

第11章 ラーメン

11.1 概 説

ラーメンの安定問題としては、分岐座屈と屈服現象（弾塑性崩壊）の2種類の不安定現象が考えられる。これらの現象のどちらが起きるかは、ラーメンの形状、剛性、支点等の拘束条件、材料の強度、荷重条件などによって決る。

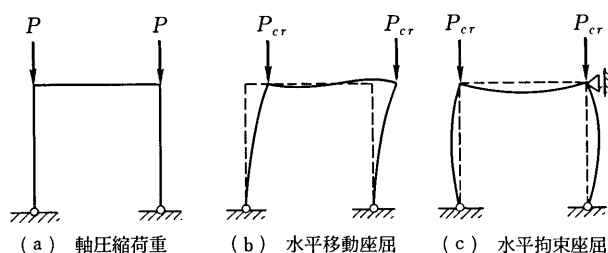


図 11.1 ラーメンの分岐座屈

ラーメンに分岐座屈が起きる代表的な例として、図 11.1(a) に示すような対称ラーメンに、柱のみに軸圧縮力が生じる対称な荷重が作用する場合を考える。荷重を増大すると、はりの水平移動が拘束されていない場合には図 11.1(b) のような逆対称の座屈変形が突然に生じ、さらに荷重を増すと変形は急激に大きくなる。一方、はりの水平移動が拘束された場合には、やはり突然に図(c) に示すような対称な曲げ変形が生じてラーメンは座屈する。座屈荷重 P_{cr} は、これらの座屈変形様式が発生するときの荷重として定義される。ラーメンにおけるこの2つの基本的な座屈形態を、本章では水平移動座屈と水平拘束座屈と呼ぶことにする。

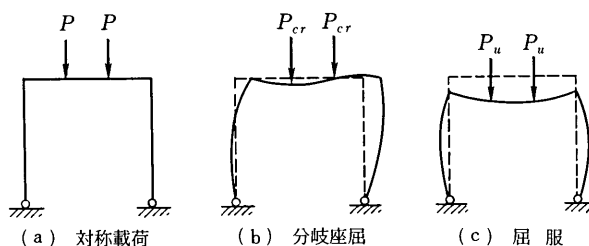


図 11.2 曲げ荷重を受けるラーメンの不安定現象

図 11.2(a) のように対称な荷重がはり上に作用して座屈前に曲げ変形の初期変形様式が生じる場合には、対称な曲げ変形に突然水平移動の座屈変形が加わって、図(b) のような非対称な形で座屈する。しかし、水平移動に対するラーメンの剛性が大きい場合には、荷重の増加とともに初期の曲げ変形が進行して部材に塑性域が進展し、図 11.2(c) の形状で弾塑性崩壊することもある。はりの水平移動が拘束された場合には、通常、図(c)

の曲げ変形が増大し、最高荷重（弾塑性崩壊荷重） P_u に達して屈服する。

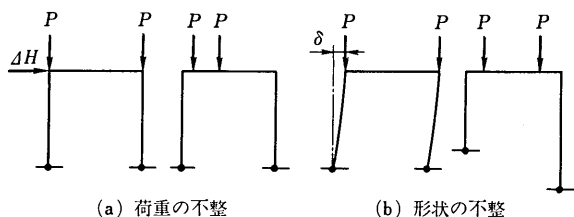


図 11.3 水平変位が生じるラーメン

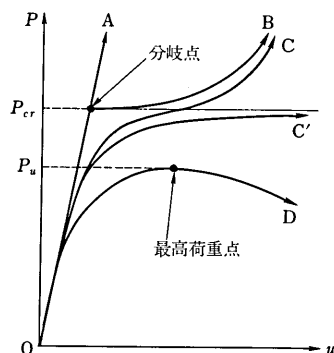


図 11.4 荷重—変位曲線

図 11.3 は、荷重または骨組形状の非対称性によって初期変形様式に水平変位が生じる場合である。このときには分岐座屈の現象は現れず、ラーメンは弾塑性崩壊する。しかし、非対称形のラーメンでも柱に軸方向圧縮力のみが作用する場合（図 11.28 参照）には分岐座屈が起きることがある。

以上の変形様式について荷重と鉛直変位 w の関係を示すと図 11.4 のようになる。直線 OA の線形弾性挙動に対して、弾性座屈が生じる場合には分岐点で変形様式が変わり、その後も弾性状態が続くならば曲線 B のように荷重と変位はともに増大する。曲線 C は、曲線 B の場合にわずかな初期不整を与えたときの弾性挙動である。塑性域が生じる場合には曲線 D のように最高荷重 P_u に達した後、不安定な平衡状態になる。

図 11.1 の場合には座屈前の変形は微小であるので、この変形を無視した通常の線形座屈解析により固有値問題を解いて弾性座屈荷重 P_{cr} を求めることができる。図 11.2(b) の場合には、座屈前に生じた変位を考慮した有限変位理論による非線形固有値解析により座屈荷重を求める。しかし、通常のラーメンでは座屈前の変位がそれ程大きくないので、非線形の平衡方程式を線形化した近似解析法を用いることができる（11.8 参照）。

図 11.4 の分岐後の曲線 B と初期不整が存在する場合の曲線 C は厳密な有限変位解析により求められる。これに対して、通常、2 次弾性解析と呼ばれている解析法^[11.11]によれば、座屈荷重に漸近する曲線 C' が得られる。曲線 C' が C に一致しない理由は、2 次弾性解析理論では幾何学的非線形性が厳密に考慮されていないためである。

曲線 D は、部材の塑性化による材料非線形性と幾何学的非線形性を考慮した弾塑性有限変位解析によって求められる。軸方向力に比べて曲げモーメントが卓越するラーメンの解析では、塑性域の取扱いを簡略化した塑性ヒンジ理論を用いることが多い^{[11.6], [11.7]}。この解析法により得られる最高荷重は真の最高荷重よりも少し大きい値になる。これは、部材軸方向の塑性域の拡がりを無視したことによる。

ラーメン構造物の設計において、全体座屈に対する安定照査は部材の応力度照査の形で行われることが多く^{[11.8], [11.9]}、その際に、全体座屈から算定される部材の有効座屈長が必要になる。そこで、本章では有効座屈長の概念とその算定法、及び有効座屈長に及ぼす種々の要因を簡単なラーメンを例にとって説明する。ラーメンの形状によっては面外座屈が起きることもあるが、本章では省略した。

弾性座屈荷重は構造物の耐荷力の上限值を与えるので設計上重要な荷重であるが、通常のラーメン構造物では非弾性領域で最高荷重に達する。そこで、非弾性座屈の計算法を 11.9 で説明する。

11.2 柱の有効座屈長

部材の有効座屈長は、この部材と同じ曲げ剛性と座屈強さをもつ両端ピン支持の中心圧縮柱の長さ l_e で与えられる。図 11.1(b) のラーメンの柱の有効座屈長を図示すれば、図 11.5 の破線の仮定の柱の長さ l_e で示される。本章では、有効長さ係数 K を用いて次式により l_e を定義する。

$$l_e = K l_c \quad (11.1)$$

ここに、 l_c はラーメンの柱の長さ（骨組長）である。

ラーメンの弾性座屈荷重 P_{cr} を柱の曲げ剛性 $E_c I_c$ と座屈係数 γ を用いて

$$P_{cr} = \gamma \frac{E_c I_c}{l_c^2} \quad (11.2)$$

と表わすことができる。また、柱の座屈軸力 N_{cr} を長さ l_e の両端ピン支持の柱のオイラー荷重 $P_E (= \pi^2 E_c I_c / l_e^2)$ に等しいと置くことにより次式が得られる。

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E_c I_c}{(K l_c)^2} \quad (11.3)$$

門形ラーメンでは $N_{cr} = P_{cr}$ より K は次式で求められる。

$$K = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\pi}{l_c} \sqrt{\frac{E_c I_c}{P_{cr}}} \quad (11.4)$$

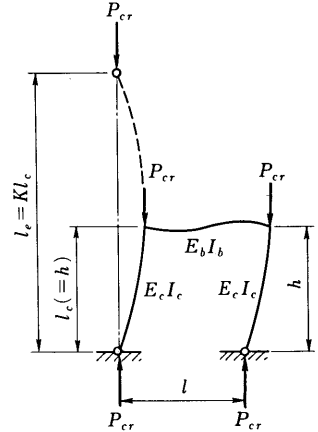


図 11.5 柱の有効座屈長

有効長さ係数 K は全体座屈解析によって求められるので、他の部材の剛性や荷重条件によって値が変わることに注意する必要がある。

次節以後で P_{cr} を求めるための座屈条件式を示すが、式の記述を簡潔にするために以下の記号を用いる。

部材の剛比は、柱の剛度 (I_c / l_c) を基準剛度として表わすことにするが、特に断わらない限り部材のヤング係数は同一とする ($E_b = E_c = E$)。図 11.5 の場合には、柱とはりの剛比 k_c, k_b は次式のようにになる。

$$k_c = 1, \quad k_b = \frac{I_b / l}{I_c / h} \quad (11.5)$$

安定関数には慣用的な記号 C, S を用いるが^(注1)、これを变形した D, F を使用することもある^{(11.1)~(11.5)}。

$$C = \frac{Z(\sin Z - Z \cos Z)}{2(1 - \cos Z) - Z \sin Z}, \quad S = \frac{Z(Z - \sin Z)}{2(1 - \cos Z) - Z \sin Z} \quad (11.6)$$

$$D = \frac{1}{Z^2}(1 - Z \cot Z), \quad F = \frac{1}{Z^2}(Z \operatorname{cosec} Z - 1) \quad (11.7)$$

ここに、 Z は部材の軸方向圧縮力 N 、部材長 l 、曲げ剛性 EI を用いて次式で与えられる。

$$Z^2 = N l^2 / EI \quad (11.8)$$

$N=0$ の場合には、周知のように $C=4, S=2, D=1/3, F=1/6$ になる。

11.3 門形・π形ラーメンの座屈

11.3.1 水平移動座屈

図 11.6 の対称な門形ラーメンではりの水平移動が拘束されていない場合の座屈条件式は次式で与えられる。

注1) 幾何剛性行列を用いたマトリックス構造解析法によって求められる座屈荷重には常に過大側の誤差が含まれるので、本章では解析的解法を用いる。

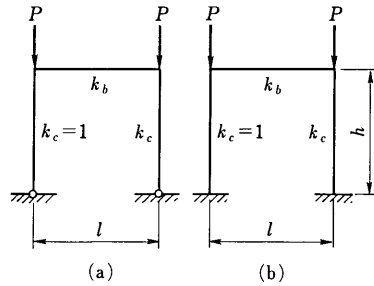


図 11.6 門形ラーメン

$$Z_c \tan Z_c = 6 k_b \quad (\text{柱脚ヒンジ}) \quad (11.9)$$

$$-Z_c \cot Z_c = 6 k_b \quad (\text{柱脚固定}) \quad (11.10)$$

ここに,

$$Z_c^2 = P_c h^2 / EI_c \quad (11.11)$$

Z_c を式 (11.4) に用いると, 有効長さ係数 K は次式で求められる.

$$K = \pi / Z_c \quad (11.12)$$

剛比 k_b の種々の値に対する K の値を表 11.1 に示す.

表 11.1 門形ラーメンの K の値 (水平移動座屈)

k_b	0	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	∞
柱脚ヒンジ	∞	4.456	3.423	2.635	2.328	2.166	2.067	2.033	2.0
柱脚固定	2.0	1.671	1.502	1.279	1.157	1.082	1.033	1.017	1.0

図 11.7 に示す対称な π 形ラーメンの水平移動座屈の座屈条件式は次のようになる^(注2).

$$Z_c \tan Z_c = 3 k_1 + 6 k_2 \quad (\text{柱脚ヒンジ}) \quad (11.13)$$

$$-Z_c \cot Z_c = 3 k_1 + 6 k_2 \quad (\text{柱脚固定}) \quad (11.14)$$

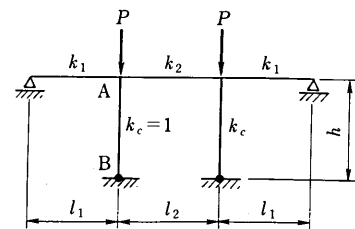
ここに,

$$k_1 = I_1 h / I_c l_1, \quad k_2 = I_2 h / I_c l_2 \quad (11.15)$$

式 (11.9) と (11.13), 及び式 (11.10) と (11.14) を比較すれば
明らかなように,

$$k_b = 0.5 k_1 + k_2 \quad (11.16)$$

と置き換えることにより, π 形ラーメンの水平移動座屈に対する K の
値は表 11.1 から求められる.

図 11.7 π 形ラーメン

11.3.2 水平拘束座屈

図 11.7 の π 形ラーメンにおいて, はりの水平移動が拘束された場合の座屈条件式は次式のようになる.

$$(3 k_1 + 2 k_2) D_c + 1 = 0 \quad (\text{柱脚ヒンジ}) \quad (11.17)$$

$$(3 k_1 + 2 k_2) + C_c = 0 \quad (\text{柱脚固定}) \quad (11.18)$$

注 2) 柱脚の●印は, ヒンジまたは固定のいずれかを表す.

ここに、 D_c , C_c には柱に対する式 (11.7), (11.6) の D , C を用いる。

はりの水平移動が拘束された門形ラーメンに対しては、式 (11.17), (11.18) において $k_1=0$, $k_2=k_b$ とおけばよい。このときの K の値を表 11.2 に示す。π形ラーメンに対しては

$$k_b = 1.5 k_1 + k_2 \quad (11.19)$$

とおいて表 11.2 の値を用いる。

表 11.2 門形ラーメンの K の値 (水平拘束座屈)

k_b	0	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	∞
柱脚ヒンジ	1.0	0.9809	0.9639	0.9225	0.8749	0.8205	0.7602	0.7320	0.6992
柱脚固定	0.6992	0.6889	0.6794	0.6555	0.6260	0.5895	0.5456	0.5243	0.5

11.3.3 近 似 式

式 (11.9), (11.10) の根 Z_c は、反復計算により数値的に求めなければならない。そこで、種々の近似式が提案されているが^{11.10)}、次式による値 $\tilde{K}$ が最も精度がよいようである。

2 ヒンジ門形ラーメン (水平移動座屈) :

$$\tilde{K} = \begin{cases} \pi \sqrt{\frac{1+2k_b}{6k_b}} & (k_b < 0.15) \\ 2 + \frac{1}{3k_b + 0.1} & (0.15 < k_b < 1.5) \\ 2 + \frac{1}{3k_b} & (1.5 < k_b) \end{cases} \quad (11.20)$$

固定門形ラーメン (水平移動座屈) :

$$\tilde{K} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{5k_b + 1} & (k_b \leq 0.8) \\ 1 + \frac{1}{6k_b + 0.2} & (k_b > 0.8) \end{cases} \quad (11.21)$$

式 (11.20) で $k_b=0.15$, 1.5 の場合には、それぞれ 2 本の式から求めた値の平均値を近似値とする。式 (11.20) による近似値の誤差は最大 0.4%，式 (11.21) では 0.8% である。

11.4 長方形ラーメンの座屈

11.4.1 近 似 公 式

種々の形式の長方形ラーメンの有効座屈長を一般的な公式で表わすことは困難であるので、次のような近似解法が用いられる^{11.1), 11.6)}。

多層ラーメンの第 i 層の柱の有効座屈長を求めるために、図 11.8 に示すような着目している柱 AB とその上下の柱及び左右 2 本ずつのはりで構成される部分構造 (図中の実線の 7 本の部材) を考える。ラーメンは部材が規則正しく配置されているものとし、その全体座屈について次の仮定が成り立つものとする。

- 1) 全体座屈が起きるときには、すべての柱が同時に座屈する。
- 2) 節点 A (または B) に作用するはりの拘束モーメントは、柱 AB とその上 (または下) の柱の剛度に比

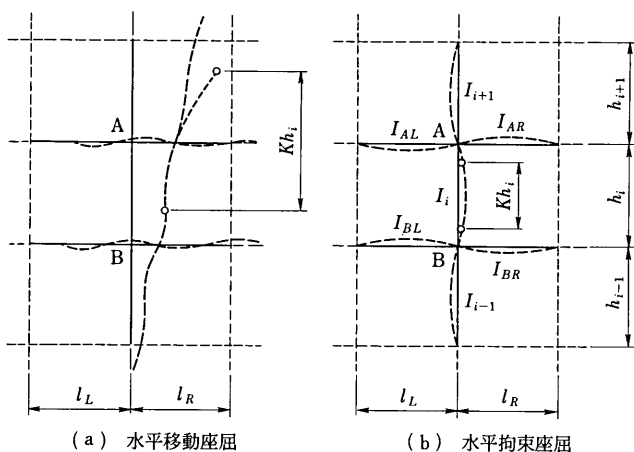


図 11.8 多層ラーメンの座屈

例して配分される。

- 3) 各層について、節点回転角は大きさが同じで向きは図 11.8(a) または (b) のようになるものとする (座屈モードの仮定)。

以上の仮定を用いると次の座屈条件式が得られる^{注3)}。

水平移動座屈：

$$\frac{G_A G_B (\pi/K)^2 - 36}{6(G_A + G_B)} = \frac{\pi}{K} \cot\left(\frac{\pi}{K}\right) \quad (11.22)$$

水平拘束座屈：

$$\frac{G_A G_B}{4} \left(\frac{\pi}{K}\right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2}\right) \left[1 - \frac{\pi}{K} \cot\left(\frac{\pi}{K}\right)\right] + \frac{2}{\pi/K} \tan\left(\frac{\pi}{2K}\right) = 1 \quad (11.23)$$

ここに、

$$G_A = \frac{I_i/h_i + I_{i+1}/h_{i+1}}{I_{AL}/l_L + I_{AR}/l_R}, \quad G_B = \frac{I_i/h_i + I_{i-1}/h_{i-1}}{I_{BL}/l_L + I_{BR}/l_R} \quad (11.24)$$

式(11.24)の剛比 G_A , G_B は、はりの両端が柱に剛結された場合の値である。一般的には、はりの他端(図 11.8 に於いて節点 A または B の他端側)の接合条件によって定まる係数 κ を用いて次式で与えられる。

$$G = \frac{\sum (I_c/h)}{\sum (\kappa I_b/l)} \quad (11.25)$$

ここに、 I_c/h は柱の剛度、 I_b/l ははりの剛度を表わし、 Σ は節点 A または B に集まる部材についての総和を表わす。また、 κ は表 11.3 に示す値である。

柱の境界条件としては次式を用いる^{注4)}。

$$\left. \begin{array}{ll} G_B = \infty & (\text{B 端ヒンジ}) \\ G_B = 0 & (\text{B 端固定}) \end{array} \right\} \quad (11.26)$$

なお、本解法は、対称ラーメンに対称荷重が作用する場合に適用されるものであることに注意されたい。

注 3) 文献 11.1) (pp.185~189) にたわみ角法による誘導が示されている。

注 4) SSRC^{11.6)} では、式 (11.26) の理論値 ∞ , 0 の代りに、 $G_B=10$, 1 の値を推奨している。

表 11.3 α の値

はりの端条件	ヒンジ	剛結	固定
水平移動座屈	0.5	1.0	0.667
水平拘束座屈	1.5	1.0	2.0

11.4.2 近似値

式 (11.22), (11.23) は K に関する超越方程式であるので, 設計計算に便利のように K を求めるためのノモグラフや計算図表が準備されている^{(11.1), (11.6), (11.7)}. ここでは, 式 (11.22) の根 K を求めるための簡便な計算式を示す.

図 11.8 の柱 AB は, 図 11.9 のような弾性支持された中心圧縮柱とみなすことができる. ここに, β_u は水平移動に対するバネ係数, β_A, β_B は回転に対するバネ係数 ($\text{kg} \cdot \text{cm}/\text{rad}$) である. β_A (または β_B) は, 前述の仮定 2), 3) より次式のように求められる.

$$\beta_A = 6EI_c/G_A h \quad (\text{水平移動座屈}) \quad (11.27)$$

$$\beta_A = 2EI_c/G_A h \quad (\text{水平拘束座屈}) \quad (11.28)$$

図 11.9 の柱の座屈条件式を求め, これに式 (11.27) を代入して $\beta_u = 0$ とおくと式 (11.22) が, 式 (11.28) を代入して $\beta_u = \infty$ とおくと式 (11.23) が得られる. また, 式 (11.22) において $G_B = \infty$ ($\beta_B = 0$), $G_A = 1/k_b$ とおくと, 2 ヒンジ門形ラーメンの水平移動座屈の式 (11.9) に一致する. そこで, 式 (11.22) の根 K の値を 2 ヒンジ門形ラーメンの水平移動座屈の有効長さ係数 K_H を修正して求めることを考える.

図 11.9 の柱の水平移動座屈による座屈荷重は, 柱の水平剛性に比例するものとする. この仮定により, 図 11.10 のような 2 本の柱の水平変位 u_K, u_H を用いると, 式 (11.22) の根 K の近似値 $\tilde{K}$ は次式で与えられる.

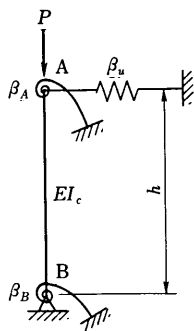


図 11.9 柱の座屈モデル

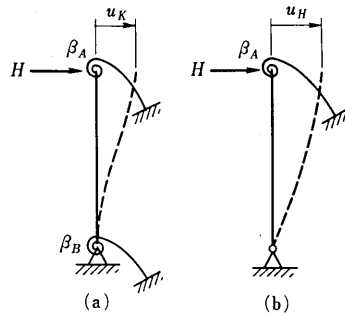


図 11.10 柱の水平変位

$$\tilde{K} = K_H \sqrt{u_K/u_H} \quad (11.29)$$

ここに,

$$\frac{u_K}{u_H} = \frac{3+2(G_A+G_B)+G_A G_B}{(2+G_A)(6+G_A+G_B)} \quad (G_A \leq G_B) \quad (11.30)$$

式 (11.29) による近似値 $\tilde{K}$ の値を表 11.4 に示す. ここで注意すべきことは, もとの式 (11.22) は G_A, G_B に関して交代式であるが, 式 (11.30) は交代式ではない. 表 11.4 からわかるように, $G_A > G_B$ の場合には誤差

表 11.4 近似値 $\tilde{K}$ の精度

G_B	G_A	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0
		近 似 値	厳 密 解	誤 差 (%)	近 似 値	厳 密 解
0.1	近 似 値	1.041	1.099	1.161	1.437	1.577
	厳 密 解	1.033	1.098	1.173	1.523	1.695
	誤 差 (%)	0.7	0.1	-1.0	-5.6	-7.0
1.0	近 似 値	1.212	1.275	1.344	1.670	1.846
	厳 密 解	1.173	1.240	1.317	1.700	1.903
	誤 差 (%)	3.3	2.9	2.0	-1.8	-3.0
10.0	近 似 値	1.720	1.816	1.928	2.572	3.017
	厳 密 解	1.695	1.790	1.903	2.558	3.010
	誤 差 (%)	1.5	1.4	1.3	0.6	0.2

が大きく、かつ、設計上危険側の値になるので、式 (11.30) では小さい方の剛比を G_A とし、 K_H には $G_A (=1/k_b)$ に対する 2 ヒンジ門形ラーメンの値 (表 11.1) を用いる^{注5)}。本解法の誤差は、実際のラーメンの剛比の範囲内 ($k_b \geq 0.1$) では 3.5% 以下である。

11.4.3 近似公式の応用

式 (11.22), (11.23) は、図 11.6 の門形ラーメンや図 11.7 の π 形ラーメンに対しては厳密な座屈条件式である。たとえば、図 11.7 について式 (11.25) の G_A を求めると

$$G_A = \frac{1}{0.5 k_1 + k_2} \quad (\text{水平移動座屈}), \quad G_A = \frac{1}{1.5 k_1 + k_2} \quad (\text{水平拘束座屈})$$

となるから、この値と式 (11.26) の G_B を式 (11.22), (11.23) に代入すると、それぞれ式 (11.13), (11.14) または式 (11.17), (11.18) に一致する。また、図 11.11 の対称箱形ラーメンに対しても厳密な式である。なお、 $G_A = G_B (=G)$ (図 11.11 では $k_a = k_b$) の場合には、式 (11.22), (11.23) を次式のような簡単な式に変形することができる。

$$3 \cot\left(\frac{\pi}{2K}\right) - G\left(\frac{\pi}{2K}\right) = 0 \quad (\text{水平移動座屈}) \quad (11.31)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2K}\right) + G\left(\frac{\pi}{2K}\right) = 0 \quad (\text{水平拘束座屈}) \quad (11.32)$$

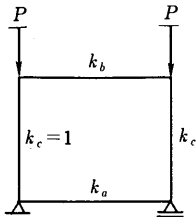


図 11.11 箱形ラーメン

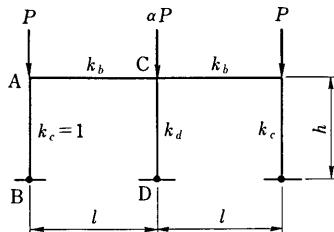


図 11.12 2 径間ラーメン

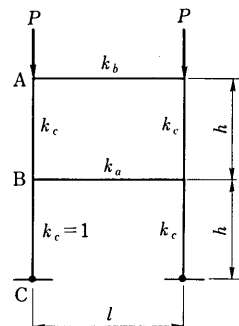


図 11.13 2 層ラーメン

注 5) K_H は式 (11.20) から算出すればよい。

図 11.12 の 2 径間ラーメンの水平移動座屈について式 (11.22) を適用してみる。柱 AB, CD について剛比 G は次式のようになる。

$$G_A = 1/k_b, \quad G_C = k_d/2k_b$$

表 11.5 2 径間ラーメンの K の値 (水平移動座屈, $k_d = \alpha = 1$)

柱 脚	k_b		0.1	0.2	0.5	1.0	5.0	10.0
ヒンジ	近似公式	柱 AB	4.456	3.423	2.635	2.328	2.067	2.033
		柱 CD	3.423	2.779	2.328	2.166	2.033	2.017
	厳密値	AB, CD	4.020	3.172	2.539	2.291	2.064	2.033
固定	近似公式	柱 AB	1.671	1.502	1.279	1.157	1.033	1.017
		柱 CD	1.502	1.329	1.157	1.082	1.017	1.008
	厳密値	AB, CD	1.610	1.441	1.242	1.139	1.032	1.016

表 11.6 2 層ラーメンの K の値 (水平移動座屈, $k_d = k_b$)

柱 脚	k_b		0.1	0.2	0.5	1.0	5.0	10.0
ヒンジ	近似公式	柱 AB	3.470	2.558	1.794	1.449	1.099	1.050
		柱 BC	6.021	4.456	3.179	2.635	2.133	2.067
	厳密値	AB, BC	4.456	3.423	2.635	2.328	2.067	2.033
固定	近似公式	柱 AB	3.470	2.558	1.794	1.449	1.099	1.050
		柱 BC	1.804	1.671	1.445	1.279	1.066	1.033
	厳密値	AB, BC	2.628	2.166	1.655	1.383	1.086	1.044

$k_d = 2k_c = 2$, 荷重比 $\alpha = 2$ の場合には, 式 (11.22) は厳密な式になり, そのときの K の値は表 11.1 に一致する。 $K_d = \alpha = 1$ の場合の近似公式による値を厳密な値と比較して表 11.5 に示す。表より, 柱 AB に対しては安全側の値になるが, 柱 CD に対しては危険側の値を与える。また, $\alpha = 1$ で $k_d < k_c$ の場合には逆の傾向を示すことがある。

次に, 図 11.13 の 2 層ラーメンについて適用してみる。上・下のはりの剛比が等しい場合を表 11.6 に示す。はりの剛比が小さい場合に誤差が大きいたことがわかる。図 11.12, 11.13 のラーメンの水平移動座屈の有効長さ係数に及ぼす部材の剛性の影響を図 11.14, 11.15 に示した。図の値は厳密な式から求めた。

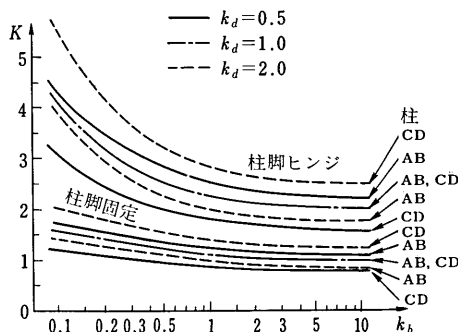


図 11.14 2 径間ラーメンの有効長さ係数 ($\alpha = 1$)

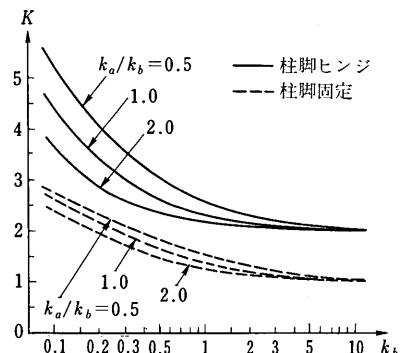


図 11.15 2 層ラーメンの有効長さ係数

一般的に、上・下端の水平移動が完全に拘束された柱の有効座屈長は、 K の定義から明らかなように骨組長よりも短くなる ($K \leq 1$, 表 11.2, 図 11.8(b) 参照). そこで実際の設計では、拘束条件の不確かさを考慮して K の値は 1 または 1 に近い値が用いられる^{11.8), 11.9)}.

11.5 変断面ラーメンの座屈

11.5.1 座屈特性とパラメータ

図 11.16 のような変断面柱の対称門形ラーメンを考える. 柱の任意点の断面 2 次モーメント I_x は、柱脚 A を原点とする座標 x の 2 次式で変化するものとする.

$$I_x = I_A(1 + \alpha \xi)^2 \quad (11.33)$$

ここに、

$$\xi = x/h, \quad \alpha = \sqrt{x} - 1, \quad x = I_B/I_A \quad (11.34)$$

であって、 I_B , I_A はそれぞれ柱の上・下端 B, A での最大・最小断面 2 次モーメントである. 式 (11.33) で与えられる断面は、上下フランジの断面積が一定で、ウェブは厚さが一定で幅が x に関して直線的に変化する H 形断面にほぼ相当する.

変断面材の有効長さ係数 K は、最大または最小断面 2 次モーメントを基準断面 2 次モーメントとして表わされることが多いが^{11.3), 11.6)}、平均断面 2 次モーメント $\bar{I}_c$ を基準値として表わす方が K の値の変動やはりの剛比の取り得る値の範囲が狭くなるので都合がよい^{11.6)}. I_A を基準断面 2 次モーメントとした場合の有効長さ係数を K , $\bar{I}_c$ を基準値とした場合を $\bar{K}$ で表わすことにすれば、これらの有効長さ係数は次式で定義される.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_A}{(Kh)^2} = \frac{\pi^2 E \bar{I}_c}{(\bar{K}h)^2} \quad (11.35)$$

ここで、 $\bar{I}_c$ を長さに沿った平均値とすると

$$\bar{I}_c = \omega I_A, \quad \omega = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{x} + x) \quad (11.36)$$

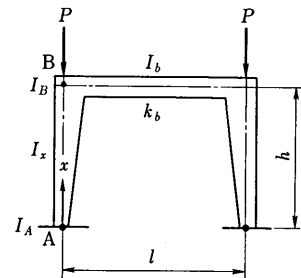


図 11.16 変断面ラーメン

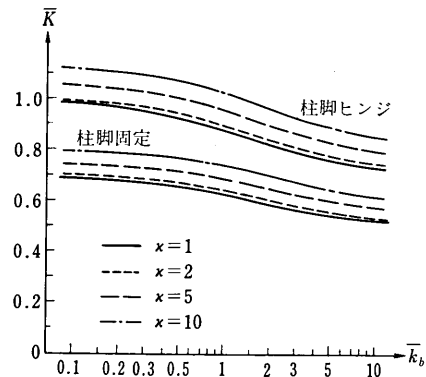
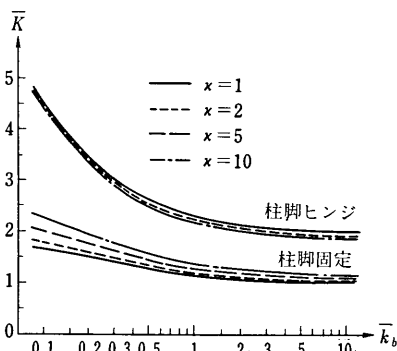


図 11.17 変断面門形ラーメンの有効長さ係数 (水平移動座屈) 図 11.18 変断面門形ラーメンの有効長さ係数 (水平拘束座屈)

注 6) I_A を基準断面 2 次モーメントとした場合には、2 ヒンジラーメンでは図 11.17 の $\bar{K}$ に対して、 $x=1$ と $x=10$ の K の値に 2 倍以上の開きがある。

となるので、 K と $\bar{K}$ には次の関係がある。

$$\bar{K} = \sqrt{\omega} K \quad (11.37)$$

同様に、はりの剛比を次式で定める。

$$k_b = \frac{I_b/l}{I_c/h}, \quad \bar{k}_b = \frac{I_b/l}{\bar{I}_c/h} = \frac{k_b}{\omega} \quad (11.38)$$

図 11.16 の門形ラーメンについて断面変化による影響を調べるために、変断面材に対するたわみ角公式^{11.6)}を用いて求めた $\bar{K}$ の値を図 11.17, 11.18 に示す。水平移動座屈に対する $\bar{K}$ の値は、等断面の値に比べて $x=10$ のときに 2 ヒンジラーメンで最大 7 % ($\bar{k}_b=\infty$) 短くなり、固定ラーメンで 35 % ($\bar{k}_b=0.1$) 長くなる。

11.5.2 近似値と等価剛性

解析的に有効長さ係数を求めることはかなり大変であるので、実用的な K の近似計算法を示す。水平移動座屈荷重は水平荷重に対するラーメンの水平剛性に比例するものと仮定すると、 K の近似値 $\bar{K}$ は次式で与えられる。

$$\bar{K} = K_0 \sqrt{u/u_0} \quad (11.39)$$

ここに、 K_0 は支点条件とはりの剛比 k_b (基準剛度は I_c/h) が同じ等断面門形ラーメンの水平移動座屈に対する有効長さ係数である (表 11.1 の値)。また、 u と u_0 は、それぞれ変断面及び等断面ラーメンの水平荷重による柱頭の水平変位であって、次式で求める。

$$\text{2 ヒンジ門形ラーメン:} \quad \frac{u}{u_0} = \frac{1+6 k_b \eta / \sqrt{x}}{1+2 k_b} \quad (11.40)$$

$$\text{固定門形ラーメン:} \quad \frac{u}{u_0} = \frac{6(1+6 k_b)(\sqrt{x} \eta + 6 k_b \xi)}{(2+3 k_b)(\sqrt{x} + 6 k_b)} \quad (11.41)$$

ここに、

$$\eta = \frac{1}{a^2} \left(1 + \sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{a} \log_e \sqrt{x} \right), \quad \xi = \frac{1}{a^2} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{x}}{a^2} (\log_e \sqrt{x})^2 \right\} \quad (11.42)$$

なお、 $\bar{K}$ に対する近似値は、 $\bar{K}$ を式 (11.37) の右辺の K に用いればよい。近似値の誤差は、 $x \leq 20$, $\bar{k}_b \leq 10$ で $\pm 6\%$ 以下である。危険側の誤差は、2 ヒンジラーメンでは $\bar{k}_b > 2$, 固定ラーメンで $\bar{k}_b > 8$ のときに生じる。

変断面材や変断面ラーメンの座屈荷重の実用的算定法として、ある等価剛性をもつ等断面材や等断面ラーメンに置換して求める方法が提案されている^{11.6), 11.8)}。この考え方を本近似手法に用いると、式 (11.39) の u を水平剛性が等価な等断面ラーメン (図 11.19) の水平変位 u^* に置き換えればよい。ただし、等価な柱の断面 2 次モーメント I_c^* は x と k_b の値によって変化するので^{注7)}、 I_c^* は数値計算によって求める必要がある。そこで、

$$I_c^* = \omega^* I_c, \quad \omega^* = (1 + \alpha \xi^*)^2 \quad (11.43)$$

とおいて、 $x \leq 10$ の範囲内で ξ^* を求めた結果は次式のようなになる。

$$\text{柱脚ヒンジ:} \quad \xi^* \doteq 0.7 \quad (\bar{k}_b \leq 10) \quad (11.44)$$

$$\text{柱脚固定:} \quad \xi^* \doteq \begin{cases} 0.2 & (\bar{k}_b \leq 0.2) \\ 0.3 & (\bar{k}_b = 0.5) \\ 0.4 & (1.5 \leq \bar{k}_b \leq 10) \end{cases} \quad (11.45)$$

0.2 $\leq \bar{k}_b \leq 0.5$, 0.5 $\leq \bar{k}_b \leq 1.5$ では、 ξ^* を直線補間で求める。

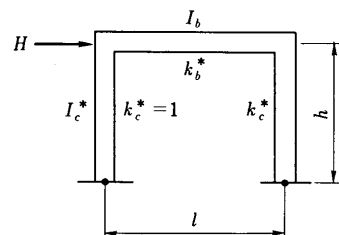


図 11.19 等価剛性ラーメン

注 7) 平均断面 2 次モーメント $\bar{I}_c$ は等価剛性を与えない。

したがって、式 (11.39) の u/u_0 の代りに次式の u^*/u_0 を用いればよい。

2 ヒンジ門形ラーメン：

$$\frac{u^*}{u_0} = \frac{\omega^* + 2k_b}{\omega^* (1 + 2k_b)} \quad (11.46)$$

固定門形ラーメン：

$$\frac{u^*}{u_0} = \frac{(1 + 6k_b)(2\omega^* + 3k_b)}{\omega^* (2 + 3k_b)(\omega^* + 6k_b)} \quad (11.47)$$

このときの近似値 K^* の誤差は、 $\kappa \leq 10$ で $\pm 5\%$ 以内である。

11.6 斜柱を有するラーメンの座屈

11.6.1 台形・ π 形ラーメン

柱が傾斜したラーメンの特徴として

- 鉛直荷重によってはりに軸方向力が生じる。
- 水平移動座屈時に、はりに部材回転角が生じる。

ことを挙げることができる。ここでは、対称な π 形ラーメンの弾性座屈について説明する。

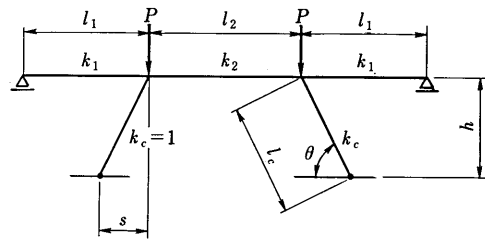


図 11.20 π 形ラーメン

図 11.20 のように、はりの水平移動が拘束されていない場合には、水平移動座屈が水平拘束座屈に先行して起きる。はりの水平移動がヒンジ支点などによって拘束された場合には対称モードで座屈するが、このときの柱の有効長さ係数 K の値は垂直柱の場合と異なり、1 より大きくなることもある。

水平移動座屈の座屈条件式は前述の b) の理由によって複雑な式になる。たわみ角法または 4 連モーメント法により、次式の座屈条件式が求められる。

$$\begin{aligned} & \left[Z_c^2 + 2k_2 \left(\frac{S}{l_2} \right)^2 Z_b^2 \right] \left\{ (1 + 3k_1 D_c)(D_b - F_b) + k_2 D_c \right\} \\ & - 3k_1 \left(1 - \frac{S}{l_1} \right)^2 (D_b - F_b) - k_2 \left(1 + \frac{2S}{l_2} \right)^2 - 3k_1 k_2 \left(\frac{S}{l_1} + \frac{2S}{l_2} \right)^2 D_c = 0 \end{aligned} \quad (\text{柱脚ヒンジ}) \quad (11.48)$$

$$\begin{aligned} & \left[Z_c^2 + 2k_2 \left(\frac{S}{l_2} \right)^2 Z_b^2 \right] \left\{ C_c + 3k_1 + k_2(C_b + S_b) \right\} + Z_c^2 - 2(C_c + S_c) - 3k_1 \left\{ 2 \left(1 - \frac{S}{l_1} \right) (C_c + S_c) + \left(\frac{S}{l_1} \right)^2 C_c \right\} \\ & - k_2 \left\{ 2 \left(1 + \frac{2S}{l_2} \right) (C_c + S_c) + \left(\frac{2S}{l_2} \right)^2 C_c \right\} (C_b + S_b) - 3k_1 k_2 \left(\frac{S}{l_1} + \frac{2S}{l_2} \right)^2 (C_b + S_b) = 0 \end{aligned} \quad (\text{柱脚固定}) \quad (11.49)$$

ここに、剛比 k_1, k_2 は柱の剛度 (I_c/l_c) を基準剛度とした値であり、 C, S 及び D, F は式 (11.6), (11.7) の安定関数である。添字 c, b は柱と中央径間のはりを表わす。また、 Z は式 (11.8) で定義された変数で、図 11.20 の荷重に対して次式のようにになる。

$$Z_c^2 = \frac{P_{cr} l_c^2}{EI_c} \operatorname{cosec} \theta, \quad Z_b^2 = \frac{P_{cr} l_b^2}{EI_b} \cot \theta \quad (11.50)$$

水平拘束座屈に対する座屈条件式は次のようになる。

$$(1 + 3k_1 D_c)(D_b + F_b) + k_2 D_c = 0 \quad (\text{柱脚ヒンジ}) \quad (11.51)$$

$$C_c + 3k_1 + k_2(C_b - S_b) = 0 \quad (\text{柱脚固定}) \quad (11.52)$$

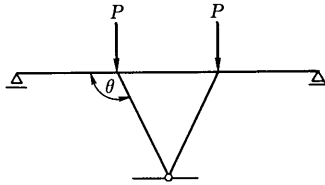


図 11.21 V形ラーメン

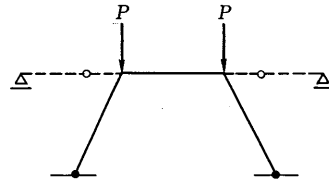


図 11.22 台形ラーメン

図 11.21 のような V 字形柱のラーメンに対しては、式 (11.48) において D_b , F_b に引張力の式^(11.2)~11.5)を用いて $\theta > \pi/2$ とすれば、以上の式がそのまま適用できる^(注8)。また、図 11.22 の台形ラーメンまたは破線の方柱ラーメンに対しては、 $k_1=0$ とおけばよい。

11.6.2 座屈特性

図 11.7 の垂直柱の π 形ラーメンでは、座屈強度に影響するパラメータははりの剛比 k_1 , k_2 の 2 個であるが、柱が傾斜した場合にはさらにラーメンの形状が影響する。図 11.20 の π 形ラーメンでは、形状に関するパラメータとして次の 3 個を選ぶことができる^(注9)。

$$\left. \begin{array}{l} \text{スパン比: } \alpha = l_1/l_2 \\ \text{柱高比: } \rho = h/l_2 \\ \text{柱の傾斜角: } \theta \end{array} \right\} \quad (11.53)$$

図 11.22 の台形ラーメンでは、上述の 5 個のパラメータのうち、 k_2 , ρ , θ の 3 個が座屈荷重に影響する。これらのパラメータの種々の値について、水平移動座屈に対する柱の有効長さ係数 K の値を図 11.23, 11.24 に示す。

これらの図より、台形ラーメンの水平移動座屈に関して剛比 k_2 の影響は門形ラーメンの場合 ($\theta=90^\circ$) と同じ傾向を有するが、 k_2 の値が小さいときには柱高比 ρ が K に著しく影響することがわかる。また、柱脚ヒンジの場合には、柱の傾斜角 θ が小さくなるにつれて K の値も小さく (式 (11.2) の座屈係数 r は、 $\theta=55\sim 60^\circ$ のとき最大に) なるが、柱脚固定の場合には、 k_2 と ρ の値がともに小さいと台形ラーメンの K の値は門形ラーメンの値よりも大きくなることもある (図 11.24(c) 参照)。

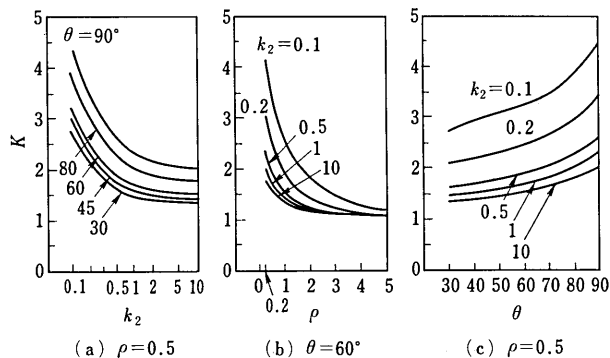


図 11.23 台形ラーメンの有効長さ係数 (柱脚ヒンジ, 水平移動座屈)

注 8) $S = h \cot \theta = -l_1/2$ とする。

注 9) 水平拘束座屈に対しては α は影響しない。

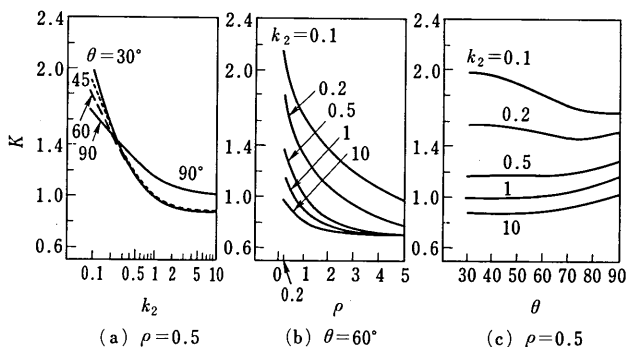


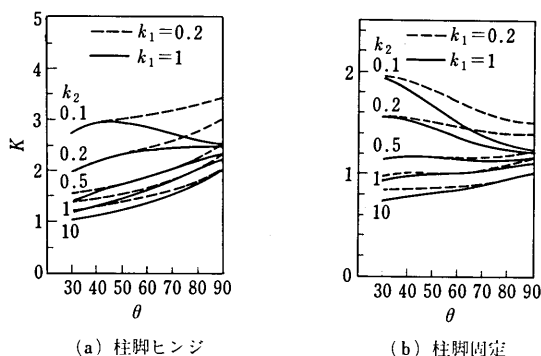
図 11.24 台形ラーメンの有効長さ係数（柱脚固定，水平移動座屈）

台形ラーメンの水平移動座屈の特徴は、先に述べたように、座屈時におけるはりの挙動が門形ラーメンと異なることである。はりの剛比 k_2 の値が小さくてラーメンの形状が偏平な場合^{注10)}には、はりが柱に先行して座屈する“はり形式”の座屈モード^{注11)}が起きるので、偏平な形状のラーメンでははりにある程度の剛性 ($k_2 \geq 0.5$) を与えて構造全体の座屈強度を確保する必要がある。

$k_2 \geq 1$ で $\rho \geq 0.2$ の場合には、実用上はりに作用する軸圧縮力を無視することができる。柱脚ヒンジの場合に、図 11.22 の荷重に対してはりの軸力を零とし、式 (11.50) と (11.53) を用いて式 (11.48) を変形すると次式が得られる。

$$Z_c \cot Z_c - \frac{Z_c^2}{6k_2} = 1 - \frac{(1 + 2\rho \cot \theta)^2}{1 + 2\rho \cot \theta \cos^2 \theta} \quad (11.54)$$

ここで、 $\theta = 90^\circ$ とすると右辺は零となって 2 ヒンジ門形ラーメンの座屈条件式 (11.9) に一致する。式 (11.54) の右辺の項ははりの部材回転角によって現われる項で、この項が斜柱の特性を表わす。式 (11.54) は 2 ヒンジ台形ラーメンの近似式であり、この式の解から求めた柱の有効長さ係数の値の誤差は $k_2 \geq 0.5$ で $\rho \geq 0.5$ のとき、または $k_2 \geq 1$ で $\rho \geq 0.2$ のときには 2 % 以下である。柱脚固定の場合に、はりの軸圧縮力を無視した近似値の誤差は、柱脚ヒンジの場合に比べて 1~4 % 大きくなる。なお、先述のはり形式の座屈モードが起きる場合には、はりに作用する軸圧縮力を無視することはできない。

図 11.25 π 形ラーメンの有効長さ係数（水平移動座屈） ($\rho = 0.5$, $\alpha = 1.0$)

注 10) $\theta < 70^\circ$ で、かつ、柱脚ヒンジの場合には $k_2 \rho \tan \theta \leq 1.0$ 、柱脚固定の場合には $k_2 \rho \leq 0.05$ のとき。

注 11) 支点移動を伴う両端固定ばりの座屈変形様式と考えることができる。

次に、図 11.20 の π 形ラーメンの座屈性状は、 k_2, ρ については台形ラーメンと同様な傾向を示すが、図 11.25 に示すように、 θ の影響は他のパラメータの値によって異なる。側径間のはりに関する 2 つのパラメータ k_1 と α の影響は、水平移動座屈では前者 3 つのパラメータに比べて小さい。図 11.26, 11.27 に k_1 と α による影響の一例を示す。

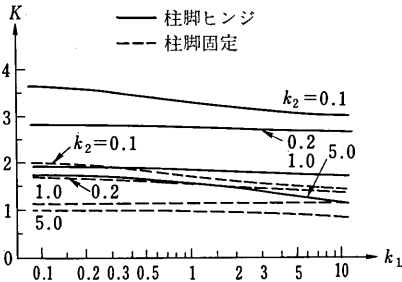


図 11.26 π 形ラーメンの有効長さ係数 (水平移動座屈)
($\rho=0.5, \alpha=1.0, \theta=60^\circ$)

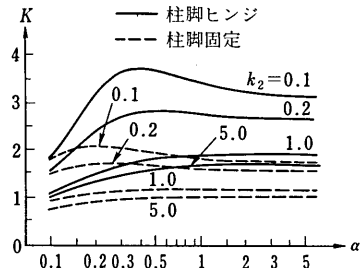


図 11.27 π 形ラーメンの有効長さ係数 (水平移動座屈)
($\rho=0.5, k_1=0.5, \theta=60^\circ$)

k_2, ρ, θ の値が同じ π 形ラーメンと台形ラーメンの水平移動座屈に対する K の値を比較すると、 $k_1 < k_2$ で、 θ の値が大きくなる程両者の K の値の差は小さくなる。 K の値はパラメータの値に拘らず π 形ラーメンの方が小さくて、 $\alpha \geq 0.2, \rho \geq 0.1, \theta \geq 30^\circ, 0.1 \leq k_i \leq 10$ ($i=1, 2$) の範囲では、柱脚ヒンジの場合は同じ支持条件の台形ラーメンの 45~100%，柱脚固定の場合は 55~100% になる。また、11.8.3 で説明する他の荷重条件を考慮しても、台形ラーメンの K の値を π 形ラーメンに用いれば設計上安全側になる。

なお、台形及び π 形ラーメンの柱の有効長さ係数 K と式 (11.2) の座屈係数 γ との関係は次式のようにになる。

$$K = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{P}{N_c}} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\sin \theta} \quad (11.55)$$

11.7 その他のラーメンの座屈

11.7.1 柱高・剛比・荷重の非対称性

11.3, 11.4 節で説明した公式は、対称ラーメンに対称荷重が作用する場合に適用できる式である。ここでは、図 11.28 のように左右の柱の長さ、剛比、軸荷重が異なる場合を考える。

図 11.28 の 2 ヒンジ門形ラーメンの座屈条件式を求めると、式 (11.7)、(11.8) の D_m, Z_m を用いて次式のようにになる。

$$\rho(\rho + \alpha) Z_c^2 \left\{ k_a(1 + 4k_b D_c) + 4k_b D_a(1 + 3k_b D_c) \right\} - 12k_b^2 (k_a D_c + \rho^2 D_a) - 4k_b k_a(1 + \rho + \rho^2) = 0 \quad (11.56)$$

ここに、 ρ は柱高比、 α は荷重比を表わし、添字は図に示すとおりである。ここで $\rho = \alpha = k_a = 1$ とおけば、式 (11.56) は水平移動座屈と水平拘束座屈に対する式 (11.9) と (11.17) の積に因数分解することができるので^{注12)}、水平移動を伴う非対称座屈を表わすことがわかる。

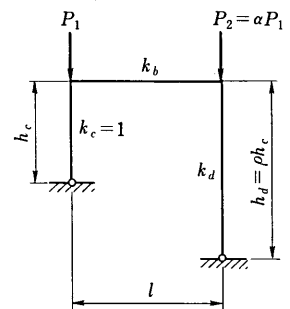


図 11.28 非対称門形ラーメン

注 12) 式 (11.17) において、 $k_1=0, k_2=k_b$ とする。

非対称座屈の計算は面倒であるので、種々の近似解法が提案されている^{11.6), 11.8)}。本節では、対称ラーメンの有効長さ係数を補正して、2 ヒンジ及び固定の非対称門形ラーメンの近似値 $\tilde{K}$ を求める方法を説明する。

まず、図 11.6 の対称門形ラーメンに作用する荷重を P_0 とすれば、ラーメンに作用する全荷重が等しくなるように図 11.28 の荷重を修正する。したがって、次式を得る。

$$P_1 = \frac{2}{1+\alpha} P_0, \quad P_2 = \frac{2\alpha}{1+\alpha} P_0 \quad (11.57)$$

次に、柱の剛比 k_d ($\neq k_c$) に対する補正は、式 (11.29) と同じように水平荷重による水平変位によって行えば極めて精度のよい K の近似値が求められる。しかし、柱の長さが異なる場合には精度が落ちるので^{注13)}、水平変位の代りに2本の柱の部材回転角 R_c, R_d の平均値 $\bar{R}$ を用いることにする。対称ラーメンの諸量に添字 0 を付けて表わすことにすれば、座屈荷重の近似値 $\tilde{P}_{1,cr}, \tilde{P}_{2,cr}$ は次のようになる。

$$\tilde{P}_{1,cr} = \frac{2}{1+\alpha} \frac{R_0}{\bar{R}} P_{0,cr}, \quad \tilde{P}_{2,cr} = \alpha \tilde{P}_{1,cr} \quad (11.58)$$

上式を式 (11.4) に代入すると、柱 c, d の有効長さ係数の近似式 $\tilde{K}_c, \tilde{K}_d$ が求められる。

$$\tilde{K}_c = \frac{K_0}{2} \sqrt{x\rho(1+\rho)(1+\alpha)}, \quad \tilde{K}_d = \tilde{K}_c \sqrt{\frac{k_d}{\alpha\rho}} \quad (11.59)$$

ここに、 K_0 は支点条件とはりの剛比 k_b が同じ対称ラーメンの有効長さ係数 (表 11.1 の値) である^{注14)}。また、 x は次式で与えられる。

2 ヒンジ門形ラーメン：

$$x = \frac{4(1+k_b)(k_b+k_d)-k_d}{(1+2k_b)\{k_b(k_d+\rho^2)+k_d(1+\rho+\rho^2)\}} \quad (11.60)$$

固定門形ラーメン：

$$x = \frac{1+6k_b}{2+3k_b} \cdot \frac{4(1+k_b)(k_b+k_d)-k_b^2}{(k_b+k_d+3k_b^2+k_bk_d)(k_d+\rho^2)+3k_bk_d(1+\rho+\rho^2)} \quad (11.61)$$

表 11.7 非対称門形ラーメンの K の値

k_d	α	ρ	k_b	柱 脚 ヒ ン ジ			柱 脚 固 定		
				0.1	1.0	10.0	0.1	1.0	10.0
5.0	1.0	1.0	$\tilde{K}_c$	4.301	1.923	1.311	1.067	0.826	0.646
			K_c	4.295	1.907	1.310	1.079	0.835	0.650
			K_d	9.605	4.264	2.930	2.412	1.867	1.454
1.0	5.0	1.0	$\tilde{K}_c$	7.718	4.032	3.522	2.895	2.003	1.761
			K_c	7.718	4.045	3.537	2.906	2.008	1.768
			K_d	3.452	1.809	1.582	1.300	0.898	0.791
1.0	1.0	5.0	$\tilde{K}_c$	5.326	2.670	2.214	1.847	1.301	1.106
			K_c	5.332	2.715	2.233	1.854	1.382	1.161
			K_d	2.385	1.214	0.999	0.829	0.618	0.519
5.0	5.0	1.0	$\tilde{K}_c$	7.449	3.331	2.271	1.848	1.431	1.120
			K_c	7.432	3.229	2.208	1.865	1.448	1.101
			K_d	7.432	3.229	2.208	1.865	1.448	1.101

注 13) $\rho \neq 1$ の場合でも、左右の柱の水平変位が等しいことによる。

注 14) K_0 は、式 (11.20)、(11.21) から求めることができる。

柱の剛比 k_a , 荷重比 α , 柱高比 ρ をそれぞれ5倍にしたときの近似値 $\bar{K}_c$ と厳密な値 K_c , K_d を表11.7に示す. 柱 d の近似値 $\bar{K}_d$ の精度は $\bar{K}_c$ の精度と同じであるので省略した^(注15). k_a と α の非対称性による近似値の誤差は1%以下である. ρ に対しては最大で6%の誤差がある. また, k_a と α の両方を5倍にしても誤差は3%以下であるが, さらに ρ も5倍にすると, 安全側(過大評価)の値ではあるが誤差は30~36%になる.

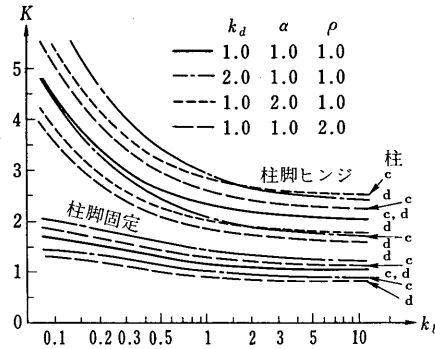


図11.29 非対称門形ラーメンの有効長さ係数

非対称性を2倍にした場合の厳密な値を対称な場合の値と比較して図11.29に示す. 図より, 片方の柱の有効座屈長は対称ラーメンの値より長くなることが分る.

非対称な多層ラーメンや多径間ラーメンについて, K の近似値を求める算法が文献11.8)に示されているので参照されたい.

11.7.2 柱脚の固定度の影響

柱脚の固定度の不完全さによる影響を調べるために, 図11.30に示すような回転ばねで拘束された2ヒンジ門形ラーメンを考える.

このラーメンの座屈条件式は, $G_A = 1/k_b$,

$$G_B = 6EI_c/h\beta \equiv 6/\beta' \quad (\text{水平移動座屈}) \quad (11.62)$$

$$G_B = 2EI_c/h\beta \equiv 2/\beta' \quad (\text{水平拘束座屈}) \quad (11.63)$$

を式(11.22)または式(11.23)に代入して求められる. ここに, β' はばね係数 β ($\text{kg} \cdot \text{cm}/\text{rad}$) を柱の曲げ剛性 EI_c で無次元化したものである.

柱の有効長さ係数 K に及ぼす回転ばねの影響を調べるために, 2ヒンジと固定ラーメンの有効長さ係数 K_H , K_F を用いて次式の μ を定義する.

$$\mu = \frac{K - K_F}{K_H - K_F} \times 100 \quad (\%) \quad (11.64)$$

μ は β' の値 ($0 < \beta' < \infty$) によって0~100%まで変化する. β' の値を変えて計算した結果を図11.31, 11.32に示す. 図より, 柱脚がほぼ固定支持されたものと見なせるためには, β' の値は水平移動座屈で20以上, 水平拘束座屈で50以上なければならないことが分る.

なお, 水平移動座屈における K の近似値 $\bar{K}$ は, 式(11.29)から求めることができる.

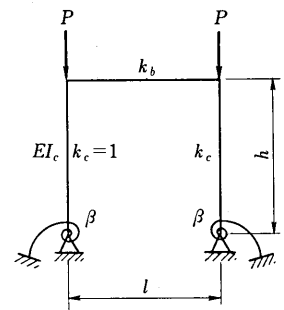


図11.30 回転ばねを有する門形ラーメン

注15) 式(11.59)の第2式は厳密な関係式である.

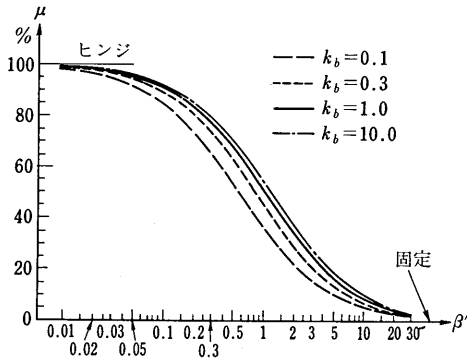


図 11.31 回転ばねの影響 (水平移動座屈)

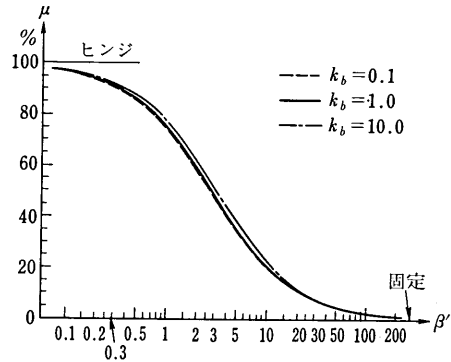


図 11.32 回転ばねの影響 (水平拘束座屈)

11.7.3 筋かいの補剛効果

水平移動座屈に対する筋かいの補剛効果を，図 11.33 の門形ラーメンについて調べる。座屈解析においては，座屈時に圧縮力を受ける方の筋かいを無視するものとし，1本の筋かいの換算剛性 γ_b を次式で表わすことにする。

$$\gamma_b = \frac{Al^2}{I_c} \sin^3 \theta \quad (11.65)$$

ここに， A は筋かいの断面積， I_c は柱の断面 2 次モーメントである。

柱の有効長さ係数 K と γ_b の関係を図 11.34，11.35 に示す。図中の記号 K_A は筋かいがない場合の水平移動座屈に対する値 (表 11.1) である。 γ_b を大きく

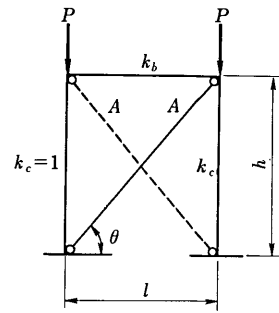


図 11.33 筋かい付ラーメン

すると， K は水平拘束座屈の値 K_s に近づく。水平移動座屈が起きないために必要な最小剛性 γ_b^* を解析的に求めると次式のようになる。

$$\gamma_b^* = 6k_b + 2(\pi/K_s)^2 \quad (\text{柱脚ヒンジ}) \quad (11.66)$$

$$\gamma_b^* = \left(\frac{\pi}{K_s}\right)^2 \left(\frac{1+6k_b}{1-(\pi/K_s) \cot(\pi/K_s)} - 1 \right) \quad (\text{柱脚固定}) \quad (11.67)$$

上記の γ_b^* を用いた場合には K は 1 より小さくなるが (表 11.2 の値)，有効座屈長が柱の長さ h に等しくなるための筋かいの必要剛性 γ_{b0} は，座屈条件式に $Z_c = \pi (K=1)$ を代入して次の値が求められる。

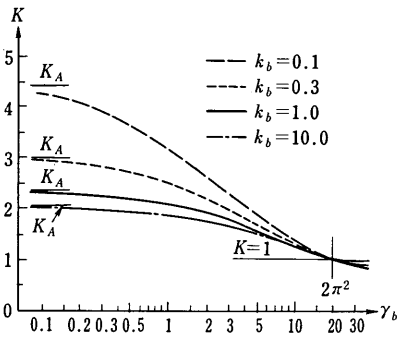


図 11.34 筋かいの補剛効果 (柱脚ヒンジ)

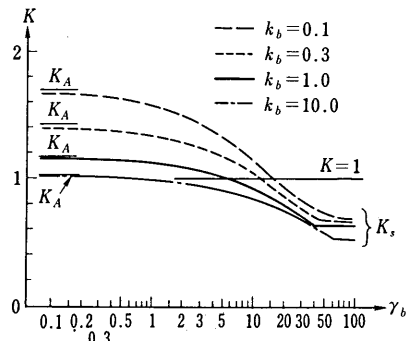


図 11.35 筋かいの補剛効果 (柱脚固定)

$$\gamma_{b0} = 2\pi^2 \quad (\text{柱脚ヒンジ}) \quad (11.68)$$

$$\gamma_{b0} = \frac{2\pi^2}{1 + 24 k_b / \pi^2} \quad (\text{柱脚固定}) \quad (11.69)$$

柱脚ヒンジの場合には γ_{b0} は γ^* よりさほど小さくないが、柱脚固定の場合にはかなり小さい (図 11.34, 11.35 参照)。設計では、初期たわみ等による影響を考慮して、上記の理論値よりも大きい値を用いる。

11.8 曲げ荷重を受けるラーメンの座屈

11.8.1 曲げ荷重による座屈

本節では、図 11.2(a) のようなはりに上に作用する荷重によって、座屈前に対称な曲げ変形の生じたラーメンが、図 11.2(b) のように水平移動座屈する場合について説明する。

この種の座屈の特徴は、座屈前に次の諸量が生じることである。

- a) 柱が垂直なラーメンでもはりに軸方向力が生じる。
- b) 各部材に初期曲げモーメントが生じる。
- c) 形状によっては、節点変位や部材回転角が生じる。

a) のはりに生じる軸方向力の影響は、11.6 で説明した台形及び π 形ラーメンのように容易に考慮することができるので、曲げ荷重による座屈解析の近似解法として、a) のみを考慮した解法が用いられることがある。

b) の初期曲げモーメントによる影響は、2 ヒンジ門形ラーメンについて Chwalla^{11.11)}、Lu^{11.12)} が調べており、山形ラーメンについての藤本^{11.13)} の研究があるが、c) の影響は正確に評価されていない。ここでは、これらの影響をすべて考慮した文献 11.14) による解析法を用いて初期曲げ変形の影響を調べることにする。

この解析法では通常の線形座屈理論によるたわみ角法や 4 連モーメント法において、座屈時における軸方向力の変化 (増分) を考えることにより、初期曲げ変形による影響を考慮することができる。

11.8.2 門形ラーメン

はりに上に荷重が作用する場合の座屈条件式は次のようになる^{11.14)}。

柱脚ヒンジ：

$$Z_c \cot Z_c + \frac{2Ph}{Hl} \left(\frac{Z_b}{2} \cot \frac{Z_b}{2} - 1 \right) + \frac{Hh}{Pl} \left(2 - Z_c \cot Z_c - Z_c^2 \operatorname{cosec}^2 Z_c \right) = 0 \quad (11.70)$$

柱脚固定：

$$Z_c \tan Z_c + \frac{2Ph}{Hl} \left(1 - \frac{Z_b}{2} \cot \frac{Z_b}{2} \right) - \frac{Hh}{Pl} (2 + Z_c \tan Z_c - 2 \sec Z_c) + \frac{M_A}{Pl} Z_c (\tan Z_c - Z_c \sec Z_c) = 0 \quad (11.71)$$

ここに、

$$Z_b^2 = \frac{Hl^2}{EI_b}, \quad Z_c^2 = \frac{Ph^2}{EI_c} \quad (11.72)$$

P は、はりに上に作用する任意な対称荷重の総量の $1/2$ ^{11.16)}、 H は水平反力、 M_A は左側の支点 A に生じる固定端モーメントで時計回りを正とする。

はりに上に荷重が作用する場合には、剛比 k_b のほかにラーメンの形状比 $\rho (=h/l)$ と荷重の分布状態が座屈荷重に影響する。荷重条件は、はりの中央点に集中荷重 $2P$ を載荷する場合が最も影響が大きいため、この場合

注 16) 全載等分布荷重 q が作用する場合には、 $P = ql/2$ である。

について計算した結果を表 11.8 に示す。各欄の上段の数値は有効長さ係数 K ，下段の数値は柱頭載荷の表 11.1 の値に対する増加率（％）である。

表 11.8 曲げ荷重による門形ラーメンの K の値

ρ \ k_b		柱 脚 ヒ ン ジ					柱 脚 固 定				
		0.1	0.3	1	3	10	0.1	0.3	1	3	10
0.5	K	4.608	3.071	2.366	2.137	2.045	1.953	1.502	1.158	1.045	1.012
	%	3.4	2.1	1.6	1.2	0.6	16.8	7.4	0.1	-0.9	-0.4
1	K	4.498	3.037	2.362	2.136	2.045	1.715	1.406	1.142	1.044	1.012
	%	0.9	1.0	1.5	1.2	0.6	2.6	0.5	-1.3	-1.1	-0.4
2	K	4.471	3.029	2.361	2.136	2.045	1.673	1.386	1.139	1.044	1.012
	%	0.3	0.7	1.4	1.2	0.6	0.1	-0.9	-1.6	-1.1	-0.4

ρ と k_b が共に小さい場合に K の値が大きくなるが、その増加率は柱脚ヒンジの場合で最大 3.4%（座屈荷重は 6.9% 減少）である。柱脚固定で $\rho=0.5$ ， $k_b=0.1$ の場合に大きな増加率が認められるが、このような特別の場合を除けば増加率は無視できるほど小さい。

前述 b) の初期曲げモーメントの影響を調べるために、図 11.36 に示すように全鉛直荷重を 2 分して柱頭に載荷し、水平反力（すなわち、はりに作用する軸圧縮力）に等しい荷重をはりの両端に加えて各部材に軸方向力のみが生じるようにすると、b) の影響を無視したことになる。この近似解法による座屈条件式は、式 (11.70)、(11.71) において下線の項を省略したものである。

この近似解法で求めた有効長さ係数の誤差は表 11.8 のすべての場合について $\pm 2\%$ 以下であるので、門形ラーメンでは、はりの初期軸力を考慮すれば初期曲げモーメントによる影響を無視することができる。

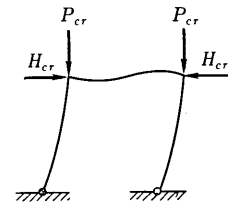


図 11.36 軸圧縮荷重

11.8.3 π 形ラーメン

図 11.20 の柱脚ヒンジの π 形ラーメンにおいて、はり上に対称な荷重が作用する場合の水平移動座屈に対する座屈条件式は次のようになる^{11,14)}。

$$\begin{aligned} \text{式 (11.48) の左辺} = & \frac{M_c}{N_c l_2} \sin \theta (2 - Z_c \cot Z_c - Z_c^2 \operatorname{cosec}^2 Z_c) \left[\frac{V_A}{N_c} \sin \theta \left\{ 3 k_1 (D_b - F_b) + k_2 \right\} \right. \\ & \left. - 3 k_1 \left(1 + \frac{l_2}{2 l_1} \right) \left\{ D_b - F_b - \frac{k_2}{Z_c^2} \left(\frac{S}{l_1} + \frac{2 S}{l_2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (11.73)$$

ここに、 V_A は柱脚部に作用する鉛直反力、 N_c は柱の軸圧縮力、 M_c は柱の材端モーメントで時計回りを正とする。

π 形ラーメンでも剛比と式 (11.53) の形状に関するパラメータのほかに荷重状態が座屈荷重に影響する。そこで、これらの影響を調べるために次の 3 つの場合について計算する。

- ① 柱頭に集中荷重 P を作用させた場合（図 11.20）。
- ② はり上の荷重による軸圧縮力を考慮し、初期曲げモーメントの影響を無視した場合。
- ③ 初期曲げモーメントを考慮した場合。

上記②、③では、中央径間の中央点に集中荷重 $2P$ を載荷した。②は式 (11.73) で $M_c=0$ とした値、③は式

(11.73) による値である。はりの断面が一定で等径間の場合 ($\alpha=k_1=1$) についてこれらの値を図 11.37 に示す。

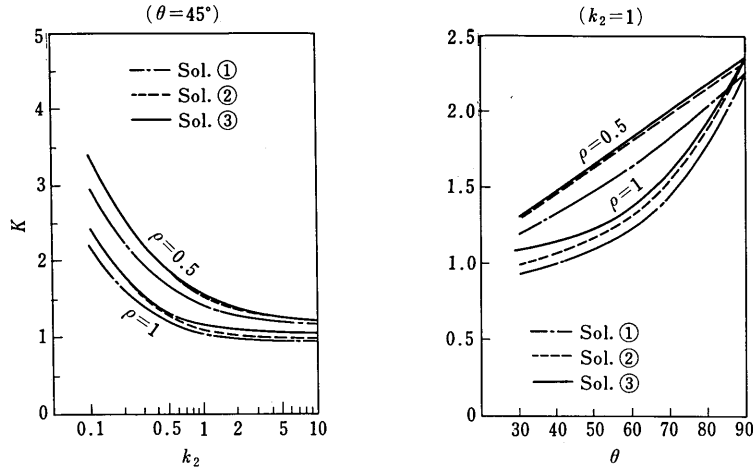


図 11.37 π 形ラーメンの有効長さ係数 ($\alpha=k_1=1$)

初期曲げモーメントによる影響 (②と③の差) は θ が小さい程, また ρ と k_2 が大きい程大きく現われて, 図の値では $\theta=30^\circ$, $\rho=k_2=1$ のときに K は最大 11% 増大する. また, $\rho=2$ のときには, $\theta=30^\circ$, $k_2 \geq 0.3$ で 20%, $\theta=45^\circ$, $k_2 \geq 0.5$ で 17% 程 K は増大するが, このときの K の値は小さくて 1.1 以下である。

次に, 荷重位置によって柱とはりに生じる軸圧縮力の違いによる影響 (①と②の差) は, $\theta=45^\circ \sim 60^\circ$ のときに最も大きく現れて, かつ, ρ と k_2 が小さいほど②による K の値は①の値よりも大きくなる. この差は図 11.37 では 5~15% であるが, ρ と側径間のはりの剛比 k_1 の値がともに小さいときに差は大きくなる. 特に, $k_1=0$ (台形ラーメン) で $\rho=0.2$ のとき, $k_2=1$ で 20%, $k_2=0.5$ で 25% (座屈係数 γ の値では 44% と 56%) の差がある。

以上のように, はりの剛比が小さくて扁平な π 形や台形ラーメンでは, はり上載荷による影響は無視できないことがわかる. しかし, 初期曲げモーメントによる影響は一般的に小さい。

11.8.4 山形ラーメン

図 11.38(a) に示す山形ラーメンでは, 曲げ変形により座屈前に部材回転角が生じる. 柱脚ヒンジの場合に, 座屈前に生じるはりと柱の軸圧縮力 N_b , N_c , 節点 C, D の曲げモーメント M_c , M_b , 柱の部材回転角 R_c (これは荷重 P による線形値) を考慮した水平移動座屈に対する座屈条件式は次のようになる^{11.14)}。

$$\left(1 + \frac{2h}{l} R_c\right) \left[Z_c \cot Z_c + \frac{N_c h}{N_b S} (Z_b \cot Z_b - 1) \right] - \frac{2h}{l} R_c - \frac{M_c}{N_c l} (2 - Z_c \cot Z_c - Z_c^2 \operatorname{cosec}^2 Z_c) - \frac{N_c h f}{N_b S^2} \left[\frac{M_c}{N_b l} (2 - Z_b \cot Z_b - Z_b^2 \operatorname{cosec}^2 Z_b) - \frac{M_b}{N_b l} (2 - Z_b \operatorname{cosec} Z_b - Z_b^2 \cos Z_b \operatorname{cosec}^2 Z_b) \right] = 0 \quad (11.74)$$

ここに,

$$Z_b^2 = \frac{N_b S^2}{EI_b}, \quad Z_c^2 = \frac{N_c h^2}{EI_c} \quad (11.75)$$

図 11.38(a) に対して、荷重 P による軸力 N_b, N_c を荷重として図(b) のように作用させて軸圧縮力のみを考慮した場合の座屈条件式は次式で与えられる。

$$Z_c \cot Z_c + \frac{N_c h}{N_b S} (Z_b \cot Z_b - 1) = 0 \quad (11.76)$$

山形ラーメンの座屈には次の 3 つのパラメータが影響する。

$$k_b = \frac{I_b/S}{I_c/h}, \quad \eta = \frac{f}{l}, \quad \rho = \frac{h}{l} \quad (11.77)$$

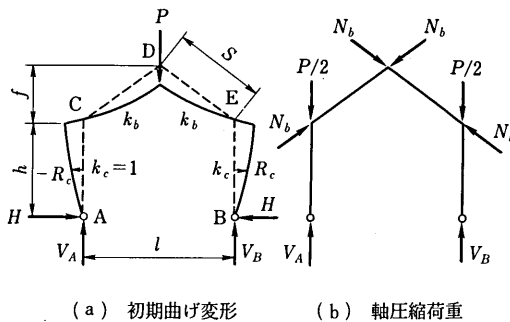


図 11.38 山形ラーメン

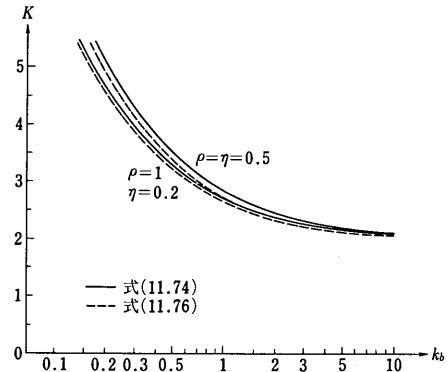


図 11.39 山形ラーメンの有効長さ係数

有効長さ係数に及ぼすパラメータの影響を図 11.39 に示す。形状に関するパラメータ η, ρ が 0.2～2 の範囲では、その影響は小さい。図の実線と破線の差は初期曲げ変形による影響である。 ρ の値が小さくて η の値が大きい程大きくなり、 $k_b \approx 1 \sim 3$ のときに最大になるが 5 % 以下である。ただし、はりの軸圧縮力を無視した場合の誤差は 20 % になることもある。したがって、図 11.38(b) の荷重による近似値でかなり精度のよい有効長さ係数を求めることができる。

11.9 ラーメンの耐荷力

11.9.1 $P-\delta$ 効果

図 11.40 に示す門形ラーメンのように、鉛直荷重 P のほかに水平力 H が作用すると柱頭に水平変位 δ が生じるので、柱には付加モーメント $P\delta$ が加わるためにラーメンの耐荷力は低下する。このような変形によって耐荷力が低下する現象を $P-\delta$ 効果という。ここでは、材料の弾性状態を仮定して、この効果による影響を調べてみる。

柱とはりの軸方向力による剛性の低下と力の釣合い条件に柱の部材回転角の影響 ($P-\delta$ 効果) を考慮した解析によって^{11.1)}、水平変位 δ と柱頭の曲げモーメント M は次式のように求められる。

$$\delta = \frac{Hh^3}{2EI_c} \cdot \frac{(D_b - F_b) + k_b D_c}{A}, \quad M = \frac{Hh}{2} \cdot \frac{k_b}{A} \quad (11.78)$$

$$A = k_b - Z_c^2 \left\{ (D_b - F_b) + k_b D_c \right\} \quad (11.79)$$

ここに、 D, F, Z は式 (11.7), (11.8) で与えられる関数で、添字 b, c はそれ

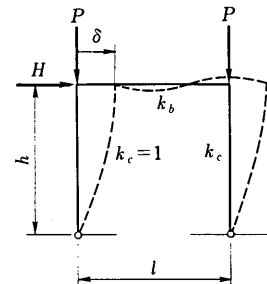


図 11.40 水平荷重を受ける門形ラーメン

それはりと柱を意味する。なお、式(11.78)では左右の柱の軸方向力の違いを無視して同一の D_c , Z_c を用いている。

ここで、軸方向力 N_b , N_c による剛性の低下を無視し、さらに変形は小さいものと考えて近似的に次式を用いる。

$$N_b \doteq H/2, \quad N_c \doteq P, \quad D=1/3, \quad F=1/6 \quad (11.80)$$

また、式(11.20)の第1式の $\tilde{K}$ を式(11.3)の K に用いると、鉛直荷重 P のみを受ける場合の座屈荷重の近似式 $\tilde{P}_{cr}$ として次式が得られる。

$$\tilde{P}_{cr} = \frac{EI_c}{h^2} \cdot \frac{6k_b}{1+2k_b} \quad (11.81)$$

式(11.80), (11.81)を式(11.78)に用いると、 $P-\delta$ 効果を考慮した水平変位と曲げモーメントの近似式が求められる。

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta_0}{1 - P/\tilde{P}_{cr}}, \quad \tilde{M} = \frac{M_0}{1 - P/\tilde{P}_{cr}} \quad (11.82)$$

ここに、 δ_0 , M_0 は微小変位理論による値であって、次のようになる。

$$\delta_0 = \frac{Hh^3}{2EI_c} \cdot \frac{1+2k_b}{6k_b}, \quad M_0 = \frac{Hh}{2} \quad (11.83)$$

式(11.82)は一般の骨組構造物についても近似的に成り立つものと考えられ、鋼構造物の設計に用いられている^{11.1), 11.6)~11.9)}。式(11.78)のような付加モーメントの影響を考慮した解析を2次弾性解析と呼び、微小変位理論による線形解析を1次弾性解析という^{11.1)}。これらの解析理論に対して変形による影響を厳密に考慮した解析を有限変位解析(または3次弾性解析)という。

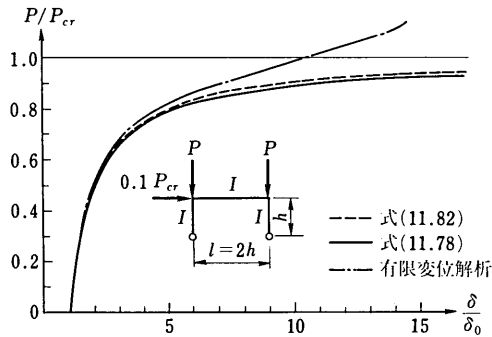


図 11.41 $P-\delta$ 効果

式(11.78), (11.82)の精度を調べるために、マトリックス法による有限変位解析の結果と比較して図11.41に示す。数値計算では水平荷重 $H (=0.1 P_{cr})$ を一定にしたままで鉛直荷重 P を漸増した場合の柱頭の水平変位 δ を求めた。式(11.82)の $\tilde{P}_{cr}$ には正確な値 P_{cr} を用いた。本計算例では、式(11.82)の値は式(11.78)に極めてよく一致しているが、水平荷重が大きくてはりの剛比が小さい程誤差は大きくなる。

11.9.2 非弾性座屈

非弾性領域におけるラーメンの座屈荷重は、次の方法で求めることができる。

- ① 圧縮材の耐荷力曲線を用いる方法。
- ② 材料の非弾性特性を考慮した弾性係数を用いた固有値解析による方法。

③ 弾塑性有限変位解析を用いる方法.

①の方法は、弾性座屈解析によって得られた有効座屈長から柱の細長比を求め、これを非弾性挙動を考慮した圧縮材の耐荷力曲線に用いて非弾性座屈荷重を求める最も簡単な手法である。

②は、弾性座屈解析の式において、弾性係数 E の代りに接線係数 E_t を用いて通常の固有値計算により座屈荷重を求める。接線係数理論 (5.2.4 参照) により、初期不整のない柱の非弾性座屈荷重 (接線係数荷重) P_t を求めることができる。この方法では E_t が未知であるので繰り返し計算が必要になるが、座屈条件式は弾性座屈解析の式と同じであるので計算は比較的簡単である。

はりに荷重が作用して軸方向に E_t が変化する場合や座屈前の変形が大きい場合には、①、②の手法では正確な座屈荷重は求められない。このような場合には、ひずみ増分理論を用いた③の解析法によりラーメンの非弾性挙動を逐次追跡し、荷重—変位径路上の特異点 (マトリックス法では、接線剛性行列が特異になる点) を求めることによって非弾性座屈荷重が得られる^{注17)}。この解析法は最も正確ではあるが高度の数値計算手法を要するので、あまり実用的ではない。ここでは、②の手法について説明する。

弾性係数 E とパラメータ τ を用いて接線係数 E_t を次式で与える。

$$E_t = \tau E \quad (11.84)$$

座屈時には、はり弾性で柱のみに非弾性域が生じるものとする、式 (11.5) のはりの剛比 k_b と式 (11.8) の柱のパラメータ Z_{ct} は次式のようになる。

$$k_{bt} = \frac{E_b I_b / l}{E_{ct} I_c / h} = \frac{1}{\tau} k_b, \quad Z_{ct}^2 = \frac{N_c h^2}{E_{ct} I_c} \quad (11.85 \text{ a, b})$$

ここに、 E_{ct} は柱の接線係数、 k_b は柱を弾性状態としたときのはりの剛比である。

座屈係数を γ_t として、接線係数荷重 P_t を次式で定義する。

$$P_t = \gamma_t \frac{E_{ct} I_c}{h^2} \quad (11.86)$$

式 (11.85) を弾性の座屈条件式に用いて $k_b' (= k_b / \tau)$ に対する有効長さ係数 K' を求め、これを式 (11.4) に代入して γ_t が得られる。

$$\gamma_t = (\pi / K')^2 \quad (11.87)$$

また、式 (11.3) と同様に、柱の座屈軸力 N_{ct} に対する非弾性柱の有効長さ係数 K_t を

$$N_{ct} = \frac{\pi^2 E_{ct} I_c}{(K_t h)^2} \quad (11.88)$$

で定義すれば、 $K_t = K'$ である。

さて、式 (11.84) の τ は座屈時の応力度 σ_{cr} に依存するために種々の式が提案されている。実用的な式として、非弾性域における柱の座屈曲線を放物線 (Johnson 式) で近似すれば次式を導くことができる^{11.15)}。

$$\tau = \frac{(\sigma_Y - \sigma_{cr}) \sigma_{cr}}{(\sigma_Y - \sigma_P) \sigma_P} \quad (\tau \leq 1) \quad (11.89)$$

ここに、 σ_Y は降伏点、 σ_P は比例限度である。図 11.42 の非弾性域 ($\lambda < \lambda_P$) で $\tau < 1$ 、弾性域 ($\lambda \geq \lambda_P$) で $\tau = 1$ とする。また、 λ_P は

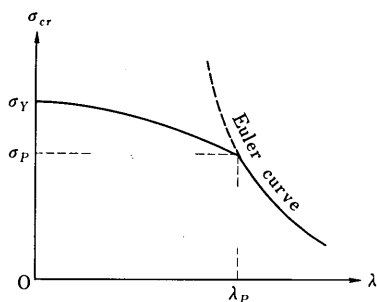


図 11.42 耐荷力曲線

注 17) 屈服現象の最高荷重点も特異点であるので、零固有値に対する固有ベクトルを求めればこれらを区別することができる。

オイラー座屈応力度 σ_E が σ_p に等しくなるときの限界細長比である。

数値計算に便利のように式 (11.88) を応力度で表わす。

$$\sigma_{ct} = \tau \frac{\pi^2 E_c}{(K' \lambda_c)^2} = \frac{\tau}{(K')^2} \sigma_E \quad (\lambda_c = h/r_c) \quad (11.90)$$

ここに、 σ_{ct} 、 E_c 、 λ_c 、 r_c は柱の接線係数応力度、弾性係数、細長比、断面 2 次半径である。

σ_{ct} を求めるには、まず $\tau=1$ と仮定して弾性座屈解析により k'_b に対するラーメン柱の K' を求め、これと仮定した τ を式 (11.90) に代入する。このときの σ_{ct} が σ_p 以下であれば σ_{ct} は弾性座屈応力度である。 $\sigma_{ct} > \sigma_p$ のときには、 σ_{ct} を式 (11.89) の σ_{cr} に代入して τ を計算し、修正した k'_b を用いて K' 、 σ_{ct} 、 τ を求める。この τ の値が収束するまで計算を繰り返す。

初期不整が存在する場合でもこの手法を用いることができるが、このときの座屈応力度は図 11.42 よりも小さいので、式 (11.89) を修正しなければならない。

11.9.3 ラーメン柱の設計耐力

前項の方法を修正して、初期曲りや残留応力を考慮したラーメン柱の耐力の実用的な計算法を導くことができる。

Yura^{11.16)} は、非弾性領域におけるラーメン柱の有効長さ係数を用いた許容軸圧縮応力度の計算法を提案した。この方法では、AISC^{11.17)} の許容軸圧縮応力度 σ_{ca} を用いて τ を次式で与えた (記号は原論文と異なる)。

$$\tau = \sigma_{ca} / \sigma_{ea} (= \nu (K')^2 \sigma_{ca} / \sigma_E, \quad \nu = 23/12) \quad (11.91)$$

ここに、 σ_{ea} は柱の許容オイラー座屈応力度 ($\sigma_E = \pi^2 E_c / \lambda_c^2$) で、 σ_{ca} の計算には細長比 $\lambda_c (= K' \lambda_c)$ を用いる。また、弾性限界点は $0.5 \sigma_Y / \nu$ とする。

式 (11.90) の σ_{ct} を σ_{ca} に代えて AISC の式から求めれば、数値計算の手順は前項 11.9.2 と全く同じである^{注18)}。反復計算では k_b 、 λ_c 、 σ_E は一定である。AISC のデザイン・マニュアルには、手計算に便利のように σ_{ca} の代りに実応力 σ_c を用いた手法が示されており、このための計算表が準備されている^{11.18)}。

吊橋の主塔の安定照査のための有効座屈長の算定にも同様の計算法が用いられている^{11.19)}。この計算法を反復計算が簡単になるように応力度を用いて一般的に表わすと、 n を反復回数として次のようになる。

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n-1)} \sigma_{cr} / \sigma_{ct} = (K')^2 \bar{\sigma} \sigma_Y / \sigma_E \quad (11.92)$$

ここに、 $\sigma_{cr} (= \bar{\sigma} \sigma_Y)$ は道路橋示方書の基準耐力^{11.9)}、 σ_{ct} は $k'_b (= k_b / \tau^{(n-1)})$ を用いたラーメンの弾性座屈解析から求められる式 (11.90) の柱の接線係数応力度である。 σ_E と $\bar{\sigma}$ は、次式の柱の細長比 λ_c と細長比パラメータ $\bar{\lambda}_c$ を用いて求める。

$$\lambda_c = h \sqrt{A_c / I_c}, \quad \bar{\lambda}_c = K' \sqrt{\sigma_Y / \sigma_E} \quad (11.93)$$

なお、 k_b 、 λ_c 、 σ_E は反復計算では一定値である。

n 回目の計算では、 $\tau^{(n-1)}$ (初期値は 1 とする) を用いて k'_b 、 K' 、 $\bar{\lambda}_c$ 、 $\bar{\sigma}$ 、 $\tau^{(n)}$ の順で求める。収束した K' と τ を式 (11.88) に代入すれば柱の耐力が求められる。

以上の計算法では、すべての柱の τ が同じ値で、かつ軸方向に変化しないものとしている。また、はり弾性と仮定しているので、これらの仮定が満たされない場合には誤差は大きくなる。ただし、最大圧縮応力度が生じる柱の断面での τ を用いると誤差は安全側になる。

注 18) Yura は K' を求める際に k_b の代りに式 (11.25) の剛比 G を用いているので、 $G' = \tau G$ である。

○計算例

式 (11.92) を用いて、図 11.1 に示した 2 ヒンジ門形ラーメンに集中荷重 P が作用する場合の耐荷力を求める。
設計条件として次の値を用いる。

$$\frac{h}{l}=0.5, \quad k_b=\frac{E_b I_b / l}{E_c I_c / h}=0.5, \quad \lambda_c=h\sqrt{\frac{A_c}{I_c}}=30.0$$

$$E_b=E_c=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_Y=2400 \text{ kg/cm}^2$$

これらの値より

$$\sigma_Y/\sigma_E=(\sigma_Y/E_c)(\lambda_c/\pi)^2=0.10422$$

有効長さ係数 K' は式 (11.20) から求めた。 $\tau^{(0)}=1$ として計算した結果を表 11.9 に示す。

表 11.9 τ の計算

n	k_b'	K'	$\bar{\lambda}$	$\bar{\sigma}$	τ
1	0.5	2.625	0.8474	0.6472	0.4647
2	1.0759	2.3005	0.7427	0.7042	0.3884
3	1.2872	2.2524	0.7271	0.7127	0.3768
4	1.3269	2.2451	0.7248	0.7140	0.3751
5	1.3331	2.2439	0.7244	0.7142	0.3748

表の数値より、柱の非弾性を考慮したことによってはりの剛比 k_b は相対的に大きくなり、このために K' の値は小さくなる。この柱の耐荷力 σ_{cr} は 1714 kg/cm^2 で、弾性座屈応力度の 51.3% である。

$\sigma_Y=4600 \text{ kg/cm}^2$ として同じ計算を行った結果では、

$$K'=2.381, \quad \bar{\sigma}=0.5248, \quad \tau=0.5943, \quad \sigma_{cr}=2414 \quad (\text{kg/cm}^2)$$

であった。

11.9.4 曲げ荷重を受けるラーメンの耐荷力

水平荷重が作用する場合には分岐座屈現象は起こらずに部材の塑性化が進展し、このために骨組の剛性が低下して最高荷重に達する (図 11.4)。このとき、柱に軸荷重が作用していると $P-\delta$ 効果も加って塑性化が助長され、剛性の低下が著しくなるとともに最高荷重、したがってラーメンの耐荷力は小さくなる。

また、はりに上に荷重が作用する場合の弾性座屈荷重は、特別な形式のラーメンを別にすれば柱頭載荷の場合と大差ないが、はりに塑性域が生じてから不安定現象が生じるときには、はりに上載荷の影響は大きく現れる。

このような曲げ荷重が作用して構造全体や部材に大きな変形が生じる場合には、前項 11.9.3 で示した計算法には変形による影響が考慮されていないので適用できない。このような骨組構造物の耐荷力を求めるためには構造全体についての弾塑性解析を行う必要があり、塑性領域の扱い方と $P-\delta$ 効果 (または幾何学的非線形性) の計算法の違いによって次のような解析法が用いられる。

- ① 1 次塑性ヒンジ解析 (単純塑性解析)
- ② 2 次塑性ヒンジ解析
- ③ 塑性ヒンジを用いた弾塑性有限変位解析
- ④ ひずみ増分理論による弾塑性有限変位解析

解析法①～③では、塑性域は部材の断面内のみに進展して断面全体が塑性化したときに塑性ヒンジが形成されると仮定する塑性ヒンジ理論^{(11.7), (11.20), (11.21)}を用いる。P- δ 効果は①では無視して力の釣合いを変形前の状態で考えるので、変形が大きい場合にはかなり過大な耐荷力が得られる。②ではこの効果を考慮する。③では有限変位理論によって幾何学的非線形性は厳密に扱れ、塑性ヒンジをマトリックス変位法に組み入れた解析法^(11.21)は汎用性がある精度のよい耐荷力を求めることができる。

以上の解析法によって得られる耐荷力はいずれの値も真の値より大きく、特に高層ラーメンやアーチなどのように大きい軸圧縮力が作用する場合には計算誤差はさらに大きくなる。これは部材軸方向の塑性域の拡がりを見逃しているためであって、④の解析法ではこの影響を考慮することができる。④は11.9.2で述べた解析法③と同じ解析法であって、ひずみ硬化後の非線形挙動も十分な精度で計算できる最も信頼性の高い解析法である。

ここで、図11.43に示すような2ヒンジ門形ラーメンと台形ラーメン($\theta=30^\circ\sim90^\circ$)について、解析法③を用いて数値計算を行う。

はりの長さ l は、オーバーブリッジを想定して25 mとし、ラーメンの高さ h は12.5 m ($h/l=0.5$) とした。表11.10に柱の断面諸量(2軸対称の箱形断面)を示す。 B はフランジ幅、 H はウェブ高さ、 t_f と t_w はフランジとウェブの板厚、 A_c 、 I_c 、 r は断面積、断面2次モーメント、断面2次半径である。

はり部材は柱と同じフランジ幅と厚さを用いた箱形断面で、ウェブの高さと厚さははりの剛比 k_b が0.5になるように決めた。柱とはりの鋼材は同一としてSS41 ($\sigma_y=2400 \text{ kg/cm}^2$)、SM58 ($\sigma_y=4600 \text{ kg/cm}^2$) とする。

荷重は、はり上に等分布荷重 q を満載した場合と、さらに片側の柱頭に集中荷重 $P (=0.2ql)$ を載荷した2通りを計算する。なお、 q のみを載荷する場合には、初期不整として $P=ql/100$ ($\theta=90^\circ$ のときは、 P を水平荷重として柱頭に加える) を与えた。

柱に断面⑥を用いて等分布荷重のみを載荷したときの中央点のたわみ w と荷重の関係を図11.44に示す。縦軸は全荷重 $\bar{P} (=ql)$ と弾性座屈荷重 P_{cr} の比を表わす。

図中の丸印は塑性ヒンジの発生を示したもので、2番目の塑性ヒンジが発生したときが最高荷重点になって、それ以後は不安定状態になった。図の計算例では θ が 60° と 90° の場合に分岐座屈が起きたが、 45° 以下の台形ラーメンでは対称変形のままで屈服した。断面⑥を用いた場合でも 45° 以下では屈服現象が生じた。

P_{cr} に対する最高荷重 $\bar{P}_{max}$ の値をSS41の場合について表11.11に示す。ラーメンの片側に集中荷重 P を加

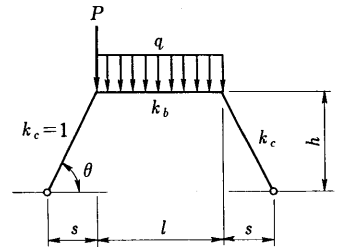


図11.43 計算例

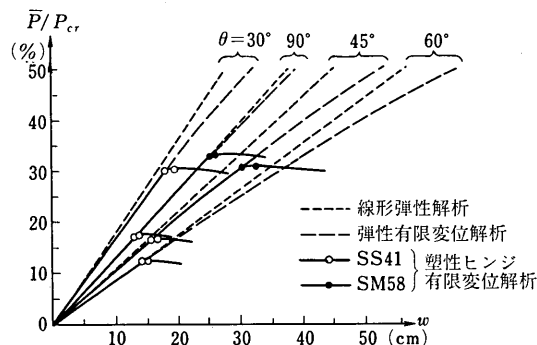


図11.44 台形ラーメンの荷重-変位曲線

表 11.10 柱の断面諸量

(単位: cm)

Sec.	$B \times t_f$	$H \times t_w$	A_e	I_e	r
㊸	50×2.5	100×1.0	440	737 167	40.93
㊹	50×2.5	200×2.0	1030	4 909 646	69.04

表 11.11 最高荷重 ($\bar{P}_{\max}/P_{cr}$)

(%)

θ		30	45	60	80	90
㊸	q	31.14	16.95	12.68	13.79	17.68
	q+P	28.48	16.56	13.05	15.35	20.99
㊹	q	16.16	9.18	7.04	7.72	9.91
	q+P	15.30	9.12	7.31	8.63	11.77

えた場合には、比較のために $\bar{P}_{\max}$ には全荷重の値 ($ql+P$) を、 P_{cr} には q のみが作用する場合の値を用いた。表より、偏載載荷による影響は少ないことがわかる。ただし、変形モードはすべての θ について非対称形で屈服した。なお、最高荷重の比の値は $\theta=60^\circ$ の場合に最も小さいが、比をとらない値は 30° の場合が最も小さく θ が大きいほど大きくなる。

$\theta=90^\circ$ の場合の柱の細長比は断面㊸で 30.5、断面㊹で 18.1 である。断面㊸の場合は 11.9.3 の計算例の値 ($\lambda_c=30$) にほぼ等しい。そこで、両方の計算から求めた耐荷力の値を比較すると約 3 倍 ($\approx 51.3/17.68$) になり、柱に初期曲げモーメントが生じる場合には 11.9.3 の計算手法が適用できないことがわかる。

11.10 今後の展望

限界状態設計法の導入に際して、ラーメン構造を対象とした各種の極限強度算定法を実務設計に適用する観点から整理しておくことが重要である。ラーメン構造の強度設計を有効座屈長とはり・柱の相関強度式を用いて、部材の強度照査で代用する伝統的な設計法に対しては、本章 11.2 から 11.8 に示した各種のラーメン構造の弾性座屈荷重計算式が利用できる。

これに対して最近欧州を中心として、ラーメン構造の設計法は従来の許容応力度設計で用いられてきた「有効座屈長法」から脱却して、変形を考慮した解析法を用いた設計法へと移行しつつある。すなわち、第 5 章の柱や第 6 章のはりで述べた基本部材の強度評価で考慮されている部材の初期不整の効果およびラーメン構造としての外力による変形の影響を考慮できる解析法あるいは設計式が主流となってきている。このようなラーメン構造の極限強度の解析法は 11.9 で述べたように種々の方法が提案されているが、実務設計の観点からは等価な幾何学的初期不整と $P-\Delta$ 効果を考慮した弾性 2 次理論が推奨されている^{11,22)}。

一方、鋼製タワーや橋脚ラーメンに代表されるような土木構造物として多用されている薄肉断面部材の極限強度評価には構成板要素の局部座屈の影響を考慮する必要がある。このような観点から、板要素の局部座屈を含めたラーメン構造の極限強度に関する研究が円形ラーメンを対象として行われている^{11,23)}。このような研究が任意の構造形式や荷重状態についても推進される必要がある。

さらに斜張橋の主塔ラーメンなどでは 3 次元的な荷重状態に対する極限強度を照査しなければならない場合もある。軸力、2 方向曲げにねじりが加わった場合の非弾性挙動は十分に解明されていない。

すなわち、第 5 章、第 6 章の部材の基本強度と第 8 章の板要素の強度評価式を基本として、これらと整合性の

とれたラーメン構造の合理的設計法を確立することが今後の重要な課題である。

参 考 文 献

11. 1) Galambos, T. V. (福本勝士・西野文雄共訳) : 鋼構造部材と骨組, 丸善, 1970.
11. 2) Bleich, F. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
11. 3) Timoschenko, S. P. and J. M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, 1961.
11. 4) 福本勝士 : 構造物の座屈・安定解析, 新体系土木工学 9, 技報堂出版, 1982.
11. 5) 仲威雄・加藤勉・藤本盛久・菅野誠 : 座屈論, 新訂建築学大系 12, 彰国社, 1968.
11. 6) Johnston, B. G. : Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1976.
11. 7) 日本建築学会 : 鋼構造塑性設計指針, 丸善, 1975.
11. 8) 日本建築学会 : 鋼構造座屈設計指針, 丸善, 1980.
11. 9) 日本道路協会 : 道路橋示方書・同解説, 丸善, 1980.
11. 10) C. R. C. of Japan : Handbook of Structural Stability, Corona Pub., 2-23~2-56, 1971.
11. 11) Chwalla, E. : Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen, Der Bauingenieur, Vol. 19, 1938.
11. 12) Lu, Le-Wu : Stability of Frames under Primary Bending Moments, Proc. ASCE, Vol. 89, ST3, 1963.
11. 13) 藤本盛久 : 剛節骨組の弾性安定について, 日本建築学会論文集, No. 48, 1954.
11. 14) 林 正 : 曲げ荷重を受けるラーメンの座屈解析, 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986.
11. 15) 前出 2), pp. 51~54.
11. 16) Yura, J. A. : The Effective Length of Columns in Unbraced Frames, AISC, Eng., J., Vol. 8, No. 2, 1971.
11. 17) AISC : Manual of Steel Construction, 8th ed., pp. 5-19, 1980.
11. 18) 同上, pp. 3-6~3-8.
11. 19) 土木学会・本州四国連絡橋鋼上部構造研究小委員会 : 吊橋主塔設計要領 (案)・同解説, 1980.
11. 20) 太田俊昭 : 構造物の非弾性解析, 新体系土木工学 8, 技報堂出版, 1980.
11. 21) 上田幸雄 : 骨組構造の弾塑性解析, コンピュータによる構造工学講座, 骨組構造解析, II -1-B, 培風館, 1971.
11. 22) Vogel, U. : Practical Application of the Displacement Method for a Direct Second-Order Analysis of Regular Multi-Storey Sway Frames, in Verba Volant, Scripta Manent, en hommage a Charles Massonnet, Liege, 1984.
11. 23) Nakai, H., S. Emi and T. Miki : In-Plane Critical Strength of Thin-Walled Steel Frames Subjected to Vertical Loads, Proc. JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 3, No. 1, 1986.