した組合せ荷重下の座屈時の軸応力およびねじりせん断応力である。また $\bar{\beta}_{1b}$ は軸圧縮による座屈時の周方向波数により無次元化した組合せ荷重による座屈時の周方向波数である。一般に $Z \geq 100$ の比較的長い円筒シェルにおいては、シェルの両端の面外変位に関する境界条件の違いによる座屈強度の差は無視することができ、ここでは C3, C4, S3, S4 の境界条件に対する結果を省略した。図 13.13(a) 中に一点鎖線で示した曲線は式 (13.14) を適用した結果であるが、この場合式 (13.14) は軸圧縮側では危険側、軸引張側では安全側の評価をしていることになる。

(2) 内圧・外圧と非圧力荷重との組合せによる座屈

a) 流体圧・側圧と軸方向力とによる座屈

流体圧と軸方向力、側圧と軸方向力が作用するときの解析結果を図 13.14 および図 13.15 に示す。ただし、 $Z < 100$ の比較的短い円筒シェルに対する結果は座屈前の変形の影響を無視しているため大きな誤差を含んでい

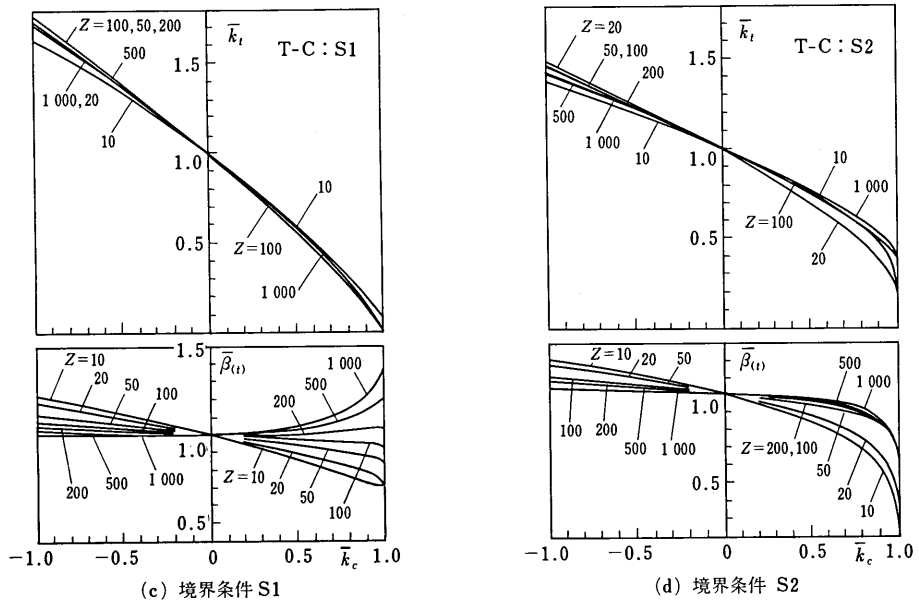
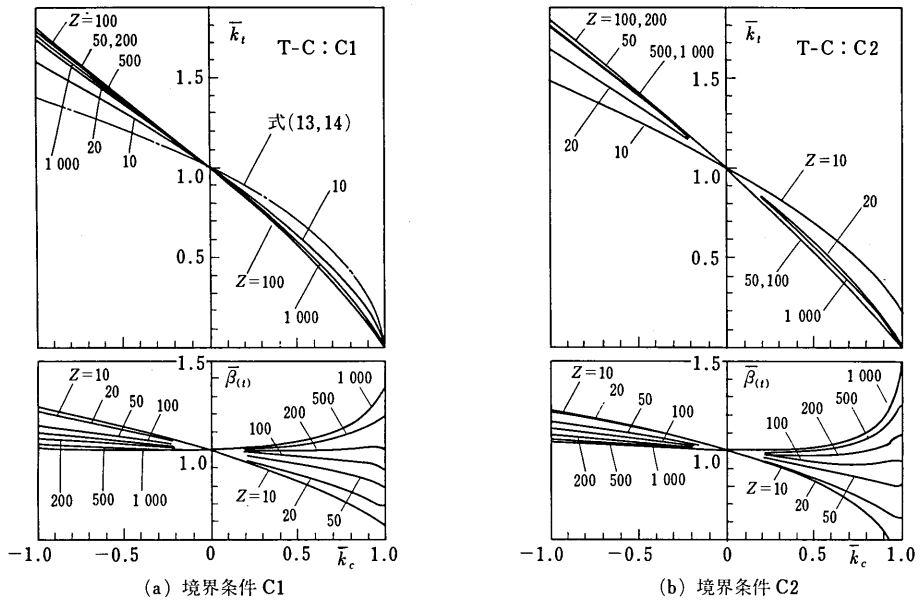
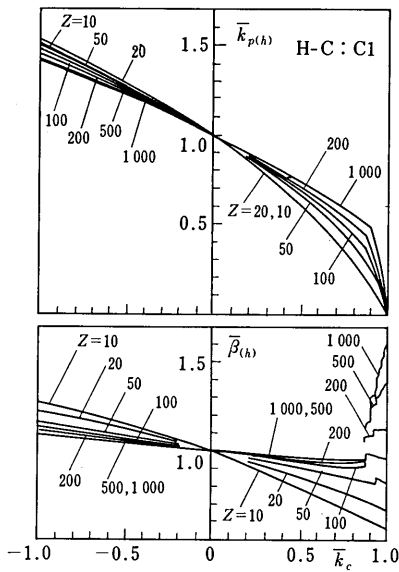
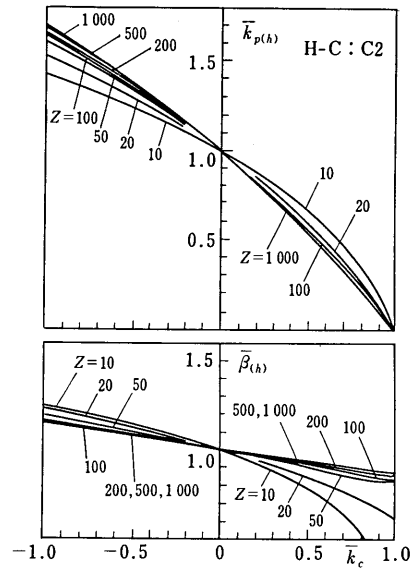


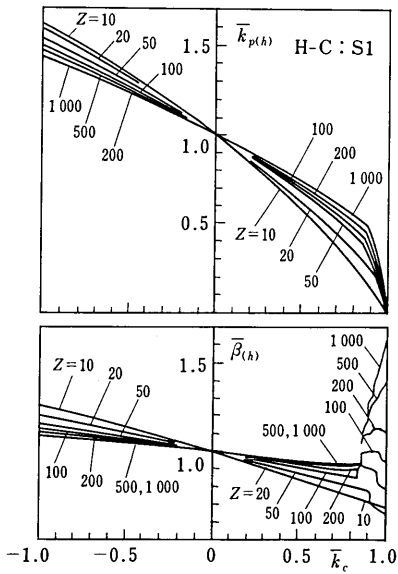
図 13.13 軸力とねじりモーメントを同時に受ける円筒シェルの座屈強度および座屈波数^{13,29)}



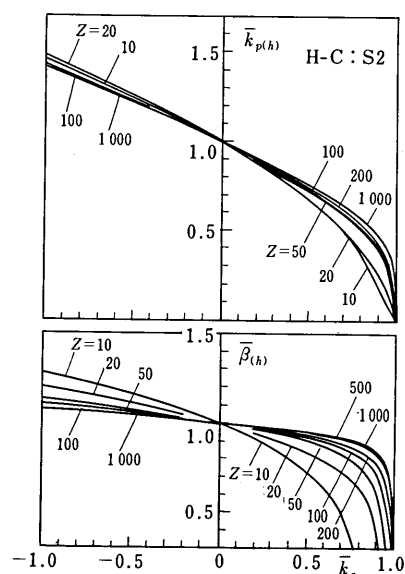
(a) 境界条件 C1



(b) 境界条件 C2



(c) 境界条件 S1



(d) 境界条件 S2

図 13.14 流体圧と軸力を同時に受ける円筒シェルの座屈強度および座屈波数^{13.29)}

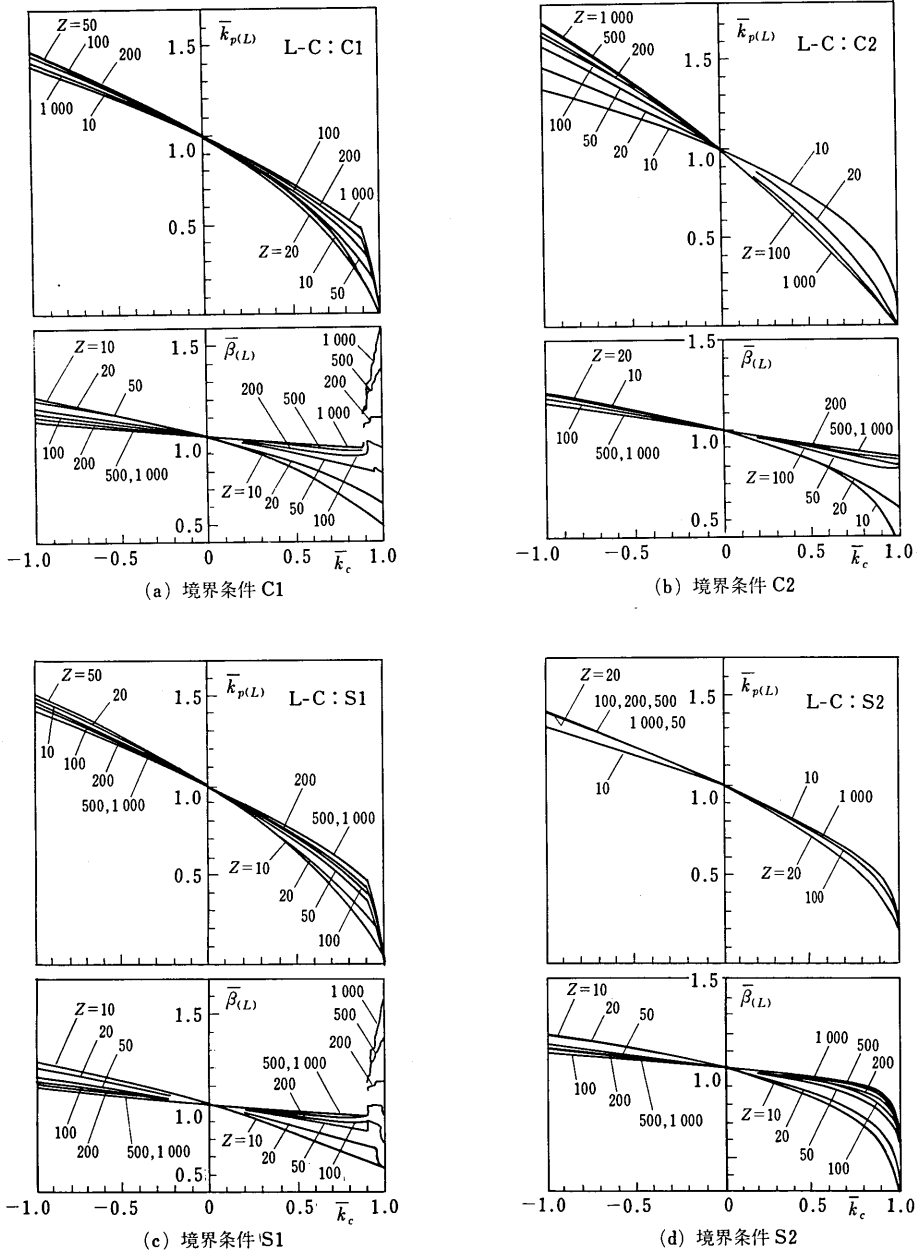
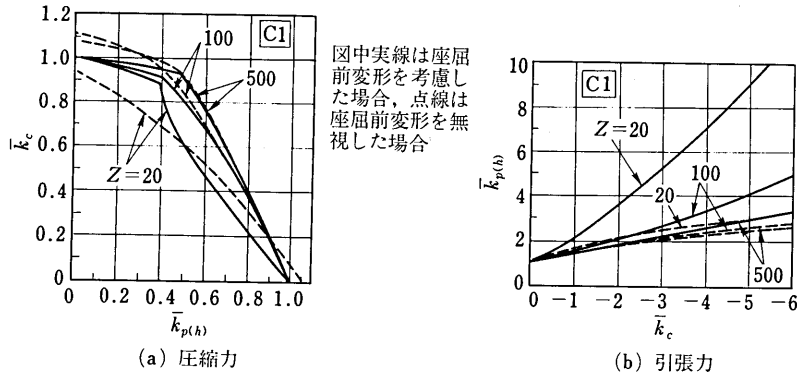


図 13.15 側圧と軸力を同時に受ける円筒シェルの座屈強度および座屈波数^{13.29)}

図 13.16 流体圧（外圧）と軸力とを同時に受ける円筒シェルの座屈強度に及ぼす座屈前変形の影響^{13.30)}

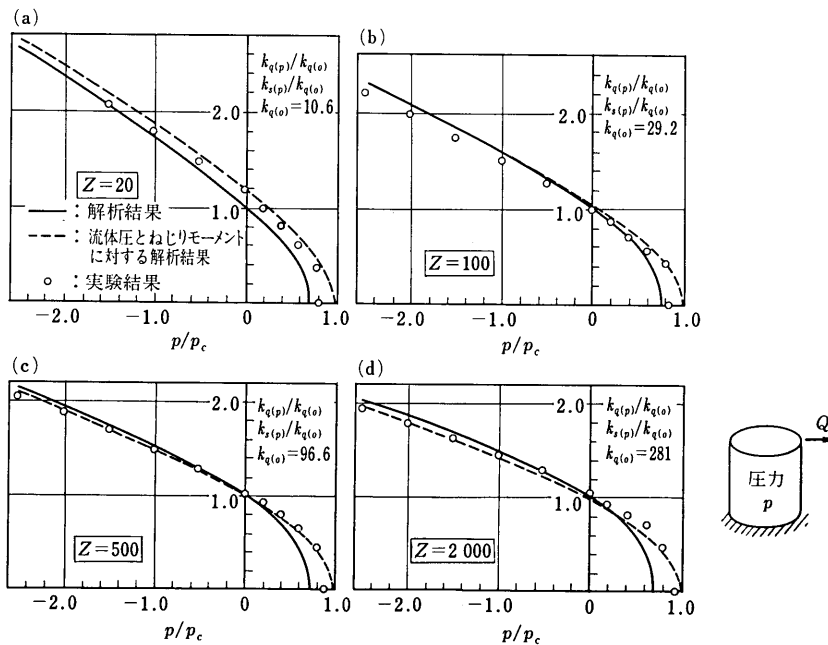
ることに注意する（図 13.16 参照）^{13.30)}。

外圧と軸引張力との組合せは、油井枠、深水海洋構造物のブレース材、ボイラー管などにおいて生ずる。

なお、内圧と軸力が同時に作用する場合については本項の（４）において触れる。

b) 流体圧とせん断力および曲げモーメントによる座屈

地震時における円筒形貯蔵槽の座屈などを考える際には流体圧と横荷重を同時に考慮しなければならない。しかし、せん断力による座屈については 13.2.3 でも触れたようにあまり検討されていない。ここでは一様流体圧 p （外圧を正とする）と内部液体の運動に基づく横荷重を想定した上端に作用する集中横荷重 Q とを同時に受ける片持円筒シェルに対する解析および実験結果を図 13.17 に示す^{13.31)}。図中実線が座屈時変位増分に関し両端単

(a) $Z=20$, (b) $Z=100$, (c) $Z=500$, (d) $Z=2000$ 図 13.17 座屈横荷重に及ぼす流体圧の影響 ($R/t=405$)^{13.31)}

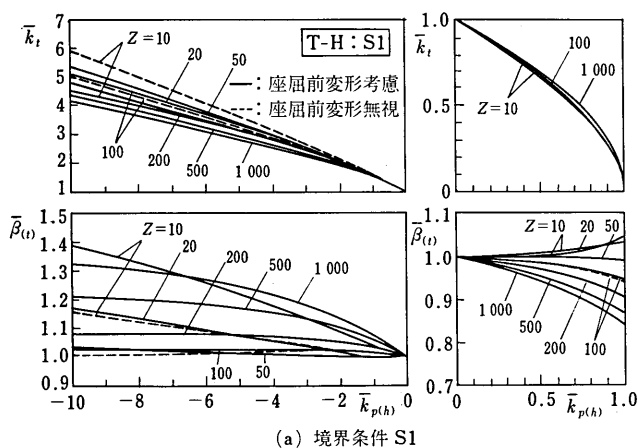
純支持（表 13.1 の S2）を仮定した解析結果，○印がその条件を両端固定とした実験結果である。ただし， p_c は両端完全固定の円筒シェルの座屈流体圧で $p_c = k_{pc} \frac{\pi^2 D}{RL^2}$ （式（13.13）参照）であり， $k_q(0)$ は $p=0$ の場合における無次元化座屈横荷重 ($k_{q0} = Q_{cr} L^2 / \pi^3 R D$ ：座屈荷重係数) である。なお破線は両端完全固定の円筒シェルの流体圧とねじりモーメントとが同時に作用する場合の座屈荷重係数 $k_s = \tau \cdot i L^2 / \pi^2 D$ の解析結果である。外圧が支配的である場合を除き，実験値と解析値はほぼ一致している。

c) 流体圧・側圧とねじりモーメントによる座屈

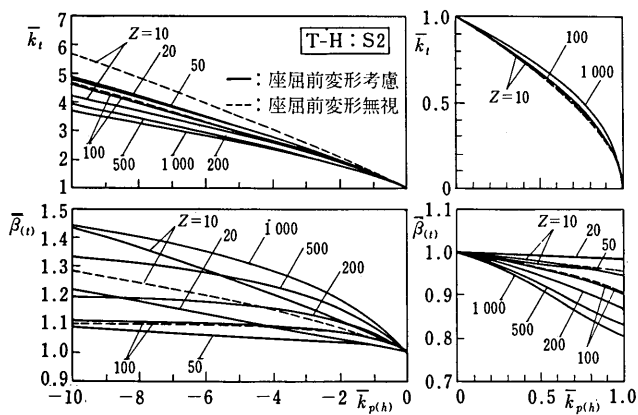
a) の場合と同様の表示を図 13.18 および図 13.19 に行う^{13.32)}。ただし，ここでは境界条件 S1, S2 ののみを取り上げる。座屈強度に関しては境界条件 C1, C2 の結果はそれぞれ境界条件 S1, S2 の結果とほぼ同じである。図中， $\bar{k}_t \equiv k_t / k_t^c$ ， $\bar{k}_{p(h)} \equiv k_{p(h)} / k_{p(h)}^c$ ， $\bar{k}_{p(L)} \equiv k_{p(L)} / k_{p(L)}^c$ および $\bar{\beta}_{(t)} \equiv \beta_{(t)} / \beta_{(t)}^c$ であり，それぞれ，ねじりモーメント，流体圧，側圧が単独で作用するときの座屈荷重係数ならびにねじりモーメントが単独に作用するときの座屈波数係数で無次元化した座屈荷重係数および座屈波数係数である。

(3) 液体を部分的に満たした円筒シェルの座屈

液体を部分的に満たした円筒シェルの一様外圧が作用する場合および一様軸圧縮力が作用する場合の座屈に関しては，それぞれ文献 13.33) および 13.34) が取り扱っている。

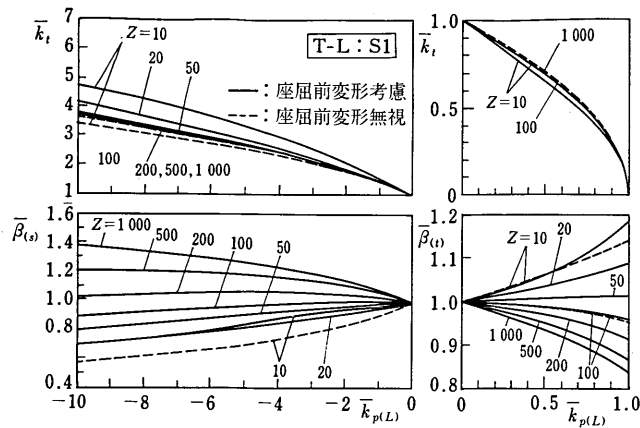


(a) 境界条件 S1

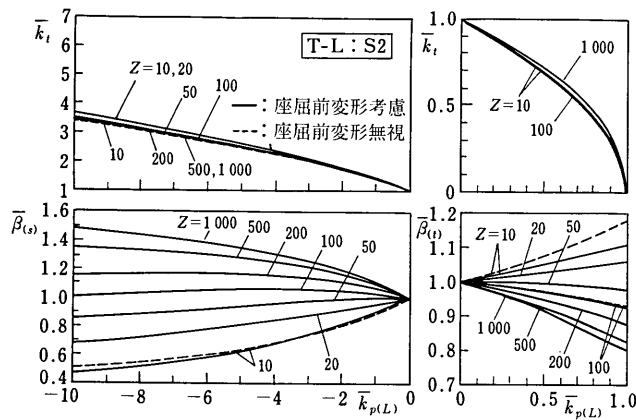


(b) 境界条件 S2

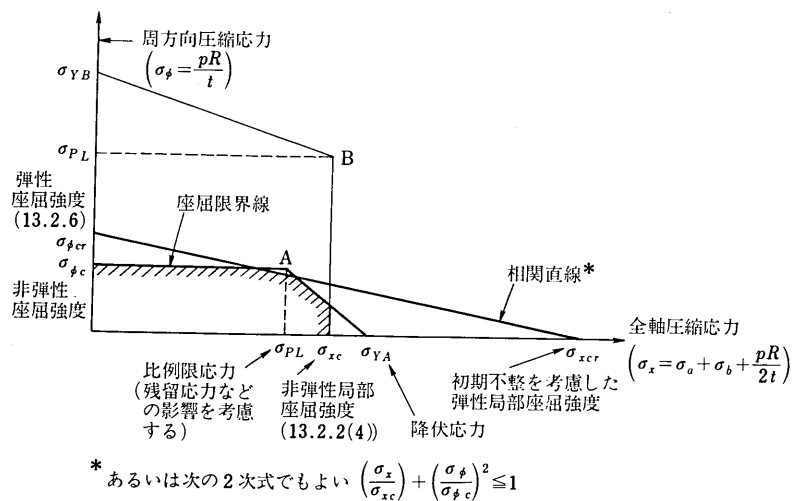
図 13.18 流体圧とねじりモーメントを同時に受ける円筒シェルの座屈強度および座屈波数^{13.32)} ($\nu=0.3$)



(a) 境界条件 S1



(b) 境界条件 S2

図 13.19 側圧とねじりモーメントを同時に受ける円筒シェルの座屈強度と座屈波数 ($\nu=0.3$)^{13.32)}図 13.20 外圧と軸圧縮力および曲げモーメントが作用するときの非弾性座屈強度^{13.4)}

(4) 圧力と非圧力荷重との組合せによる非弾性座屈

a) 外圧と軸圧縮力による座屈

全体降伏崩壊が生じ得るような厚肉円筒の場合には軸圧縮力と外圧との連成を無視しても安全側である。しかし R/t が大きくかつどちらの作用によっても座屈崩壊が生じ得るような場合には初期不整の影響により、両者の連成を無視し得ない。この場合には縦軸に周方向圧縮応力、横軸に軸圧縮応力をとった図 13.20 の相関関係が有用である^{13.4)}。残留応力などの影響を考慮した比例限度 σ_{PL} に対する実データがない場合には $\sigma_{PL}=0.6\sigma_Y$ とする。各軸上に設定される応力はそれぞれ単独に軸圧縮力および一様外圧が作用するときの極限強度などである。連成作用の下で座屈を生じさせないためには、軸圧縮力、曲げモーメント、外圧の全て的作用の下で生ずる全軸圧縮応力 σ_x を横座標とし外圧により生ずる周方向圧縮応力 σ_ϕ を縦座標とする点が、図の座屈限界線の内側に入るようにすることが必要である。

b) 外圧と軸引張力による座屈

$R/t < 13$ の円筒で降伏による崩壊が生じる。通常の形状寸法 ($R/t > 6$) の円筒シェルでは半径方向応力は無視することができ 2 軸応力場の問題として扱うことができる。たとえば von Mises の降伏規準^(註2)に基づいて評価すればよい。ただし、

$$\sigma_x = \sigma_a + \sigma_b - \frac{pR}{2t} \quad (13.15)$$

とする。ここに、 σ_a , σ_b はそれぞれ軸引張力および曲げモーメントによる応力であり、第 3 項は閉端パイプの場合に外圧により生ずる軸応力成分である。ひずみ硬化を無視すれば、崩壊時相当応力 $\bar{\sigma}$ を $\bar{\sigma} = \sigma_Y$ としてよい。また、ポアソン比は 0.4 ととることができる。

$13 < R/t < 60$ の領域では非弾性座屈を生じ、それより大きな径厚比ではほとんど弾性座屈により崩壊する。非弾性座屈に対しては API の評価式^{13.35)}もあるが、ここではより安全側の von Mises 形の次の評価式を示す。

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\phi}{\sigma_{\phi c}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_Y}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_\phi}{\sigma_{\phi c}}\right) \leq 1 \quad (13.16)$$

ここに、 $\sigma_{\phi c}$ は軸力がないときの座屈時周方向応力である。

c) 内圧と軸圧縮力による座屈

相当応力 $\bar{\sigma}$ が比例限以下ならば次式を用いるとよい^{13.36)}。

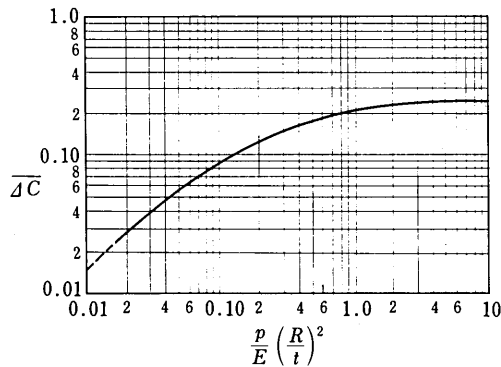


図 13.21 内圧による弾性軸圧縮座屈強度の割増^{13.33)}

注2) 軸方向引張応力を σ_x , 周方向引張応力を σ_ϕ , せん断応力を τ (ただし、いまの場合 $\tau=0$) とすると $\bar{\sigma} = \sigma_Y$, ここに $\bar{\sigma} = (\sigma_x^2 + \sigma_\phi^2 + \sigma_x \sigma_\phi + 3\tau^2)^{1/2}$

$$\sigma_x < \sigma_{xc} + \overline{\Delta c} (Et/R) \quad (13.17)$$

ただし、 $\overline{\Delta c}$ は図 13.21 による。

相当応力 $\bar{\sigma}$ が比例限を越える場合には von Mises の降伏規準および次式による。

$$\sigma_x \leq \sigma_{xc} \quad (13.18)$$

ただし、この場合の σ_{xc} は非弾性軸圧縮座屈強度である。

d) 内圧と軸引張力による崩壊

この場合は連成を無視してよい。

13.3 初期不整の影響

圧延製造パイプ・シェルと構造用鋼板からの組立パイプ・シェルとを問わず現実に製作されたパイプ・シェルには必ず形状的不完全性や残留応力などの初期不整が存在する。これによって実際のパイプ・シェルの座屈耐荷力は初期不整のない完全な構造を対象とした理論的な座屈強度よりも低い値を示し、ときには理論値の 1/10 程度になることもある。初期不整の程度は製作方法によって異なり、したがって座屈耐荷力に及ぼす影響も製作方法によって相違する。本節ではまずパイプおよび円筒シェルの製作方法、材料の力学的特性ならびに初期不整の程度について述べ、次いで座屈耐荷力に及ぼす初期不整の影響を理論座屈強度と実測耐荷力との比較と共に示す。

13.3.1 パイプおよび円筒シェルの製作方法

製作方法は大きく分けて圧延工程を経て所定の寸法形状に仕上げる方法（製造管）と、炭素鋼、高張力低合金鋼、構造用鋼、軽量構造用合金などの冷間または熱間成形構造用板材を溶接または機械的接合により組立てる方法（製作管）とがある。さらに前者の圧延工程を分類すると 1) ロッドの打抜、内枠を挿入してのロール圧延、最終仕上げ成形を行う方法（シームレスパイプ）、2) 熱間成形ロール帯板の連続高温圧接による方法、3) 冷間加工ロール板の両端を電気抵抗溶接する方法（電縫管）、4) 冷間加工成形管状板の長手方向またはらせん状溶け込み溶接による方法（通常 SMA 溶接）、および 5) 主に非鉄金属を対象とした熱間押し抜き冷間引伸び成形の方法、などがある。

後者の組立てパイプ・シェルは通常仕上げ処理を受けず、圧延パイプ・シェルに比べかなり大きな形状不完全性を有する。一方残留応力の大きさは前者の方が高い。

13.3.2 材料の力学的特性

パイプ断面の基本的な応力—ひずみ関係は 1) 降伏点応力まで直線でその後ほぼ一定応力の下で塑性変形を伴うか、2) 降伏点以下の比例限まで直線で、その後、徐々に非線形的に降伏するかのどちらかである。残留応力が存在すると応力—ひずみ関係は非線形域で下側に移動し、1) の場合にも明確な降伏点を示さなくなる。残留応力は最も一般的には熱間仕上げの後の冷却工程、溶接工程、および成形工程において導入される繰り返し防止処理によって発生する。圧延パイプの縦方向残留応力は筒壁の板厚方向に渡る非一様な塑性流れの結果生ずることもある。

パイプ・シェルの製作方法との関連では、一般に熱間仕上げされたパイプが明瞭な降伏を示すのに対し、冷間仕上げされたパイプは滑らかな降伏挙動を呈する。ステンレス鋼やアルミニウムのような材料を用いたパイプは使用材料と同様の応力—ひずみ特性を有し、製作方法によらず滑らかな降伏を示す。

以上のように定性的な挙動は把握できるものの、個別のパイプ部材の正確な応力—ひずみ曲線の形状、比例限および降伏強度などを事前に予測することは困難である。この問題を解決する一つの有効な方法としては、実断面を有する短柱の試験を実際に行ってパイプ部材としての応力—ひずみ曲線を得る方法が考えられる。

13.3.3 初期不整の程度

初期不整データについては第4章にまとめられている。しかし、13.3.1で述べた各製作方法によって製作したパイプおよびシェルの初期不整の具体的な大きさについての一般的な議論は板厚、径、溶接の具体的方法等の要因がさらに加わるため困難であり、統計的データの集積が待たれる。なお、航空宇宙工学の分野における円筒シェルの初期たわみに関しては、データベースが整備されつつある^{13.37)}。

13.3.4 理論座屈強度と実測座屈耐力との比較

軸圧縮力を受ける円筒シェルの座屈耐力の実測結果を図13.22に示す。いずれも縦軸は古典座屈強度に対する実測座屈耐力の比である。図(a)^{13.38)}には座屈波数の比較も示されている。図(c)にはYamakiら^{13.40)}による境界条件C1(両端変位面外固定、面内周方向拘束、軸方向一定(表13.1参照))に対する理論座屈強度が示されている。実測耐力は古典座屈強度に比し低いところでは1/5にまで下がっている。座屈耐力の低下に及ぼす影響因子は初期不整のみではないが、たとえば境界条件の影響は13.2.2節で示したように、両端変位面外単純支持、面内軸方向自由の境界条件を除けばただか17%程度であり、図13.22に示される座屈耐力の低下は主として初期不整によるものである。ちなみにGormanやTennysonによる光弾性材料を遠心鋳造して製作したほぼ完全な円筒シェルを用いての精密な実験の結果はYamakiらによる理論解と非常によく一致している(図(c))。なお、図(a)はセルロイド、鋼、銅およびデュラルミンなどより作成した供試体を用いての1950年以前に得られた数百のデータに基づいており、図(b)のデータはすべて電気溶接管を試験体とした結果である。

一般にシェルの座屈に及ぼす初期不整の影響は、座屈後の平衡曲線が急激に低下する場合に大きい。したがって、円筒シェルの場合、初期不整の座屈耐力に及ぼす影響はねじりのみを受けるときにはほとんど無視することができ、軸圧縮力が作用する場合などには十分考慮されねばならない。

13.3.5 初期たわみを有する円筒シェルの軸圧縮座屈強度

座屈強度 σ_{xc} を古典座屈強度と同じ形式で表わせば

$$\sigma_{xc} = C \cdot E \cdot \frac{t}{R} \quad (13.19)$$

となる。初期たわみの効果は係数 C に含まれる。係数 C は径厚比 R/t の関数でもある。Donnell^{13.41)} は初期たわみの大きさを表すパラメータ U を導入して、初期たわみの座屈耐力に及ぼす影響を図13.23に示すように求めている。

(1) 十分に長い円筒シェル

Batdorfら^{13.42)} は $R/t > 500$ の航空機構造を対象とした実験より $L/R \geq 1$ の円筒シェルに対する係数 C の実験曲線を求めているが、Donnellらの $U=0.00025$ に対する結果と良く一致している。

また、図13.24(a)は軸対称初期たわみを考えたKoiter, Almroth, Hutchinsonらの結果である^{13.43)}。横軸は板厚 t で無次元化した初期たわみの大きさ (δ/t) であり、縦軸は古典座屈強度 P_{cl} で無次元化した座屈荷重

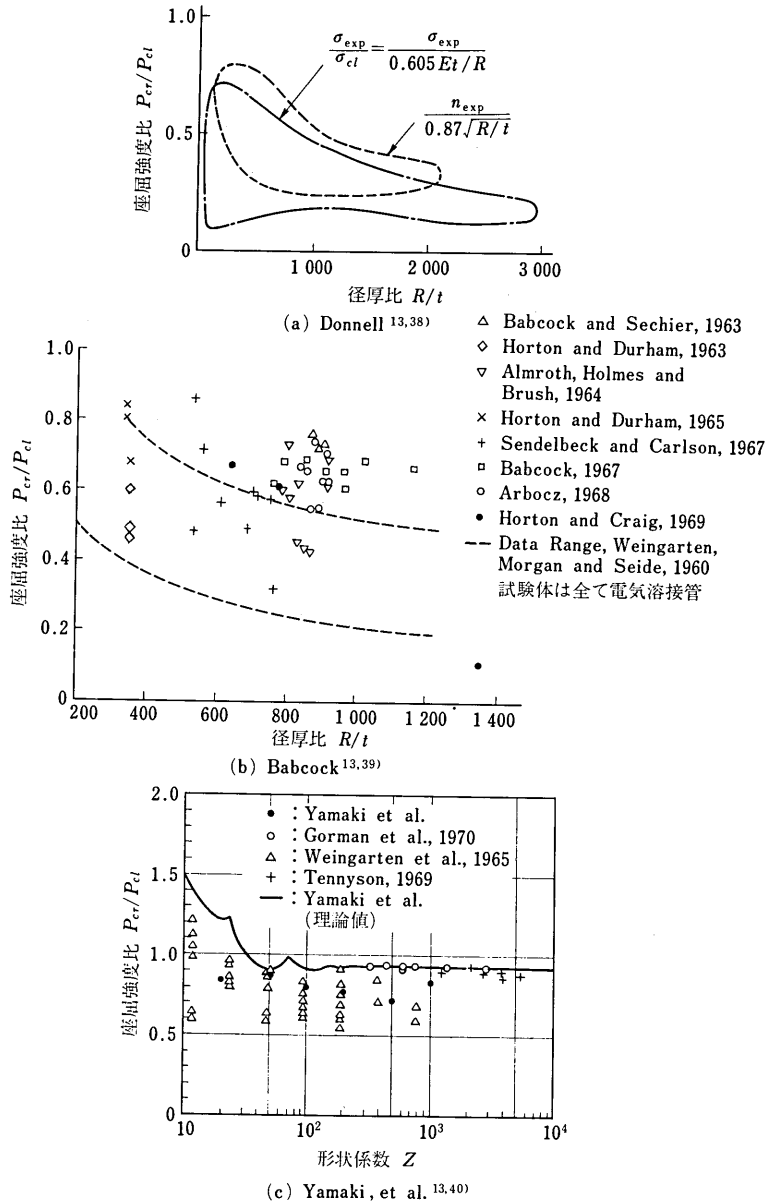


図 13.22 軸圧縮を受ける円筒シェルの実測座屈耐荷力

(P/P_{cl})である。軸対称初期たわみと非軸対称初期たわみとでどちらが座屈荷重の低下率に及ぼす影響が大であるかについては、前者の影響が大であるとの報告もあるが、未だ十分に明らかにされていない。

(2) 短い円筒シェル

$R/t=1000$, $Z \leq 50$ ($L/R \leq (1/20\sqrt{1-\nu^2})^{1/2}$) の円筒シェルを対象とし軸方向に正弦1半波から4半波の軸対称初期たわみ波形を採用した安川ら^{13,43)}のFEM解析によれば初期たわみの影響は次のようにまとめられる(図13.24(b)参照)。

①座屈荷重の低下の割合は $R/t=100 \sim 1000$ の範囲であれば R/t にあまり影響されない。

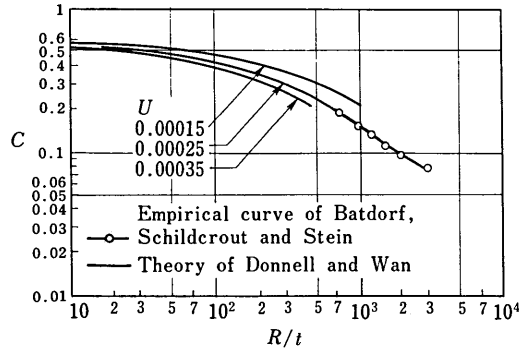


図 13.23 軸圧縮を受ける初期たわみのある円筒シェルの座屈係数 $C^{13.42)}$

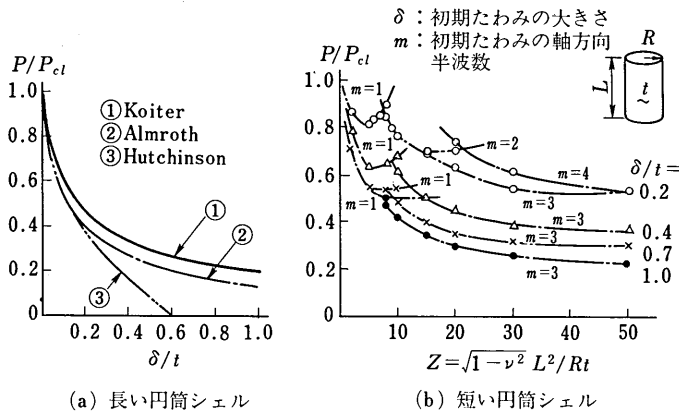


図 13.24 軸圧縮を受ける円筒シェルの座屈耐力に及ぼす初期たわみの影響^{13.43)}

② Z が小さくなるほどシェルより平板に近くなるため、初期不整の座屈に及ぼす影響は小さくなる。

③ $\delta/t=0.2$ の場合 Z が大きくなると共に最小の座屈荷重を与える初期たわみ波形は次第に波数が増加する。逆に $m=2$ の初期たわみに着目すると最小の座屈値を与える Z の領域は狭く、 $\delta/t \geq 0.4$ になるとその領域は存在しない。

なお、安川らは初期たわみ波形として正弦 1 半波を仮定し、内側および外側初期たわみの両方を考えた $Z \leq 10$ の短い円筒シェルについての塑性崩壊解析結果も示している。

13.3.6 初期たわみを有する円筒シェルの外圧による座屈

この場合の座屈強度は通常、非軸対称座屈波形を初期たわみモードとして仮定し、シェルに降伏域が生じ始めるときの外圧 p_r を持って定義されている。 $n=2$ の場合には p_r は次式で求められる。

$$p_r^2 - \left[\frac{\sigma_y t}{R} + \left[1 + \frac{3Re_0}{t} \right] p_{cr} \right] p_r + \frac{\sigma_y t}{R} p_{cr} = 0 \quad (13.20)$$

ここに、 $e_0 = (R_{\max} - R_{\min})/R$ は初期たわみの大きさであり、 p_{cr} は初期たわみがない場合の座屈強度である。また、 $R_{\max}$ 、 $R_{\min}$ はそれぞれ最大、および最小半径である。 $n > 2$ に対しては Kendrick による式を用いなければならない^{13.44)}。なお、 e_0 は実状に応じて決定すべきであるが参考として挙げれば API-RP-2A^{13.35)} では $e_0 = 0.01$ としている。

13.4 シェル・曲面板およびシェル状構造物の座屈

円筒シェル以外の一般のシェルにおいても座屈強度に及ぼす種々の因子の影響は円筒シェルに対するそれとほぼ同様に存在すると考えられるが、円筒シェル以外のシェルに対しては13.2で述べたような詳細な検討は未だなされていない。本節では基本的な結果のみ示す。

13.4.1 外圧を受ける回転体シェルの座屈

(1) 球形シェル

半径 R 、板厚 t の球形シェルに一樣外圧が作用するときの座屈強度は、古典理論では半径 R 、板厚 t の円筒シェルの座屈強度と等しく式 (13.21 a) で与えられる。

$$\sigma_{ci} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{t}{R} \quad (13.21 a)$$

あるいは、座屈圧力としては式 (13.21 b) である。

$$p_{ci} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{t}{R} \right)^2 \quad (13.21 b)$$

式 (13.21 a) の座屈応力が、軸圧縮力を受ける円筒シェルの古典座屈応力に等しいことは、球形シェルの座屈現象が初期不整に対して敏感であることを示唆している。

(2) 浅い球形シェル

一樣外圧を受ける周辺固定部分球形シェルの座屈解析に関しては Budiansky, Weinitschke, Huang^{13.44)~13.46)} によって得られた結果が代表的である。これとは別に角野^{13.47)} は比較的開角の大きいシェルにも適用可能な結果を周辺固定および周辺単純支持の境界条件に対して得ている。さらに小久保・山本^{13.48)} が座屈強度に及ぼす境界条件の影響を検討し実験結果との比較を行っている。また、補剛および初期不整の影響については山田・内山^{13.49)} の資料がある。

なお部分球形シェルの形状係数 λ は $\lambda = r_a^4 / R^2 t^2$ によって与えられる。ただし R は球の曲率半径、 r_a は支持縁円の曲率半径である。

(3) 円錐形シェル

外圧を受ける円錐形シェルの座屈については、A. Pflüger と徳川の研究がある^{13.1)}。前者は、肉厚が頂点から距離に比例する円錐形シェルを対象として、軸方向の分布荷重および表面圧力を受けるときの座屈荷重を微小変形理論により求めている。一方、後者では、一樣外圧を受ける場合について、多くの実験結果から座屈外圧の実用式を求めている。

(4) 双曲線回転体シェル

Der・Fidler^{13.50)} は、電気成形銅およびポリ塩化ビニール製鑄造模型の風洞実験により、座屈外圧力として次式を与えている。

$$p_{cr} = CE \left(\frac{t}{R_T} \right)^n \quad (13.22)$$

ここに、 R_T はのど厚径であり、 $C=0.064$ 、 $n=2.3$ である。

13.4.2 曲面板の座屈

この問題は実際上補剛円筒シェル中の補剛材で囲まれた1パネルの座屈問題として生ずることが多い。

(1) 円筒パネルの座屈

軸圧縮力による座屈，せん断力による座屈については幾つかの理論解析および実験式が与えられている^{13.4)}。しかし，外圧による座屈については，十分長い円筒パネルの場合には曲りばりと同様な結果となることが知られているが，通常の長さの場合には周辺境界条件の影響が入り，周辺固定で浅い円筒パネルに対しては解析結果がある^{13.51)}もののそれ以外にはFEM等による数値計算例が見られる程度である。

圧縮座屈，せん断座屈については，中心角が大きければ，境界条件にもよるが基本的にはパネルと同じ長さの円筒シェルの結果を用いることができる。また，中心角が十分小さくなった場合には平板の結果（第8章）と一致する。すなわち，軸圧縮力を受ける円筒パネルの座屈の場合，座屈強度は次式で与えられる。

$$\sigma_{xcr} = \frac{k_{xcr} \cdot \pi^2 D}{L_s^3 \cdot h}, \quad k_{xcr} = \begin{cases} \left(\frac{L_s}{L} + \frac{L}{L_s} \right)^2 & : \frac{L}{L_s} < 1 \\ 4.0 & : \frac{L}{L_s} \geq 1 \end{cases} \quad (13.23 \text{ a, b})$$

ここに， L は軸方向長さ（または周方向補剛材の軸方向間隔）， L_s は周方向長さ（または軸方向補剛材の周方向間隔）であり， D は板の曲げ剛性である。

(2) 円筒パネルの有効幅

補剛材に作用する軸応力が σ_L のとき有効幅 b_m は

$$b_m = \bar{b}_m + \frac{\sigma_R}{\sigma_L} (b - \bar{b}_m) \quad \text{または} \quad \sigma_L \cdot b_m = \sigma_R \cdot b + (\sigma_L - \sigma_R) \bar{b}_m \quad (13.24)$$

ここに， σ_R は円筒パネルの座屈応力であり， b はパネルの周に沿った幅， $\bar{b}_m$ は $\sqrt{\sigma_R/(\sigma_L - \sigma_R)} \cdot b$ である^{13.52)}。

13.4.3 シェル状構造物の座屈

シェル状構造物にはトラスシェルまたは網目状トラス，シェル状フレーム，補剛シェル，異方性シェル，サンドウィッチシェルその他がある。ドーム屋根，円筒形トラス屋根，圧力容器，冷却塔などはこのようなシェル状構造物で構成される構造の例である。シェル状構造物に生ずる座屈は大別して全体座屈，局部座屈および部材座屈である。部材座屈は基本的には柱としての座屈でありこれについては既に第5章で述べた通りである。シェル状構造の座屈は13.5節で詳述する補剛円筒シェルの座屈と同様，端部境界条件，初期不整，材料非線形特性の影響を受ける。

(1) 有効膜厚・板厚と球形シェル状構造物の全体座屈

シェル状構造物の全体座屈は剛性分離の考え方^{13.53)}により解析することができる。この考え方は，面内剛性を評価する際の板厚 t_m と面外曲げ剛性を評価する際の板厚 t_o とを独立に考える考え方であり，例えば直交かつ等間隔に一樣断面部材を配置したシェル状フレームの場合それぞれ次式が用いられる。

$$t_m = \frac{A}{d}, \quad t_o = \sqrt[3]{\frac{12I}{d}} \quad (13.25 \text{ a, b})$$

ただし， A は部材断面積， I は部材断面二次モーメント， d は部材間距離である。また，ポアソン比は0としている。一樣外圧を受ける半径 R の球形シェル状構造を例にとれば弾性座屈荷重は次式で与えられる。

$$p_{crE} = C \cdot E \cdot \left(\frac{t_m}{R} \right)^2 \left(\frac{t_b}{t_m} \right)^{3/2} \quad (13.26)$$

なお係数 C の値は研究者によって異なった値が提案されており、von Kármán, Tsien 流の手法を用いた Buchert^{13.54)} による 0.365 から Klöppel・Jungbluth^{13.55)} の古典差分理論による 1.16 ($\nu=0$) までの幅がある。前記の諸因子の影響の下での実験結果は $C=0\sim0.90$ の間にあり、それらを考慮して例えば ASME の圧力容器の規定では $C=0.25$ を用いている。

(2) 変形を考慮した球形シェル状構造物の外圧による非弾性座屈

非弾性座屈荷重は次式の形で表わされる。

$$p_{crP} = \eta \cdot p_{crE} \quad (13.27a)$$

ここに、 η は塑性低減係数であり、

$$\eta = \frac{\sqrt{E_s E_t}}{E} \quad \text{あるいは} \quad \eta = \frac{3}{4} \frac{E_t}{E} \left(E_t + \frac{E_s}{3} \right) \quad (13.27b)$$

が与えられている^{13.4)}。ただし、 E_s , E_t は最大膜応力の下での値を用いる。両式による差は 5 % 以内であり実験結果も 10 % 以内に入る^{13.55)}。

シェル状構造の場合たわみが有効膜厚の 20~30 倍となることも多いが、縁端境界条件や初期不整の影響も含めて変形が座屈耐荷力に及ぼす影響は非常に大きい。Buchert^{13.55)} は変形を考慮した非弾性座屈耐荷力を次のように与えており、実験結果と 15 % 以内で一致すると報告している。

$$p_{cr} = \frac{8}{3} \eta E \left(\frac{t_m}{R} \right)^2 \left\{ \left[0.21 \left(\frac{\Delta}{t_m} \right)^2 + 0.0715 \left(\frac{t_b}{t_m} \right)^3 \right]^{1/2} - 0.459 \frac{\Delta}{t_m} \right\} \quad (13.28)$$

ここに、 Δ は完全形状からの法線方向最大変位であり初期不整等による変位を含んでいる。

(3) 球形シェル状構造の局部座屈

a) 正三角形網目状シェルの局部座屈^{13.56)}

網目状シェルの局部座屈はある 1 つの格点に荷重が作用し、その格点部の曲率が逆転するほど相対的に大きな変位を生ずる現象をいい、部材形状と格点剛性が支配因子となる。格点部がピン結合され曲げ剛性 0 の場合隣接格点の変位を拘束するか、あるいは非拘束とするかにより座屈荷重はそれぞれ次のようになる。

$$W_{cr} = \frac{2AEH^3}{\sqrt{3}L^3} \quad (\text{隣接格点変位拘束}), \quad W_{cr} = \frac{AEH^3}{\sqrt{3}L^3} \quad (\text{隣接格点変位非拘束}) \quad (13.29a, b)$$

ここに、 H は隣接格点の構成する面と載荷格点との距離であり A , L は部材の断面積および長さである。

格点部曲げ剛性が部材曲げ剛性に等しい場合の座屈基準は隣接格点の拘束条件に応じて次式が与えられている。

$$\left(\frac{R}{L^2} \sqrt{\frac{I}{A}} \right) \leq \begin{cases} 0.092 & : \text{拘束} \\ 0.132 & : \text{非拘束} \end{cases} \quad (13.30)$$

b) 補剛シェルの局部座屈

補剛シェルの補剛材間の座屈であり、外圧の場合の座屈荷重は次の通りである^{13.54)}。

$$p_{cr} = \frac{7.4Et^3}{Rd^2} \quad (13.31)$$

ただし、 d は補剛材間隔である。

13.5 補剛円筒シェルの座屈耐荷力

実際のシェル構造は無補剛で使用されるよりもむしろ周方向補剛材あるいは軸方向補剛材またはその両者で補剛されて使用されるのが通常である。しかし補剛材の接合の仕方によっては残留応力などによりむしろ座屈耐荷力を低下させることも生じ得る。また補剛による重量増加を避け構造の軽量化を計りつつ座屈耐荷力を高める目的でサンドウィッチシェルや積層シェルも最近では多く取り上げられてきている。しかし、これらの補剛シェルの理論的解析は必ずしも容易ではなく、線形解析結果や実験結果を参考にした半経験公式や経験公式に基づいて設計が行われているのが現状である。最近の欧州における成果^{13.5)}はこの意味で注目に値する。

13.5.1 補剛円筒シェルの座屈様式

補剛シェルにおいては、普通外板がまず座屈し最後に補剛材が座屈して全構造物としての強度を失うが、一般には次のような座屈挙動を考慮しなければならない。すなわち、①構造全体の座屈、②幾つかの補剛材にまたがる局部座屈、③補剛材間の1パネルの局部座屈、および④個々の補剛材の座屈である。軸圧縮を受ける場合、柱としての全体座屈は軸方向補剛材の効果を断面二次モーメントの計算に考慮することにより評価することができる。また、個々の補剛材の座屈はシェルの有効幅を考慮したリングまたは弾性床上の柱の座屈の問題に帰せられる。

13.5.2 直交異方性シェル近似

軸方向補剛材の配置が密な場合やサンドウィッチシェルの場合には、せん断剛性や曲げ剛性、ねじり剛性などを的確に評価するところに難かしさがあるものの、直交異方性シェルとして解析することにより複数の補剛材にまたがる局部座屈を評価することができる。例えば一様材質、一様板厚の場合には表13.4中の剛性は $\alpha_1 = E_1 t / (1 - \nu_1 \nu_2)$, $\alpha_2 = E_2 t / (1 - \nu_1 \nu_2)$, $\beta = G t$, $D_1 = E_1 t^3 / 12 (1 - \nu_1 \nu_2)$, $D_2 = E_2 t^3 / 12 (1 - \nu_1 \nu_2)$, $S = \frac{1}{3} G t^3$ と表わされる。ただし、 E_1 , E_2 , G は弾性主方向の縦弾性係数およびせん断弾性係数であり、 $\mu_1 = \nu_1$, $\mu_2 = \nu_2$ である。

表13.4 直交異方性を表わす諸量^{13.1)}

一般化応力-ひずみ関係式 $N_1 = \alpha_1 (\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2)$, $M_1 = D_1 (\kappa_1 + \mu_2 \kappa_2)$ $N_2 = \alpha_2 (\varepsilon_2 + \nu_1 \varepsilon_1)$, $M_2 = D_2 (\kappa_2 + \mu_1 \kappa_1)$ $N_{12} = N_{21} = \beta \gamma$, $M_{12} = M_{21} = \frac{S}{2} \tau$	N_1, N_2 : 弾性主方向単位幅面内力 N_{12}, N_{21} : 単位幅せん断力 M_1, M_2 : 弾性主方向単位幅曲げモーメント M_{12}, M_{21} : 単位幅ねじりモーメント $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$: N_1, N_2, N_{12} に対応する平面ひずみ κ_1, κ_2, τ : M_1, M_2, M_{12} に対応する曲率、ねじり率
$\alpha_1, \alpha_2, \beta$: 面内伸剛性、せん断剛性 ν_1, ν_2 : 面内力に対するポアソン比 D_1, D_2, S : 曲げ剛性、ねじり剛性 μ_1, μ_2 : 曲げに対するポアソン比 $\alpha_1 \nu_2 = \alpha_2 \nu_1$, $D_1 \mu_2 = D_2 \mu_1$	

図13.25のような補剛シェルの場合には、13.4.3(1)で述べた分離剛性の考え方をを用いて

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &\cong Et + \frac{E_L A_L}{b}, & \alpha_2 &\cong Et + \frac{E_R A_R}{b}, & \beta &= Gt + \beta_s \\ D_1 &\cong \frac{Et^3}{12} + \frac{E_L I_L}{b}, & D_2 &\cong \frac{Et^3}{12} + \frac{E_R I_R}{b}, & S &\cong \frac{1}{3} Gt^3 + S_s \end{aligned} \right\} \quad (13.32 \text{ a} \sim \text{f})$$

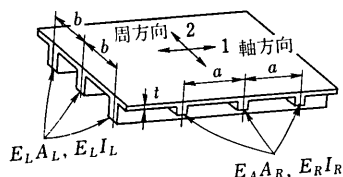
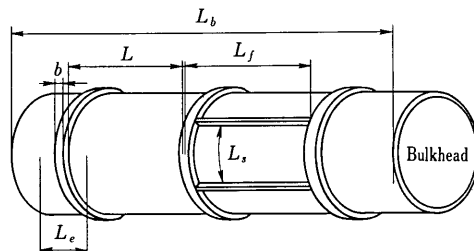


図 13.25 補剛シェルの諸元 1

図 13.26 補剛シェルの諸元 2^{13.4)}

となる。ただし、 E_L, A_L, I_L は軸方向補剛材の縦弾性係数、断面積、断面二次モーメントであり、 E_R, A_R, I_R は周方向補剛材のそれらである。また、 β_s, S_s は補剛材によるせん断剛性、ねじり剛性の寄与項である。

(1) 軸圧縮による座屈^{13.1)}

縦横に補剛された円筒の圧縮座屈荷重に関しては林によりより詳細な結果が得られているが、ここでは Dschou による簡単な次式を示す。

$$P_{cr} = 4 \pi E \sqrt{\frac{I_1 I_2}{\left(\frac{I_1}{t_1} + \frac{I_2}{t_2}\right) \frac{t_1}{t}}} \quad (13.33)$$

ここに、 I_1, I_2 は各断面の平均断面二次モーメントであり、 t_1, t_2 は平均板厚である。

短い円筒シェルに対しては同じく Dschou により

$$P_{cr} = \sigma_E t_1 + \sigma_R \sqrt{t \cdot t_1}; \quad \sigma_E = \frac{\pi^2 E I_1}{t_1 L^2}; \quad \sigma_R = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{t}{R} \quad (13.34)$$

が得られている。ここに、 σ_E は長さ L の補剛板の Euler 座屈応力であり、 σ_R は板厚 t の円筒シェルの古典座屈応力である。

(2) 曲げ座屈およびねじり座屈

結果は省略するが、ねじり座屈強度を高めるためには周方向面内剛性を高めることが有効であり、屈服モーメントを高めるためには曲率を大きくすることおよび周方向曲げ剛性 D_2 と軸方向面内剛性 α_1 とを大きくすることが効果的である。

(3) 外圧による座屈

Bryant によりシェル項と補剛リング項の和の形の次式が与えられている (図 13.26 参照)^{13.4)}。

$$p_{cr} = \frac{E t}{R} \left\{ \frac{\lambda^4}{[n^2 + (\lambda^2/2) - 1][n^2 + \lambda^2]^2} \right\} + \frac{E I_e (n^2 - 1)}{L_f R_0 R_c^2} \quad (13.35)$$

ここに、 $\lambda = \pi R / L_b$ であり、 R_0 は外半径、 R_c は有効幅 L_e の部分の補剛シェル断面中立軸までの半径、 n は周方向座屈波数、 L_f は周方向補剛材中心間距離、 L_b はバルクヘッド間距離、 L_e は有効幅 L_e 間の周方向有効断面二次モーメントである。さらに、有効幅 L_e は、補剛材幅を b 、 $L = L_f - b$ とすると、 $L_e = F_1 \cdot L + b$ で与えられる。ただし、 $F_1 = (2/\theta) \cdot (\cosh \theta - \cos \theta) / (\sinh \theta + \sin \theta)$ であり、 $\theta = [3(1-\nu^2)]^{1/4} \cdot (L/R) \sqrt{R/t}$ とする。周方向の座屈波数 n は拘束が少なければ $n=2$ であるが端部の拘束度が高くなれば n の値は大きくなる。式 (13.35) で考慮している周方向補剛材に加えてより大きな補剛リングでさらに補剛されている場合についても Blumenberg により式 (13.35) と同様な形式の実験式が提案されている^{13.4)}。

13.5.3 補剛材間の座屈

軸方向補剛材，周方向補剛材とも十分に剛ならば，補剛材で囲まれた一区画を取り出し4辺支持の曲面板として取り扱うことができる。この場合の座屈強度は13.4.2で述べた通りである。

リング補剛材間の外圧による弾性座屈についてはReynoldが弾性補剛リングの変形を考慮した結果を得ているが^{13,4)}，13.2.6節の結果が役に立つ。非弾性座屈はちょうちん状の座屈波形を生ずる軸対称座屈と周方向に波を生ずる非対称座屈とが起り得る。

13.5.4 外圧による非弾性座屈

Reynoldによれば外圧による非弾性座屈の式は全て次のような簡単な形式にまとめることができる^{13,4)}。すなわち，弾性座屈荷重を $p_{cr}=E(C_a+C_b)$ (ただし， C_a ， C_b はそれぞれ膜剛性および曲げ剛性を代表する項である) のように表わすものとする，非弾性座屈荷重は次のように表わされる。

$$p_c = \sqrt{E_s E_t} \cdot C_a + E_t \cdot C_b \quad (13.36)$$

13.6 数値計算の要点

シェルの座屈計算においては，例えば八巻らの一連の成果におけるような解析的な取扱いの場合でも，陽な形の解を得ることは難しく最終的には数値的な固有値計算に頼らざるを得ない場合が多い。ここでは有限要素法あるいはそれに類似した離散化手法を用いた計算を問題とする。この場合座屈強度の評価方法は固有値計算による方法および非線形つり合い経路上の特異点，極大点などの評価による方法に大別することができる。

シェルの座屈の特徴として第1に初期不整に対する敏感性，第2に局部座屈の発生があげられる。先にあげた2通りの座屈強度評価方法のうち前者は直接的ではあるが，座屈前の非線形挙動が結果に大きく影響するような場合にはそれを考慮する必要がある，単なる線形固有値計算は大きな誤差を含むことになる。また第2の特徴により板や柱の場合のような全体的な座屈形状のみを想定することは例え最低次の座屈に対してであっても不適切である。数値計算を行う立場から見れば，これは局部的な座屈波形を十分に表現し得る要素配置あるいは自由度が必要であることを意味する。この点は特に重要である。ところが大次元問題の固有値計算は非常に計算時間を要し，計算精度も一般に悪化する。また，つり合い経路による評価方法でも多数のステップでの繰り返し計算による総計算量は元数の増加と共に飛躍的に増大する。したがって，可能ならば全体構造より対称性を見出し，一部を抽出して解析することが望ましい。ただし，部分構造を取り出しての計算が有効であるためには，全体構造における場合と同じ荷重条件，変形状態が実現されるように境界条件等をモデル化する必要があり，不用意に対称性を仮定してはならない。

一般に実際のシェル構造物や試験体の境界条件を忠実に解析に導入することは非常に困難である。有限要素法で代表される数値解析においては原理的には任意の境界条件を近似し得るが実際上は個々の解析方法で表現し得る境界条件の範疇は限定される。したがって数値解析の場合も適切な境界条件のモデル化に神経を配る必要がある。特にシェル構造の場合には面外変位のみならず面内変位に関する境界条件も座屈強度評価の重要な鍵となる。

最後に，理論値または実測値の既知の問題を対象とした試験計算を行い，座屈耐荷力および座屈波形の両面から数値計算モデルの妥当性を検証しておくことが，シェルの座屈の数値計算においては必要である。

なお，実験により座屈強度を求めようとする場合には，座屈挙動を解明しようとする対象の荷重条件，境界条件を，たとえば表13.1に示すように詳細明確に把握し，形状不整や残留応力などの初期不整を測定して，得られ

る実験値がどのような条件の下でのものかを明らかにすることが、実験結果を設計に有効に役立たせる上で重要である。

13.7 今後の展望

以上述べてきたように、円筒シェルに単一荷重が作用する場合および幾つかの複合荷重が作用する場合の基本的な座屈挙動は明らかにされている^{13, 57)}。しかし実際上無視し得ない初期不整および残留応力の座屈荷重に及ぼす影響については、それらの初期不整の正確な把握自体が今後の課題であり、また弾塑性解析等の必要性もあって十分に解明されているとはいえない。液体を満たした円筒シェルの種々の荷重下での座屈挙動も明らかにされてきているが、実際の円筒シェル状貯蔵施設は複雑であり、屋根ドームの座屈、側板のリング状スチフナの効果、非一様板厚の影響なども形状や荷重条件の多様化と共にさらに検討を要する問題である。さらにわが国のような地震国においては円筒シェル状貯蔵施設や球形シェル状貯蔵施設の地震時の動的座屈安定性の問題も航空機やロケットの動的座屈問題と共に重要である。また、化学プラント等における圧力容器、高圧流体輸送パイプあるいは原子炉施設等に関連しての熱応力やクリープ座屈の問題を解明することも必要となっている。

最近では、サンドウィッチ円筒シェル、積層円筒シェル、複合材円筒シェルなどの非均一な材料の効果、せっ頭円錐シェル、せっ頭球形シェル、開口を有する円筒シェル、HP シェルなどのシェル形状変化の影響、などの解明のための研究も進められている。

円筒シェル継手部の耐荷力については本章では触れなかったが、海洋構造物との関連で各種の形式の継手につき主として実験的な検討が行われてきており、基本的な継手形式・荷重条件についてはほぼ明らかにされてきている。

参 考 文 献

13. 1) 林 毅：殻，長柱研究委員会編 弾性安定要覧，第3版，第5編，コロナ社，pp.509-686，1961.
13. 2) 林 毅：軽構造の理論とその応用，日本科学技術連盟，1966.
13. 3) C. R. C. Japan (ed.) : Shells, Handbook of Structural Stability, Part IV, Corona, pp.4/5-4/401, 1971.
13. 4) Johnston, B. G. (ed.) : Circular Tubes and Shells; Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 3rd. ed., Chap. Ten, Structural Research Council, John Wiley & Sons, pp.261-329, 1976.
13. 5) ECCS-Technical Committee 8 : Buckling of Shells; European Recommendations for Steel Construction, 2nd ed., Section 4.6, 1983.
13. 6) Gallagher, R. H. : Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Problems, Theory and Practise in Finite Element Structural Analysis, Proc. 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, pp.109-123, 1973.
13. 7) Yoshida, Y., N. Masuda and T. Nomura : A Formulation and Solution Procedure for Post-Buckling of Thin-Walled Structures, Comp. Meth. Appl. Eng., Vol. 32, pp.285-309, 1982.
13. 8) Donnell, L. H. : Some Particular Thin Shell Solutions; Beams, Plates, and Shells, Section 6.7, McGraw-Hill, pp.359-376, 1976.
13. 9) Flugge, W. : Differential Equations for Compression and Shear; Stresses in Shells, 2nd ed., Part. 8.2.1, Springer-Verlag, pp.439-448, 1973.
13. 10) 八巻 昇・児珠昭太郎：円筒殻の圧縮による座屈（第2報），座屈前変形を無視した Flugge の式による解，東北大学高速力学研究所報告，第28巻，第286号，pp.133-162，1971.
13. 11) 八巻 昇・児珠昭太郎：円筒殻の圧縮による座屈（第4報），座屈前の有限変形を考慮した Flugge 型の式による解，東北大学高速力学研究所報告，第30巻，第297号，pp.43-71，1972.
13. 12) 小林繁夫：円筒殻の圧縮座屈荷重に対する座屈前変形の影響，航空学会誌，第15巻，第163号，pp.258-263，1967年8月.
13. 13) 大平博一：軸圧縮を受ける円筒殻の座屈強度に関する最近の研究（展望），日本航空宇宙学会誌，第17巻，第187号，1969年8月.
13. 14) Clark, J. M. and R. L. Rolf : Design of Aluminum Tubular Members, Proc. ASCE, Vol. 90, No. ST 6, pp.259-289, Dec., 1964.

- 13.15) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，pp.97-98，1980年2月。
- 13.16) Marshall, P.W. : Design Criteria for Structural Steel Pipe, Column Res. Counc. Proc., 1971.
- 13.17) Schilling, C.G. : Buckling Strength of Circular Tubes, Proc. ASCE, Vol.91, No. ST 5, pp.325-348, Oct., 1965.
- 13.18) Brazier, L.G. : On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other Thin Sections, Proc. Royal Soc. London, Ser. A, Vol. 116, 1927.
- 13.19) Lundquist, E.E. : Strength Tests of Thin-Walled Duralumin Cylinders in Pure Bending, NACA TN 478, 1933.
- 13.20) Donnell, L.H. : A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders under Axial Compression and Bending, Trans. ASME, Vol. 56, pp. 795-806, Dec., 1934.
- 13.21) 津下一英：薄肉円筒殻の座屈に関する一考察（曲げ及び偏心圧縮力を受ける場合），日本建築学会論文報告集，第117号，pp.23-28，1965年11月。
- 13.22) Flugge, W. : Die Stabilität der Kreiszyllinderschale, Ing. Arcv, Bd. 3, 1932.
- 13.23) 八巻 昇・児珠昭太郎：円筒殻の捩りによる座屈（第2報），東北大学高速力学研究所報告，第22巻，第216号，pp.117-137，1966/1967.
- 13.24) 八巻 昇：円筒殻の外圧による座屈，東北大学高速力学研究所報告，第24巻，第236号，pp.37-55，1968/1969.
- 13.25) 八巻 昇：円筒殻の外圧による座屈に及ぼす座屈前変形の影響，東北大学高速力学研究所報告，第25巻，第259号，pp.153-175，1969/1970.
- 13.26) 植村益次・森田道子：直線的に変化する外圧による円筒かくの座屈，日本機械学会論文集（第1部），37巻，298号，pp.1100-1106，1971年6月。
- 13.27) 松原典宏・山本善之：円筒形圧力容器の内張り板の座屈の理論的研究，日本機械学会論文集（A編），45巻，395号，pp.780-790，1979年7月。
- 13.28) 松原典宏・山本善之：変形制限を受ける長い円筒かくの座屈の理論的研究，日本機械学会論文集（A編），48巻，426号，pp.166-176，1982年2月。
- 13.29) 児珠昭太郎・八巻 昇：各種複合荷重をうける円筒殻の座屈，東北大学高速力学研究所報告，第43巻，第388号，pp.31-55，1979.
- 13.30) 児珠昭太郎・八巻 昇：内・外圧と軸荷重を同時にうける円筒殻の座屈，日本機械学会論文集（A編），49巻，439号，pp.366-376，1983年3月。
- 13.31) 八巻 昇・内藤 潔・佐藤鋭雄：流体圧と横荷重を受ける円筒殻の座屈，東北大学高速力学研究所報告，第49巻，第426号，pp.41-59，1982.
- 13.32) 児珠昭太郎・八巻 昇：外圧と捩りを同時にうける円筒殻の座屈，東北大学高速力学研究所報告，第43巻，第389号，pp.57-76，1979.
- 13.33) 土岐 仁・八巻 昇・谷 順二：液体を部分的に満たした円筒殻の外圧座屈，日本機械学論文集（A編），48巻，434号，1291-1299，1982年10月。
- 13.34) 土岐 仁・八巻 昇・谷 順二：液体を部分的に満たした円筒殻の軸圧縮座屈，日本機械学会論文集（A編），48巻，434号，pp.1300-1309，1982年10月。
- 13.35) American Petroleum Institute, Division of Production : API Recommended Practise for the Planning, Design and Construction of Fixed Offshore Platforms, RP 2 A, Supplemented to 5th ed., 1974.
- 13.36) Baker, E. H., et al. : Shell Analysis Manual, NASA, CR-912, Apr., 1968.
- 13.37) Arbocz, J. : The Imperfection Data Bank, a Mean to Obtain Realistic Buckling Load, Buckling of Shells (ed. by Ramm, E.), Proc. of a State-of-the-Art Colloquium Univ. Stuttgart, Germany May 6-7 1982, Springer Verlag, pp.535-567, 1982.
- 13.38) Donnell, L.H. : Beams, Plates, and Shells, Chap.7, McGraw-Hill, pp.377-444, 1976.
- 13.39) Babcock, C.D. Jr. : Experiments in Shell Buckling ; Thin-Shell Structures-Theory, Experiment and Design-, Edited by Fung, Y.C. and E.E. Sechler, Chap. 14, Prentice-Hall, pp.345-369, 1974.
- 13.40) Yamaki, N., K. Otomo and K. Matsuda : Experiments on the Postbuckling Behavior of Circular Cylindrical Shells under Compression, Experimental Mechanics, pp.23-28, Jan., 1975.
- 13.41) Donnell, L.H. and C.C. Wan : Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders and Columns under Axial Compression, J. Appl. Mech., Vol.17, No.1, pp.73-83, March, 1950.
- 13.42) Batdorf, S.B. : A Symplified Method of Elastic Stability Analysis for Thin Cylindrical Shells, NACA Rep., 874, 1947.
- 13.43) 安川 度・川上 肇・吉川孝男：初期不整を有する円筒殻の崩壊強度解析—軸圧縮力を受ける短い円筒殻—，日本造船学会論文集，第153号，pp.317-323，1983年5月。
- 13.44) Budiansky, B. : Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells, Proc. IUTAM Symp. on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft, Netherland, pp.64-94, 1959.
- 13.45) Weinitschke, H.J. : On the Stability Problem for Shallow Spherical Shells, J. Math. and Phys., 38, pp.209-231,

- 1960.
- 13.46) Huang, N. C. : Unsymmetric Buckling of Thin Shallow Spherical Shells, J. Appl. Mech., pp.1447-1457, Sep., 1964.
- 13.47) 角野晃二・三井和男・小沢善隆：部分球形殻の外圧による座屈解析，日本機械学会論文集（A編），49巻，442号，pp.731-739, 1983.
- 13.48) 小久保邦男・山本善之：球かくの座屈に及ぼす境界条件の影響，日本機械学会論文集（A編），48巻，434号，pp.1310-1317, 1982.
- 13.49) 山田大彦：補剛偏平球殻の外圧による座屈とその近似解法Ⅱ；山田聖志・内山和夫・山田大彦：外圧を受ける部分殻の座屈に関する実験的研究Ⅱ軸対称初期不整と変形特性，第30回応用力学連合講演会講演論文抄録集，pp.117-118；pp.115-116, 1980.
- 13.50) Der, T. J. and Fidler, R. : A Model Study of the Buckling Behavior of Hyperbolic Shells, Proc. Inst. Civil Engineers, Vol.41, pp.105-118, Sep., 1968.
- 13.51) 末益博志・小林繁夫：周辺固定の浅い円筒形曲面板の外圧による座屈，CAS研究報告，23号，pp.9-23, 1980.
- 13.52) Ebner, H. : Theorie und Versuche zur Festigkeit von Schalenrumpfen, Lufo, Bd. 14, Nr. 3, S. 93-115, 1937.
- 13.53) Tokugawa, T. : Model Experiments on the Elastic Stability of Closed and Cross-stiffened Circular Cylinders under Uniform External Pressure, Proc. World Eng. Congr., Tokyo, Vol. 29, pp.249-279, 1929.
- 13.54) Buchert, K.P. : Zur Stabilität Grösser, Deppelt, Gekrümmter und Versteifler Schalen, Der Stahlbau, pp.55-62, Feb, 1965.
- 13.55) Buchert, K.P. : Space Frame Buckling, Eng. J., Am. Inst. Steel Constr., Vol.5, No. Oct., 1968.
- 13.56) Wright, D. T. : Membrane Force and Buckling in Reticulated Shells, Proc. ASCE, Vol.91, No. ST 1, pp.173-201, Feb., 1965.
- 13.57) Yamaki, N. : Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells, North Holland, 1984.