

第5章 柱

5.1 概 説

柱は主として軸方向に圧縮力のみ受けると考えられる部材で、トラス橋の圧縮部材、送電鉄塔などの塔状構造の主部材などに用いられるほか、主構を支える対傾構や横構などの2次部材としても広く用いられている。

実構造物中の圧縮部材は一般に両端が他の構造に剛結されているため、設計上軸方向力のみ受けると考えられる部材も実際には部材端に2次的な曲げモーメントが生じる。また施工上の誤差により構造骨組線と部材軸線とが完全には一致せず、多少とも偏心載荷となる場合がある。

柱にはこのほかにも柱自体に初期たわみや残留応力などの初期不整が存在し、実用に供される柱の座屈荷重は理想柱に対する理論解による強度から著しく低下する。柱の挙動に関する研究の歴史は古く、またその後の研究も数多く行われている。これらの展望はいくつかの文献(5.1)~(5.3)により知ることができる。

軸力のほかに、設計上明らかに問題とすべき大きな曲げモーメントや横荷重が作用する部材は「はり一柱」と呼ばれ、本書では第7章で取扱う。

本章では、はじめに伝統的な設計公式の基礎を与えた両端単純支持弾性柱の基本的挙動を述べ、また残留応力による柱強度への影響を概観する。設計者は鋼柱の種類ごとに異なる強度特性を認識しておくことが望ましく、これに関連した設計公式と現在の動向に触れる。また両端単純支持以外の柱、およびより複雑な部材形式の鋼柱の強度と設計について述べる。

5.2 柱の挙動と不完全性

伝統的な柱の設計式の多くは偏心量を有する弾性柱の応力に基づいて定められてきた。本節では、はじめに5.2.1、5.2.2項で両端単純支持された弾性柱の基本挙動を述べ、つづいて材料非線形および残留応力を考慮した中心軸圧縮性の強度を5.2.3、5.2.4項で述べる。また5.2.5項で剛塑性柱に触れる。

5.2.1 オイラーの座屈荷重

長さ l 、曲げ剛性 EI の両端単純支持柱の弾性座屈荷重は

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (5.1)$$

与えられる^{5.4)}。同式はオイラーの座屈荷重として知られ、今日でも柱の座屈荷重を与える基本式として用いられている。式(5.1)を柱の断面積 A で除し、柱断面上の平均応力を求めると次の座屈応力式が得られる。

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2} \quad (5.2)$$

ここに、 $r = \sqrt{I/A}$: 断面2次半径。 l/r は細長比と呼ばれ、柱の幾何寸法を表わす基本パラメータ(無次元量)である。座屈耐荷力を表わす設計式は一般に式(5.2)のように断面の平均応力で表わされる。

式(5.2)を図示すると図5.1のEuler曲線となる。降伏応力 σ_Y を有する理想弾塑性材としての鋼材では座屈

応力 σ_E は σ_Y 以上にはなりえず、結局理想的な柱の中心軸圧縮強度は図 5.1 の直線 AB および曲線 BC で与えられる。実際、鋼材から削り出された試験柱のように、初期たわみも残留応力もない柱を注意深く中心軸圧縮すると、座屈実験値は図 5.1 の線 ABC にほぼ一致することが確かめられている。

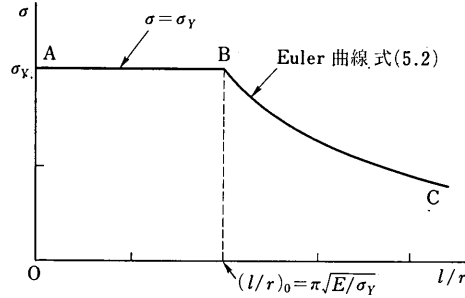


図 5.1 理想柱の中心軸圧縮強度

同図で直線 AB とオイラー曲線 BC との交点 B における細長比は式 (5.2) で $\sigma = \sigma_Y$ において $(l/r)_0 = \pi\sqrt{E/\sigma_Y}$ と求められる。これを基準細長比と呼び、細長比を規準化するときの値として用いられる。すなわち、細長比パラメータを $\bar{\lambda}$ とおくと

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\sigma_Y}{\sigma_E}} = (l/r) / (l/r)_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \frac{l}{r} \quad (5.3)$$

式 (5.2) 中の断面 2 次半径 r は座屈問題以外は構造解析上ほとんど現われない断面定数であるため、設計者には直観的に把握しにくい量であるが、図 5.2(a) に示すような中立軸に平行におかれた 2 枚の薄板から成る理想断面では、断面 2 次モーメントは $I \doteq A(h/2)^2$ であるから、 $r = \sqrt{I/A} = h/2$ 。すなわち断面 2 次半径 r は中立軸から薄板までの距離（回転半径）を表すことがわかる。

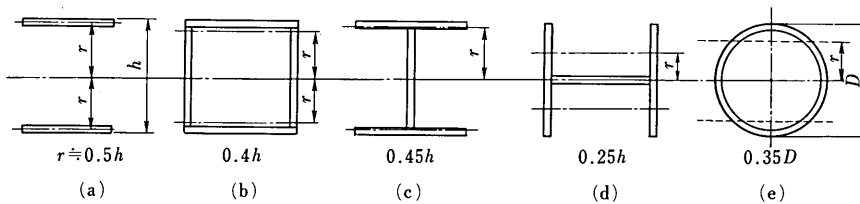


図 5.2 各種断面の断面 2 次半径の概算値

任意形状の断面も断面積と断面 2 次モーメントの等しい 2 枚の薄板からなる等価断面に置きかえて考えると、その断面高さが $2r$ である。

幅と高さのほぼ等しい箱形断面、H 形断面、パイプ断面の r の概算値は図 5.2(b)~(e) のようになる。これを利用して部材の細長比の概算値が簡単に求められる。例えば箱形断面柱では $r \doteq 0.4h$ であるから、部材長 l が断面高さ h の 20 倍であれば細長比は $l/r \doteq 20h/0.4h = 50$ となる。

5.2.2 荷重偏心および初期たわみのある柱

(1) 偏心荷重を受ける柱

両端に等しい偏心量 e を有する柱 (図 5.3(a)) に荷重 P が作用するとき、柱中央の横たわみは次式で与えられる^{5.1)}。

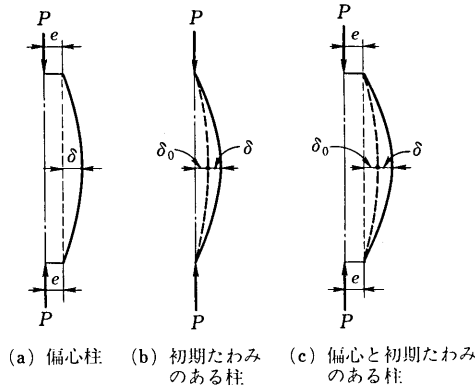


図 5.3 偏心および初期たわみのある柱

$$\delta = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} - 1 \right) \tag{5.4}$$

柱に生じる最大圧縮応力 σ_{\max} は軸力による断面内一様応力 $\sigma_p = P/A$ と曲げモーメント $M = P(e + \delta)$ による応力 $\sigma_m = Mc/I$ との和で表わされるから

$$\sigma_{\max} = \sigma_p + \sigma_m = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right) \right] \tag{5.5}$$

となる。ここに、 c は断面の中立軸から最外縁までの距離。

いま、式 (5.5) の σ_{\max} が材料の降伏応力 σ_y に達したとき、この柱は破壊すると考えると、このときの断面平均応力は、

$$\sigma_{cr} = \frac{P}{A} = \frac{\sigma_y}{\left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right) \right]} \tag{5.6}$$

上式はセカント式と呼ばれている。鋼柱内の残留応力の座屈耐荷力に及ぼす影響が明らかにされる以前は、残留応力やその他の要因の効果を偏心量におきかえて式 (5.6) を適用し、材料の弾性限界点を座屈耐荷力の目安とした (図 5.10 参照)。ただし、式 (5.6) の両辺に P が含まれているため、 σ_{cr} を求めるには繰り返し計算が必要となる。

式 (5.4) による荷重と横たわみ δ との関係は図 5.4(a) のように表され、偏心量の大きさにかかわらず、荷重が Euler 荷重 P_E に近づくにつれて δ は無限に大きくなる。式 (5.5)、または (5.6) 中の ec/r^2 は初期偏心比と呼ばれる定数である。

(2) 初期たわみのある柱

図 5.3(b) に示す初期たわみのある中心軸圧縮柱を考える。初期たわみ形状を振幅 δ_0 の \sin 半波形で仮定すると、柱中央での横たわみ^{5.6)}は

$$\delta + \delta_0 = \frac{\delta_0}{(1 - P/P_E)} \quad (5.7)$$

と表わされる。上式より柱の横たわみ量は初期たわみ δ_0 を増幅係数 $(1 - P/P_E)$ で拡大した形で表わされ、偏心圧縮柱と同様 P が P_E に近づくるとたわみは無限大に発散する [図 5.4(b)]。

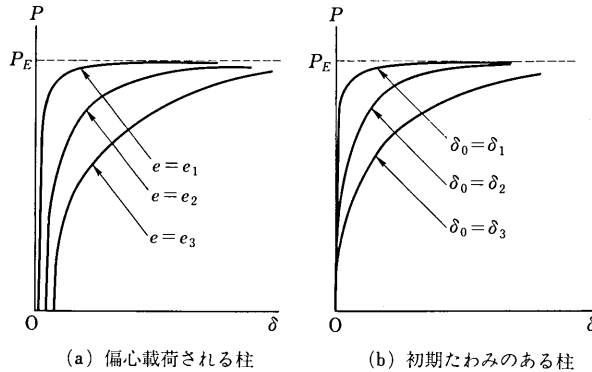


図 5.4 偏心および初期たわみのある柱の荷重-横たわみ関係

式 (5.7) より柱に生じる最大応力は式 (5.4) と同様の計算により次式のように求められる。

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{\delta_0 c}{r^2} \cdot \frac{1}{1 - P/P_E} \right) \quad (5.8)$$

前と同様 $\sigma_{\max} = \sigma_r$ となるときを柱の破壊と考え、断面内平均応力 σ_{cr} について整理すると

$$\sigma_{cr} = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} [\sigma_r + \sigma_E(1 + \eta) - \sqrt{(\sigma_r + \sigma_E(1 + \eta))^2 - 4 \sigma_E \sigma_r}] \quad (5.9)$$

ここに、 $\sigma_E = P_E/A$ 、 $\eta = \delta_0 c/r^2$ 。

式 (5.9) は Perry-Robertson 式として知られている。偏心柱の場合と同様、 δ_0 と c が r の定数倍で与えられていれば η は定数となる。また η を細長比に比例する量と考えて柱の設計強度式を定めた例もある。

(3) 荷重偏心と初期たわみのある柱

図 5.3(c) のような偏心と初期たわみを同時に有する柱の強度を設計式に利用することは複雑さのゆえに従来からもほとんど行われていない。この場合、柱中央の横たわみは式 (5.4) と式 (5.7) の和となり、

$$\delta + e + \delta_0 = e \cdot \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E} + \frac{\delta_0}{(1 - P/P_E)}} \quad (5.10)$$

このとき、最大圧縮応力は近似的に次式^{5.7)}で与えられる。

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{c}{r^2} \{ \delta_0 + e(1 + 0.23 P/P_E) \} \cdot \frac{1}{(1 - P/P_E)} \right] \quad (5.11)$$

5.2.3 接線係数荷重

材料の応力 (σ)-ひずみ (ϵ) 関係が理想弾塑性でなく、図 5.5(a) に示すようにある比例限以上で応力-ひずみ曲線の傾きが徐々に減ずるものであれば、初期たわみのない真直ぐな柱であっても、比例限以上の荷重でもはや弾性柱 (Euler) の式 (5.1) をそのまま用いることはできない。

1889 年 Engesser は、比例限以上の応力での座屈耐力が Euler の式の E を接線係数 $E_t = d\sigma/d\epsilon$ におきかえる

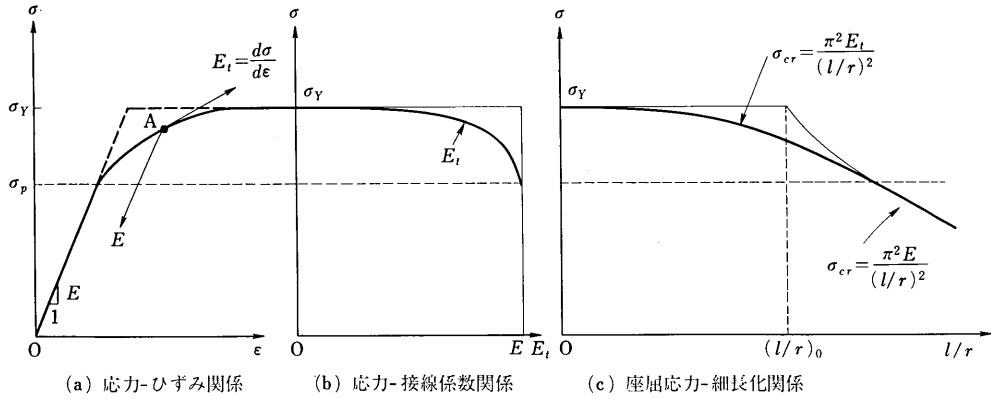


図5.5 接線係数座屈曲線

ことよって得られると考えた。すなわち

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{l^2} \quad \text{または} \quad \sigma_t = \frac{\pi^2 E_t}{(l/r)^2} \tag{5.12}$$

この理論を接線係数理論 (Tangent Modulus Theory) という。

しかし、その後、柱が座屈し曲がり始めるとそれまで柱断面内で一様であった応力が曲げ曲率の外側部分では応力が減少を始め (図5.5(a)のA点)、弾性に復活するのでその部分では E_t ではなく E を用いるべきだとする新たな考えが Engesser (1895)、および Kármán (1908) によって出された。このときの座屈荷重 P_r は Euler 式の E の代りに E_t と E とによってその断面形に対して定められる等価弾性係数 E_r を用いるので、これを等価係数理論 (Reduced modulus theory) という。

例えば矩形断面の等価弾性係数^{5,8)}は

$$E_r = 4EE_t / (\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2 \tag{5.13}$$

また、図5.7(a)に示すような2枚のフランジ板から成る断面 (x 軸まわり) では

$$E_r = 2EE_t / (E + E_t) \tag{5.14}$$

この理論は合理的であると信じられていたが、その後に行われた実験値は等価弾性理論値 E_r よりも接線係数理論値 E_t に近い結果を示した。そのために、両理論の間の矛盾に対して約50年間議論が続いた。1947年

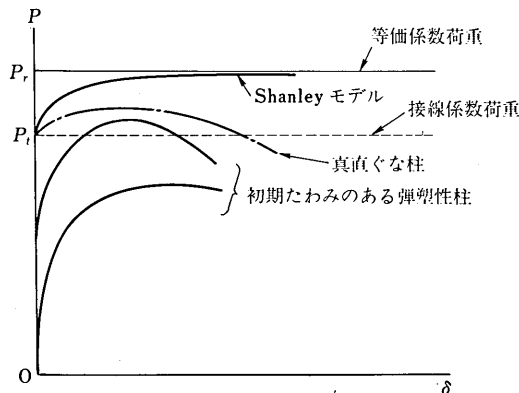


図5.6 Shanleyモデルの挙動

Shanley はアルミ柱を使って注意深く実験を行い、座屈現象を観察した結果、簡単なモデルを用いてこの問題に極めて明解な説明を与えることに成功した。

Shanley モデルによる荷重—変形挙動は図 5.6 に示すようになる。このモデルによって完全に真直ぐな圧縮柱は荷重が接線荷重 P_t に達したとき座屈を開始するが、曲げ変形を続けていくにはさらに余分な軸方向が必要となること、また変形が進むにつれ荷重は理論的に等価係数荷重 P_r に近づいていくことが示された。

実際の真直ぐな柱では横方向変形とともに部材内で非弾性域が拡がり、 P_r に達する前に柱は最大荷重に達する。したがって最大荷重は P_t と P_r の間に位置する。材料の応力—ひずみ関係が図 5.5(a) のような形をもち、初期たわみの小さい柱の実験値の下限は P_t にほぼ一致することなどから、接線係数理論は今日でもアルミ材、ステンレス材の非弾性座屈理論式として用いられている。さらに、この理論はその後の残留応力を考慮した鋼柱の中心軸圧縮強度に関する理論的發展をも促した。

5.2.4 残留応力の鋼柱強度への影響

鋼柱の残留応力分布形状および大きさが座屈強度の低下に重要な影響を及ぼすことは 1900 年の始め頃から知られ始めた^{5.1)}。1947 年にアメリカ・リーハイ大学にて組織的な実験が行われ、鋼柱強度に及ぼす残留応力の影響が明らかにされた。それ以後、1970 年代に入るまで膨大な量の研究が同大学を中心に行われ、アメリカにおける、いわゆる CRC (The Column Research Council) 曲線設定の基礎となった。しかし、これらの鋼柱には初期たわみや偏心の影響は積極的に考慮されていない。

以下に、H 形断面をもつ真直ぐな柱を例に、残留応力による座屈強度の低下の様子を調べる。ただし断面は図 5.7(a) に示すように幅 b 、厚さ t のフランジ 2 枚から成るとし、ウェブを無視する。またフランジ上に図 5.7(b) に示す左右対称の残留ひずみ分布を仮定し、材料は理想弾塑性材とする。

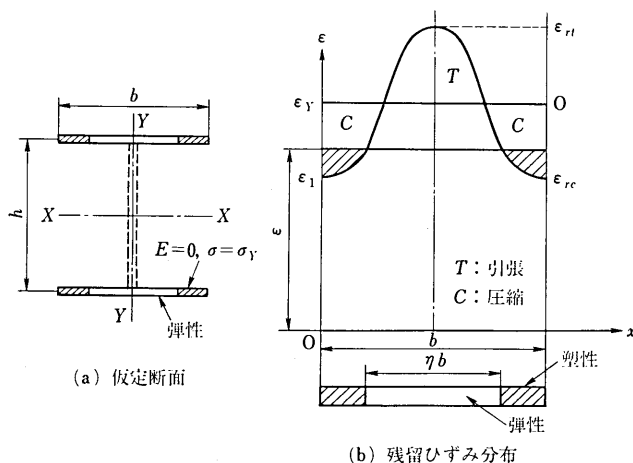


図 5.7

いま、中心軸圧縮荷重 P によって断面内に一様な圧縮応力 σ が生じているとする。断面内のある点の圧縮残留応力を σ_r とすると、両者の和 $\sigma + \sigma_r$ が材料の降伏応力 σ_y に達したとき、その点の材料が降伏すると考える。図 5.7(b) に示したような残留応力分布では、荷重の増加とともにフランジ端から中心部へ降伏域が次第に進行していく。図の斜線で示した降伏部分では $E=0$ であり、弾性領域のみが柱の曲げ剛性 EI に寄与する。この弾

性部分の長さを ηb とすると、これによる断面 2 次モーメント I_e は、強軸 ($X-X$) および弱軸 ($Y-Y$) まわりに関してそれぞれ次のようになる^{5,9)}。

$$\frac{I_e}{I} = \frac{\eta b t (h/2)^2}{b t (h/2)^2} = \eta \quad (\text{強軸まわり}) \quad (5.15 a)$$

$$\frac{I_e}{I} = \frac{2 t (\eta b)^3 / 12}{2 t b^3 / 12} = \eta^3 \quad (\text{弱軸まわり}) \quad (5.15 b)$$

ここに、 I はもとの断面における断面 2 次モーメントである。

このような柱の座屈荷重は Euler 式 (5.1) の EI の代りに EI_e を用いて表せばよいから、応力に変換すると

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I_e}{A l^2} = \frac{\pi^2 E \left(\frac{I_e}{I} \right)}{(l/r)^2} \quad (5.16)$$

式 (5.15) で定まる I_e/I を上式に代入すると、ここで仮定した断面形に対して次の座屈応力式が求められる。

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \eta}{(l/r)^2} \quad (\text{強軸まわり}) \quad (5.17 a)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \eta^3}{(l/r)^2} \quad (\text{弱軸まわり}) \quad (5.17 b)$$

ところで式 (5.16) または式 (5.17) から座屈応力を求めるには、別に $\sigma-I_e/I$ 関係または $\sigma-\eta$ 関係を求めておく必要があるが、これは短柱実験や、与えられた残留応力分布形を用いた数値解析によって求めることができる^{5,11)}。

図 5.7(b) の断面内残留応力分布が三角形の場合の式 (5.15) による座屈応力を図示すると図 5.8 のようになる。ここで最大圧縮残留応力を $\sigma_r = 0.3 \sigma_Y$ としている。同図より弾塑性域における座屈強度は曲げ変形の回転軸の方向が部材断面の強軸まわりか弱軸まわりかで相当大きな差が生じることがわかる。

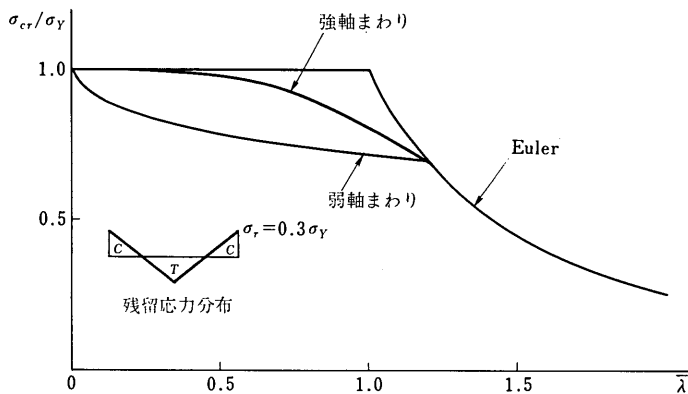


図 5.8 三角形残留応力分布をもつ柱の座屈強度

鋼柱内部に実在する残留応力分布形は部材軸方向および任意の曲げ軸に関し、自己つりあいを保っている。しかし残留応力分布形は必ずしも対称形とはなっていない。したがって、中心軸圧縮によりこれに一樣な作用応力を加えられたとき、断面内に拡がる塑性領域も一般には対称にはならない。すなわち、座屈に至る前の荷重状態で、断面に残された有効な弾性部分の図心はもとの断面の図心からずれてくる。したがって、たとえ低い荷重で中心軸圧縮状態にセットして実験しても、実際にはある荷重以上で力学的には多少とも偏心载荷となる。非対称

性の顕著な残留応力分布をもつ柱は、この偏心効果によって座屈強度がかなり低下することがある点に注意を要する。

5.2.5 剛塑性柱

塑性設計法の発展に伴って柱の問題にも塑性ヒンジの概念が導入された。図 5.9 に示すように、剛塑性材からなる両端単純支持柱の中央点に塑性ヒンジを考えると、この点の塑性モーメント M_{pc} はつりあいより $P \cdot \delta$ に等しい。塑性ヒンジ点の軸力と曲げモーメントは断面形によって異なるが、簡単のために幅 b 、高さ d の矩形断面を考えると次の塑性条件式^{5.10)}が得られる。

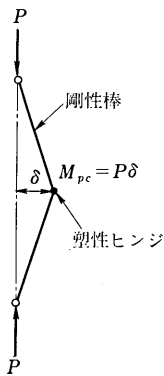


図 5.9 剛塑性柱

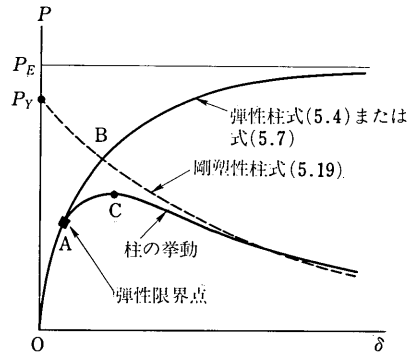


図 5.10 剛塑性柱のたわみ曲線

$$\frac{M_{pc}}{M_p} + \left(\frac{P}{P_y}\right)^2 = 1 \quad (5.18)$$

ここに、 M_p は塑性モーメント ($=\sigma_y b d^2 / 4$)、 P_y は降伏軸力 ($=\sigma_y b d$)。 $M_{pc} = P\delta$ を式 (5.18) に代入して整理すると

$$\delta = \frac{d}{4} \left(\frac{P_y}{P} - \frac{P}{P_y} \right) \quad (5.19)$$

上式の関係を図示すると図 5.10 の破線が得られる。この曲線は $\delta=0$ で $P=P_y$ であり、 δ が大きくなると右下りとなる。同図には偏心または初期たわみのある弾性柱の挙動 [式 (5.4)、または式 (5.7)] および実際の柱の挙動 (太実線) も示してある。図中 A 点は式 (5.6) または式 (5.9) に相当する弾性限界点である。この限界点以上の荷重では柱の断面内に塑性化が進行して変形が大きくなり、弾性柱のたわみ曲線から離れ、やがて最大荷重点 (図中 C 点) に達する。その後、柱の変形は剛塑性柱のたわみ曲線に下方から近づいていく。

図中の初期たわみのある弾性柱と剛塑性柱とのたわみ曲線の交点 (B 点) は柱の最大耐力の上界を与える。この値が柱の耐荷力の近似値として用いられることは電子計算機による解析の発達した今日ではほとんどないが、柱はりの集合体であるラーメンの塑性解析では、このような塑性ヒンジ理論を用いて最大耐荷力の近似計算を行うことがある。

5.3 鋼柱の強度

5.3.1 熱間圧延柱

熱間圧延材として用いられる部材は圧延H形鋼，圧延I形鋼，山形鋼，溝形鋼，T形鋼などのいわゆる形鋼が大半であり，それぞれJISにより断面寸法が規定されている．わが国の土木構造物において圧延材が圧縮材として使用される場合には主部材としてよりもむしろ対傾構，横構などの2次部材が多い．一方今日の鉄骨建築構造では，はりおよび柱のほとんどが圧延材である．

圧延H形鋼材のひずみ矯正される前の残留応力分布は図5.11に示すようにフランジ上でパラボラ状の分布形を示し，鋼種がかわってもこのような形状にはほとんど差がない．また圧縮残留応力の最大値は $0.3\sigma_y$ 程度である．図5.11のような残留応力分布形をもち， \sin 半波形の初期たわみ $\delta_0 \sin(\pi x/l)$ を有する圧延H形柱の座屈耐荷力の計算結果は図5.12のようになる．同図の破線は初期たわみのない柱の耐荷力で，これに比べ，初期たわみを有する柱の耐荷力の低下は基準細長比をこえるあたりで大きい．

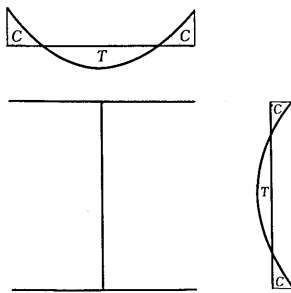


図5.11 圧延H形柱の残留応力分布の例

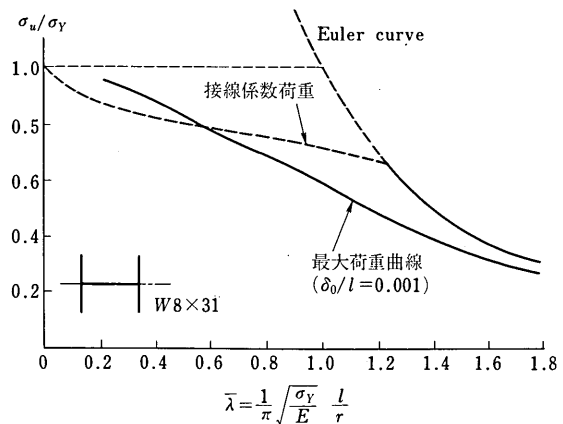


図5.12 圧延H形鋼柱の中心軸圧縮強度（計算値）

圧延H形部材は断面の幅または高さが300~400mm程度までの寸法がよく使用される．この程度の大きさの部材は製鉄所にて多段ローラーによる弱軸まわりのひずみ矯正が行われた後に市場に出される．まれにフランジ幅が上記寸法以上の製品で初期変形が公差を超えるような場合には，プレスにより集中荷重を加えて塑性加工を行い，初期変形を矯正することがあるが量的には極めて少ない．ローラーによりひずみ矯正された部材はその直前の残留応力分布とは著しく形を変え，残留応力量も極めて小さくなる．このような圧延H形鋼材の残留応力測定例^{5.11)}を図5.13に示す．

図5.14は図5.13に示す残留応力分布を有する比較的小形の圧延H形柱を断面の弱軸まわりに回転支持したときの中心軸圧縮実験結果^{5.11)}である．4つの細長比に対し同一条件で各15本の実験が行われている．図中には平均値 M と変動幅 $M \pm 2S$ (S :標準偏差)の範囲が示されている． $\bar{\sigma}_y$ は短柱実験による降伏点応力の平均値．横軸近くに描かれているのは変動係数 $V = S/M$ の値で，基準細長比付近で最大 ($V \approx 6.4\%$) となっている．

H形断面以外の圧延材は断面寸法が比較的小さいものばかりであるので一般にはすべてローラーによる連続的ひずみ取りが行われる．

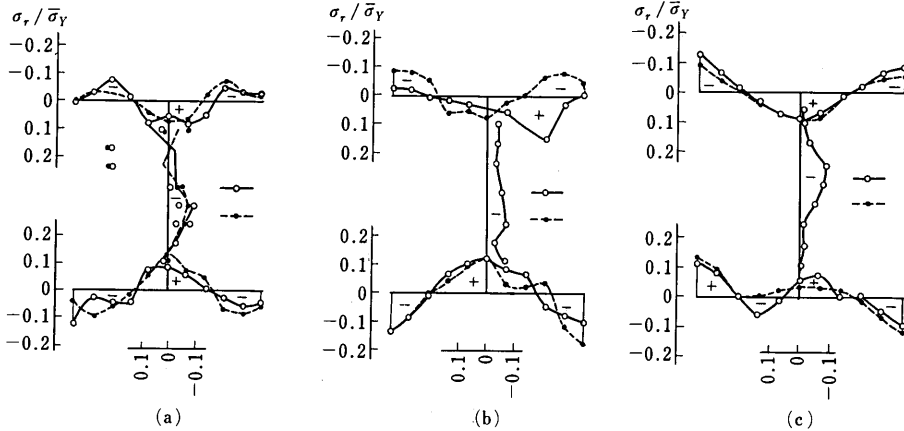


図 5.13 ローラー矯正後の圧延H形部材の残留応力分布^{5.11)}

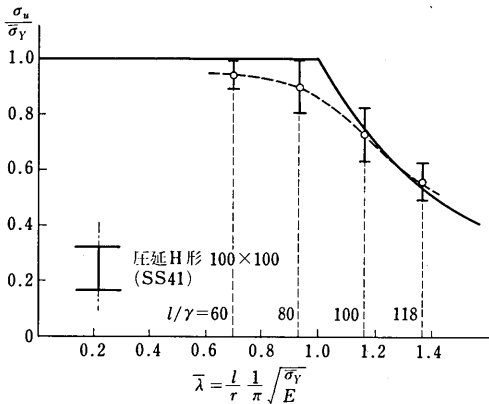


図 5.14 圧延H形柱の中心軸圧縮強度分布^{5.11)}

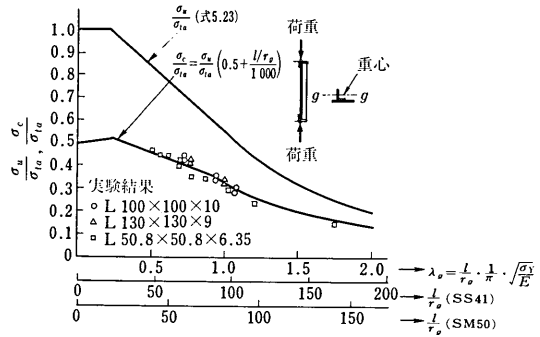


図 5.15 山形鋼の偏心圧縮強度と耐力曲線

山形鋼は送電用鉄塔のトラス主部材に使われる他、橋梁構造物などではT形鋼とも対傾構、横構に多く用いられる。これらの部材ではガセットを通して力を受けるので組立て製作上、部材重心に力を作用させることができず偏心圧縮状態となる。また曲げ座屈よりねじり座屈が問題となることがある。

偏心圧縮される柱は本来第7章に述べるはり-柱として設計されるべきであるが、設計の簡単のため、道路橋設計方書^{5.12)}では山形およびT形断面柱に対し文献 5.13), 5.14) の研究結果をもとに中心軸圧縮柱の基準耐荷力式に次のように低減率を乗じて設計してもよいとしている。

$$\frac{P}{A} \leq \sigma_u \left(0.5 + \frac{l/r_g}{1000} \right) \quad (5.20)$$

ここに、 P ：軸方向圧縮力 (kg), A ：部材の総断面積 (cm²), σ_u ：中心軸圧縮柱に対する基準耐力曲線, l ：有効座屈長 (cm), r_g ：断面の重心を通りガセット面に平行な軸まわりの断面二次半径 (cm)。

式 (5.20) と実験結果との比較を行うと図 5.15 のように、両者の間によい一致が見られる。図中 $\sigma_c = P/A$, $\sigma_a =$ 鋼材の引張り許容応力度。

山形鋼は以上のように単一材として用いられるほか、2本を合わせてT形断面としたりタイプレートを用いて組立て部材を構成することがある。

溝形鋼が単一で圧縮部材として用いられるときには一般に山形鋼と同様、ガセットによる偏心圧縮状態となる。溝形鋼はタイプレートまたはレーシングバーを用いて組立て部材を作る場合もある。

組立て部材は今日では、仮設用部材として使われることはあっても永久構造物として用いられることは少ない。そのため、耐力に関する実験的研究はわが国では極めて少ないが、最近諸外国でこの分野の研究が再び行われ始めている。

5.3.2 溶接柱

溶接組立て柱として現在最も一般的に使われているのはH形断面柱と箱形断面柱である。これらの部材の溶接部には一般に降伏応力にも達する引張り残留応力が生じており、溶接部から離れた部分にはこれと断面内でつりあう圧縮残留応力が生じている。

溶接H形柱のフランジプレートはほとんどの場合、原板をガス切断して製作しているため、フランジ端部には図5.16(a)に示すような引張り残留応力が生じる。

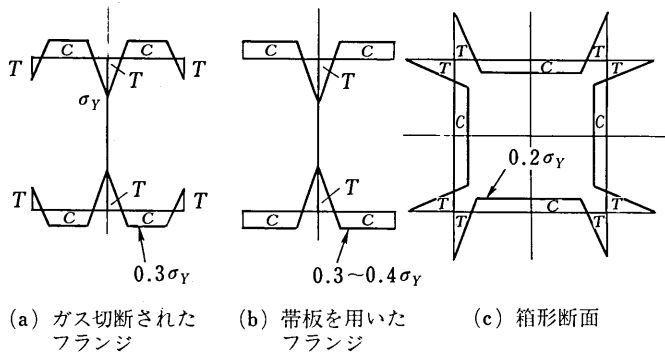


図5.16 溶接組立て柱の残留応力分布形

溶接H形材のフランジ板に帯板 (Universal mill plate) を使用することはわが国ではほとんど行われていないが、特に禁じられている訳ではない。SSRC ガイド^{5.15)}にも明記されているように設計者はその強度特性を知っておく必要がある。この場合、圧縮残留応力は図5.16(b)に示すようにフランジ端部にまで分布しているので、作用応力に伴う弾性部分の有効な断面2次モーメント I_e は急速に小さくなる。したがって座屈強度はガス切断されたフランジをもつ部材に比べて著しく低下する。両者の弱軸まわりの座屈耐力を初期たわみ $l/1000$ の場合について計算して比較すると図5.17^{5.15)}に示すようになる。両者の強度差は $\bar{\lambda}=1$ 前後の中間柱領域で最大約22%も生じており、同じ溶接H形柱でも同一範ちゅうで取扱うことができない点に注意を要する。わが国では文献5.32)、5.33)に溶接H形鋼柱の中心軸圧縮強度に関する実験的研究が報告されている。

H形断面柱のフランジ上にカバープレートを溶接する場合がある。この場合にもフランジ端部に溶接による引張り残留応力が生ずるので座屈強度上有利になる。

溶接材に公差以上の初期たわみが認められた場合、一般には、工場にてプレスにより集中荷重を加えひずみを矯正する。圧延材に対するようにローラーは用いられない。

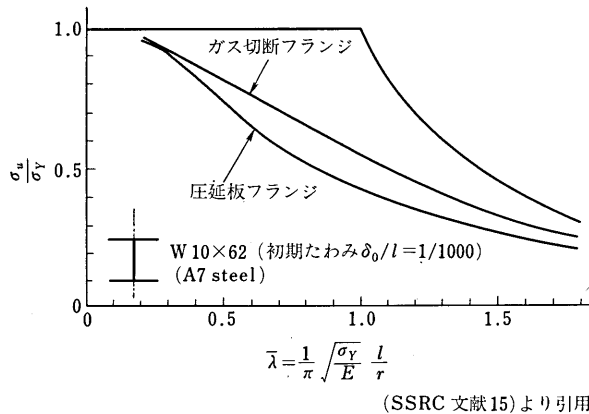


図 5.17 ガス切断フランジおよび圧延板フランジをもつ溶接H形柱強度^{5,15)}

溶接箱形断面柱は強軸，弱軸まわりの強度差がほとんどなく，圧縮材として有利な断面である。座屈強度は溶接組立てH形断面柱の強軸まわりの強度と同程度である。

5.3.3 鋼管柱

鋼管材には断面寸法，使用目的によっていくつかの異なった製造法がある。主なものは，比較的小口径のシームレスパイプ，管径 100～500 mm までの電縫鋼管，帯板をラセン状に巻いて造られるスパイラル管（径 1 600 mm まで），および大口径管に用いられるガス溶接管（U.O.E. 管，板巻鋼管ともいう）などである。U.O.E. 管ははじめに平板をプレスでU字形に成形した後，続いてO形に成形し，ガス溶接で結合して造られる。長尺はできないから，いくつかの円管ブロックを長さ方向に継ぎ，円周溶接を行う。

以上のうち，構造用鋼管としてわが国で最も一般的に用いられているのは電縫鋼管である。これは製鉄所で連続的に能率よく製造されるため，品質が高く，経済的な部材である。スパイラル管は生産量が多いが，構造用部材としてよりも基礎杭として多く使用されている。以下では電縫鋼管材および柱としての強度特性を述べる。

電縫鋼管は製造過程で帯板を管状に曲げ冷間加工をするため，管径 D と板厚 t の比によって加工後の材料特性が著しく変化する^{5,16)}。図 5.18^{5,17)} は管径比の異なる電縫鋼管の短柱実験による断面平均降伏点応力 σ_f の実験結果を示しており，径に対して肉厚の大きい部材では降伏点応力の上昇が著しい。この関係に対して次の近似式^{5,18)}が求められている。

$$\sigma_f/\sigma_s = 1.38 - 0.009(D/t) \quad (5.21)$$

ここに， σ_s = 原板の引張り降伏点応力。

管に成形後は電気抵抗発生熱による加熱圧着が瞬間的に行われるために，残留応力は極めて小さくほとんど無視できる。管内部の残留応力は主として冷間加工の過程によって生じ，軸方向の残留応力のほかに円周方向の残留応力も存在する。また残留応力は板厚方向に引張りから圧縮まで大きく変化している。このように電縫鋼管材の残留応力分布状態は他の部材に比べて極めて複雑であるが，文献 5.19) ではこれを座屈耐力に関係する軸方向の残留応力と等価な量に変換して評価する方法を示している。

電縫鋼管の中心軸座屈強度は前述のように管の D/t の値によって大きく変化するが，その管の短柱実験による降伏強度で無次元化すると，圧延H形柱の弱軸まわりの座屈強度曲線にほぼ一致する。図 5.19 は比較的小口径 ($D=114.3$ mm) の電縫鋼管 ($D/t=25.4$) の座屈実験結果^{5,20)}である。4つの細長比に対し，それぞれ 30 本

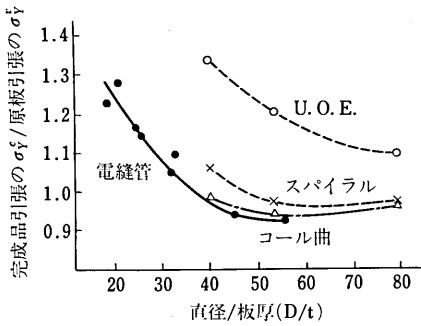


図 5.18 圧縮降伏点比 (直径)/(板厚) 曲線^{5.17)}

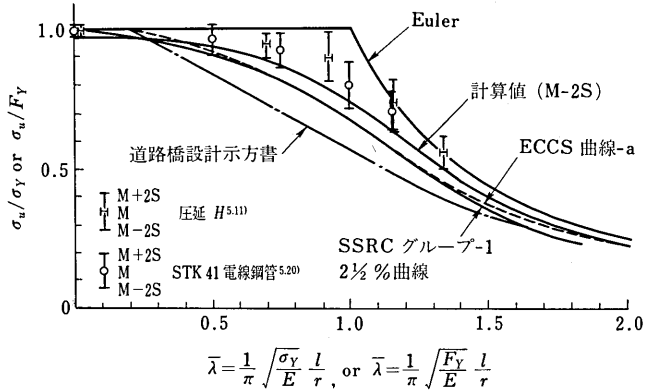


図 5.19 電縫鋼管 ($D=114.3\text{ mm}$) の中心軸圧縮実験結果と各種耐力曲線との比較^{5.20)}

の柱の実験値より平均 M ，標準偏差 S を求め，ばらつきを $M \pm 2S$ の幅で示している．図中に示した現行道路橋示方書^{5.21)}の基準強度に比べ，実験結果は $\bar{\lambda}=1$ 前後の中間柱領域で特に高い耐力を示している．

5.4 鋼柱の基準耐力

5.4.1 伝統的な設計式

鋼柱の設計に際して，従来から各国独自に用いられてきた設計式のほとんどは経験式である．古くから提案され，今日でもなお多くの国で使用されている設計式として Rankin-Gordon 式(1866)，直線式(Tetmajer 式, 1891)，放物線式 (Johnson 式, 1893) がある^{5.22)}．Rankin-Gordon 式は不可避の偏心を考慮した座屈強度式 [セカント式 (5.6)] の類型として得られる．柱の初期たわみを基礎にした Perry-Robertson 式 (5.9) も設計基本式として用いられる．

偏心量や初期たわみの設計上の基準値は各国ともそれぞれ異なった考えに基づいて定めている．AASHTO^{5.23)}，AREA^{5.24)} の示方書では式 (5.5) の初期偏心比 ec/r^2 の値として 0.25 を規定している．ドイツの規準 DIN 4114 (1952)^{5.25)} では初期偏心量を $e = r/20 + l/500$ とおいた T 形断面柱の非弾性最大強度を Jezek の方法により求めて基準値にしており，座屈曲線は直線式 (Tetmajer 式) に近い．

アメリカ CRC の基本柱公式^{5.26)}には放物線形の経験式が用いられている．この設計式は圧延 H 形鋼の強軸および弱軸まわりの接線係数荷重の平均的な値を基に定めている．

AISC (1962) の示方書^{5.27)}にはこの CRC 式が柱の設計基礎式として使われた．

これらの基準強度式を設計に用いる場合， σ_{cr} を安全率で除して許容応力を定めるが，示方書によっては安全率を l/r に無関係に一定とする場合と l/r の値に応じて変化させる場合とがある．

以上が伝統的に用いられてきた主な設計式であるが，その基本となる考え方は次の 2 つに大別できる．一つはヨーロッパを中心に採用されてきたもので，理想状態からの鋼柱の耐力の低下の要因を幾何学的不整 (偏心や初期たわみ) におく考えである．他の一つはアメリカの CRC 柱曲線に代表されるように，材料学的不整 (残留応力) のみを強度低下の根拠とするものである．

電子計算機を利用した解法の十分発達していない時代には，いくつもの構造不整を含んだ鋼柱の耐力を理論的

に求めるのは困難であったため、上述のように弾性座屈理論や接線係数理論による解を設計の基本とした。

5.4.2 複数柱曲線

中心軸圧縮柱に関する実験は従来から世界各国で多数行われてきた。最大耐荷力に関するこれらの実験データを降伏点応力 σ_y で無次元化し、細長比に対する変化を模式的に示すと図 5.20 の斜線部のようなになる。実用的な中間柱領域で相当大きなばらつきが現われる。同図の横軸近くに描いた最大強度の変動からもこれがわかる。

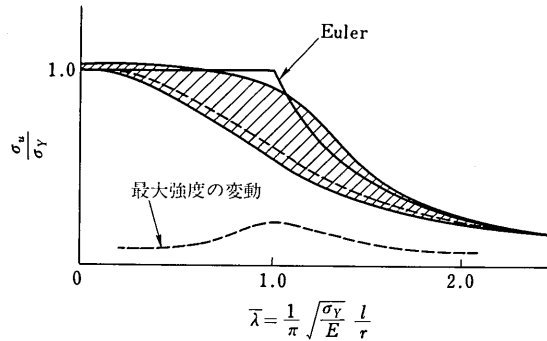


図 5.20 座屈実験結果の分布と変動

鋼柱の耐荷力を変動させる要因は 1) 鋼種、材料強度の違い、2) 製作法 (圧延か溶接か)、3) 断面形 (H形、箱形、パイプなど) 等の鋼柱の種類によるものの他、4) 柱の座屈軸方向 (強軸まわりか弱軸まわりか) が主要なものである。また同じ種類の鋼柱でも 5) 残留応力の量および分布形、6) 初期たわみ量のばらつき、によって強度にかなり大きな変動が生じる。

以上のような鋼柱の強度変動に対して、従来の設計法ではただ一本の基準強度曲線を用いてきた。しかしより経済的な設計と強度の安全性の調和を考えるならば、単一の設計式、あるいはそれに代る安全率式でもって設計を行うことは、もはや合理的ではないという考え方が成り立つ。

これに対処するために、同程度の強度を有する柱を断面形や製作法、座屈軸方向ごとに整理してグループ化し、各々に耐荷力曲線を設定するという考えが生れる。このような複数の柱曲線を設定すれば設計者は部材グループごとの設計式を用いねばならない繁雑さが生ずるが、各部材の耐荷力の評価がより正確になり、部材または構造物間の安全性の均一化と経済性を同時に満足させることができるようになる。

このような考え方をもとに ECCS では 10 年以上の期間をかけ 1 000 本余りの鋼柱の中心軸圧縮実験を行い、結果を統計的に整理した^{5.28)}。また残留応力と初期たわみ $l/1 000$ を考慮した数値解析を多数行って実験結果と照合した^{5.29)}。以上の結果を基に柱を 5 グループに分けそれぞれに耐荷力曲線を定めた。これらの耐荷力曲線は保証降伏点応力で座屈実験値を無次元化する限り、それぞれの適用断面に対して、ほぼ実験値の下限値を与えている。

最近出版された Eurocode 3^{5.30)} (1983) には図 5.21 に示すような 5 つの耐荷力曲線 a_0, a, b, c, d とそれに属すべき部材の種類、支持軸の方向が分類され、規定に定められた。ヨーロッパ各国では従来 of 自国の規準をこのヨーロッパ共通規準に変えるか、あるいは近づける努力を行っている。

最近電子計算機による構造設計を容易にするため、上記の複数柱曲線を次の一つの関数で表わし、パラメーターにより各曲線に分類できるよう提案されている^{5.31)}。

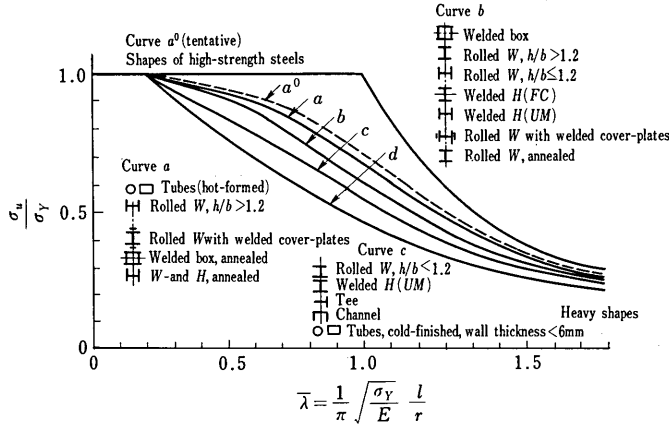


図 5.21 ECCS 柱曲線^{5.29)}

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_u}{\sigma_y} &= 1.0 & \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_0 \\ \frac{\sigma_u}{\sigma_y} &= \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} [1 + \alpha(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}^2 - \sqrt{1 + \alpha(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}^2 - 4\bar{\lambda}^2}] & \bar{\lambda} > \bar{\lambda}_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

ここに、 $\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \cdot \frac{l}{r}$ 、 α 、 $\bar{\lambda}_0$ にはそれぞれの複数曲線に対して表 5.1 に示す値を与える。

表 5.1 式 (5.22) の係数 α 、 $\bar{\lambda}_0$

	曲線	α	$\bar{\lambda}_0$		曲線	α	$\bar{\lambda}_0$
ECCS	a ₀	0.125	0.2	SSRC	1	0.103	0.15
	a	0.206	0.2		2	0.293	0.15
	b	0.339	0.2		3	0.662	0.15
	c	0.489	0.2				
	d	0.756	0.2				

一方、アメリカでも 1960 年ごろから複数柱曲線の検討が始められた。旧 CRC (1966) に代わる SSRC ガイド (1976)^{5.7)}には実測残留応力値と初期たわみ量 $l/1000$ を仮定した 112 本の鋼柱に対する強度曲線を数値解析的に求め、これを 3 グループに分類して、それぞれに平均値曲線および上下限曲線 (2.5 % 曲線, 97.5 % 曲線) を定めている。これらの平均値曲線を SSRC No.1, No.2, No.3 と称している。また、式 (5.22) をあてはめたときの係数値を表 5.1 に示す。

SSRC ガイドでは複数柱曲線に関するいくつかの問題点を述べ、また設計上の検討の必要上を指適している。

わが国の現行道路橋示方書 (昭和 55 年)^{5.12)}では前述の ECCS-c 曲線を参考にし、次式で表わされる単一基準耐荷力曲線を用い、これに安全率 1.7 を確保するように許容軸方向圧縮応力度を定めている。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_u &= 1 - 0.136\bar{\lambda} - 0.300\bar{\lambda}^2 & (\bar{\lambda} \leq 1) \\ \bar{\sigma}_u &= 1.276 - 0.888\bar{\lambda} + 0.176\bar{\lambda}^2 & (\bar{\lambda} > 1) \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

ここに、 $\bar{\sigma}_u = \sigma_u / \sigma_y$ 、 $\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \cdot \frac{l}{r}$

わが国における実験的研究は 1972 年に圧延 H 形鋼柱の中心軸座屈強度のばらつきに関する実験^{5.11)}が行われて

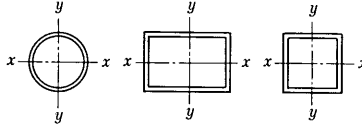
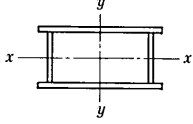
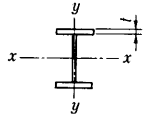
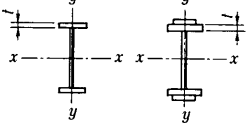
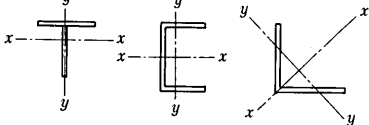
以来、強度分布の基本的性質を明らかにする目的で溶接H形柱^{5.32),5.33)}、電縫鋼管柱^{5.20)}について中心軸圧縮実験が行われた。これらの実験供試体断面寸法は ECCS と同様、比較的小形の部材である。

一方、複数強度曲線に関する研究も行われた。文献 5.34), 5.35) では ECCS 曲線 (a, a, b, c, d) および SSRC 曲線 (No.1, No.2, No.3) の複数曲線に関して、柱の断面形状、製作加工法の違い、鋼種などの分類とそれに対応する強度式の妥当性について検討を行った。実証的な研究を行うために西欧 1 015 体、日本 510 体、北米 137 体の計 1 665 体の柱の中心軸座屈実験結果をデータベースに収め、整理し、検討を加えている。

これによると ECCS 曲線に座屈実験値を鋼種の保証降伏点応力で無次元化する限り、対応する適用断面に対してはほぼ実験値の下限値を与えている。一方、SSRC 曲線は座屈実験値を鋼種の実測降伏点応力で無次元化すると、曲線 No.1 は適用断面に対して、ほぼ実験値の平均を与えているが、No.2, No.3 は実験値のほぼ下限値を与えており、適用断面が適切に分類されていないことが分る。

同文献では実証的にみた鋼柱の強度をグループ 1, 2, 3 として分類し、それぞれの曲線に適合する主な断面と

表 5.2

	座標軸まわりの座屈 両軸とも	グループ 1
溶接箱形 	両軸とも	1
圧延I形 	$t \leq 40 \text{ mm}$ 両軸とも $t > 40 \text{ mm}$ 両軸とも	1 3 (2)*
溶接I形 	$t \leq 40 \text{ mm}$ 両軸とも $t > 40 \text{ mm}$ 両軸とも	2 3
	両軸とも	2

* () 内の数字は $\sigma_y > 400 \text{ N/mm}^2$ の範囲で適用

表 5.3 式 (5.22) の α , $\bar{\lambda}_0$ と変動係数 \bar{V} の平均値

曲線	α	$\bar{\lambda}_0$	\bar{V} 平均
グループ 1	0.089	0.2	0.11
グループ 2	0.224	0.2	0.11
グループ 3	0.432	0.2	0.11

強度曲線群との対応を表 5.2 のように定めている。またグループ 1, 2, 3 の平均値曲線を式 (5.22) の係数として表 5.3 のように与えている。

欧, 米, 日の複数曲線を比較すると図 5.22 のようになる。グループごとの強度順位は次の 1)~5) にまとめることができる。

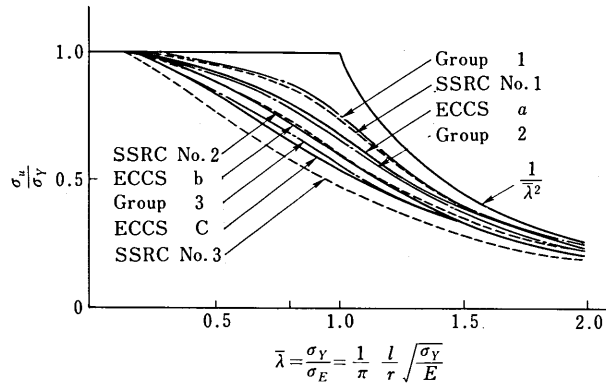


図 5.22 鋼柱の基準耐力曲線^{5, 34)}

- | | | |
|----|-------------------|---------|
| 1) | ECCS a, SSRC No.1 | Group 1 |
| 2) | ECCS a, — | Group 2 |
| 3) | ECCS b, SSRC No.2 | — |
| 4) | ECCS c, — | Group 3 |
| 5) | ECCS d, SSRC No.3 | — |

5.5 弾性拘束された柱

前節までは両端単純支持された柱の挙動を調べた。より複雑な支持条件を有する柱も、両端単純支持柱の力学的挙動を基本として発展させることができる。従来から柱の設計に用いられている基本耐力曲線も、実験的にせよ、理論的にせよ、両端単純支持柱強度に基づいて定められている。

とはいえ実構造物中の柱はこのような理想的条件の下にはなく、直接、あるいはガセット等の連結材を介して他の構造に接合されている。本節では、より実際に近い柱の強度特性を知るために、柱の両端が弾性的に拘束された柱の基本挙動について述べる。

5.5.1 有効座屈長

両端が単純支持以外の支持条件を有する中心軸圧縮弾性柱の座屈強度は、境界が簡単であれば柱のつりあい微分方程式より容易に求めることができる。これらの座屈荷重は柱長を l として次式のように表わされる^{5, 36)}。

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(Kl)^2} \tag{5.24}$$

ここに、 K は有効座屈長係数 (または有効長係数) と呼ばれ、単純支持以外の境界条件をもつ柱の座屈強度を、これと座屈強度の等しい単純支持柱長さに変換する係数と考えることができる。 Kl は有効座屈長と呼ばれ、座屈変形した柱の変曲点間長さ (単純支持柱に相当する長さ) を表わす。

代表的境界条件を有する柱の K の理論値を表 5.4 に示す. 理論値の下に示した数値は, SSRC ガイド^{5, 37)}によって示された推奨値で, 実構造物では図に示した境界条件が完全に満足されないことに対処するための安全側の値である.

より現実的な構造物では, 荷重の作用により構造物が変形すると, 剛結された柱部材端に 2 次的な曲げモーメントが導入される. このため圧縮強度は中心軸圧縮柱より低下するはずである. しかし, さらに荷重が増大し,

表 5.4 代表的境界条件と座屈有効長

境界条件	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	境界条件の説明 (θ = 回転) (u = 移動)
K の理論値	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0	$\begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}$ $\theta = 0,$ $u = 0$ $\begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}$ θ : 自由, $u = 0$ $\begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}$ $\theta = 0,$ $u = \text{自由}$ $\begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}$ $\theta = \text{自由},$ $u = \text{自由}$
SSRC の推奨値	0.65	0.80	1.2	1.0	2.1	2.0	

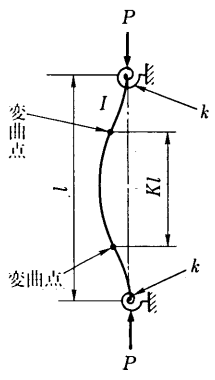
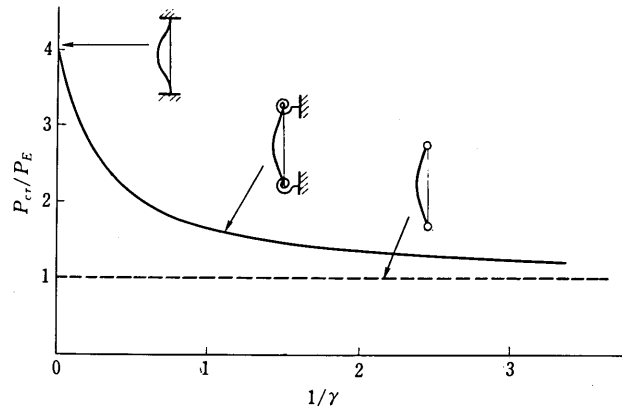
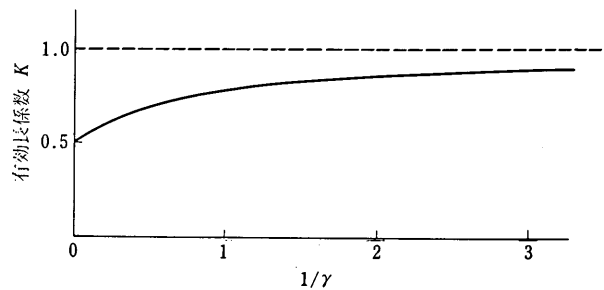


図 5.23 弾性拘束柱モデル



(a) 座屈強度とばね剛比の逆数との関係



(b) 有効長係数とばね剛比の逆数との関数

図 5.24 弾性拘束柱の座屈強度と有効長係数

柱部材の変形が進行すると剛結端部は逆に柱の変形を拘束する効果を生ずるので両端単純支持柱より強度増が期待できる。この間の柱の変曲点間距離は一定ではなく、有効座屈長は変化していくものと考えられる。

5.5.2 弾性拘束された柱の弾性座屈

実構造物中に固定された柱の挙動は複雑であり、解析も厳密には個々の構造物に応じて行わねばならない。設計上これを単純化する一つの方法として考えられることは実構造物中の柱を図5.23に示すように両端に一定剛性のばねをもつ柱モデルにおきかえて考えることである。これを弾性的拘束柱と呼ぶ。トラスやラーメンでは、このばね剛性は端部に隣接する部材の曲げ剛性の和から近似的に求めることができる。

いま、図5.23のモデル性の長さを l 、断面2次モーメントを I 、ばね剛性を $k (=M/\theta)$ とすると、この柱の弾性座屈荷重 P_{cr} は、座屈条件式としての次の超越関数を解くことによって得られる^{5.38)}。

$$\frac{\tan u}{u} = -\frac{1}{\gamma} \quad (5.25)$$

ここに、 $u=(l/2)\sqrt{P/EI}$ 、 $\gamma=(k/2)/(EI/l)$

剛比 γ の逆数 $1/\gamma$ を横軸に、 P_{cr}/P_E を縦軸に両者の関係を描くと図5.24(a)を得る。ここに、 P_E は両端単純支持柱 ($k=0$) の Euler 座屈強度である。もし、柱と同じ曲げ剛性をもつはりで2本の柱の上下端を固定した正方形ラーメンの柱に対称に軸力が作用する場合、剛比は $\gamma=1$ となるから、このラーメン柱の強度は図より単純支持柱強度の約1.7倍に上昇することがわかる。

P_{cr} が計算できると式(5.24)より有効長係数 K の値が求められる。 $1/\gamma$ と K との関係は図5.24(b)のように描かれる。

柱の両端のばね定数が異なる場合にも同様の関係を求めることができる^{5.37)}。

5.5.3 弾性拘束された柱の弾塑性座屈

実構造物中の柱は初期たわみや偏心を有しており、また実用的な細長比をもつ柱の最大耐力は弾塑性座屈によって決まる。

文献5.39)は欧米の構造物に用いられている種々の結合形式をもつ弾性拘束柱83本の強度を、初期たわみや残留応力を考慮して数値解析的に求め、計算結果を有効長係数の概念を導入して整理している。また、実用設計への有効な手法を提示している。以下にその概要を述べる。

図5.23に示す弾性拘束柱の端部拘束材の回転剛性 k と柱の全塑性モーメント M_p との比を次式のように弾性拘束係数 α で表す。

$$\alpha = k/M_p \quad (5.26)$$

この弾性拘束柱の座屈耐力の決定に、両端単純支持柱の基本強度式を利用するのが本方法の特徴である。すなわち、図5.23に示す長さ l の弾性拘束柱の強度をそれと同じ強度を有する長さ Kl の両端単純支持柱の弾塑性座屈強度におきかえて考える。この関係を耐力曲線で表せば図5.25のようになる。同図には両端単純支持柱と弾性的拘束柱の2本の耐力曲線が描かれており、同一の耐力を与える細長比パラメータをそれぞれ λ_a 、 λ_b とすると、有効長係数は

$$K = \lambda_a/\lambda_b \quad (5.27)$$

と表される。この係数 K の値がどの荷重レベルでも一定であると仮定する。この仮定の妥当性は各種の柱に対する数値計算結果から確かめられている^{5.40),5.41)}。

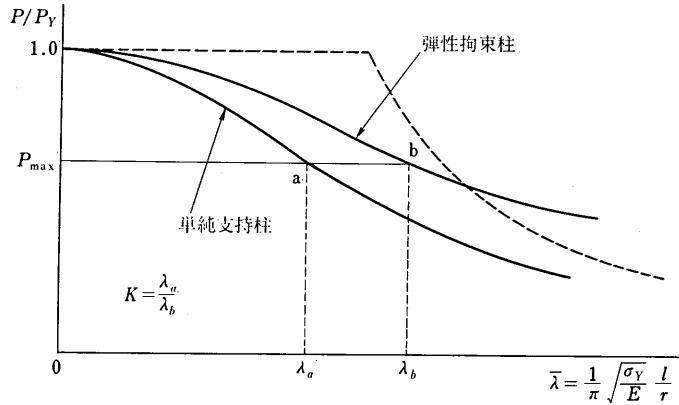


図 5.25 弾性拘束柱強度曲線の単純支持柱強度曲線への変換

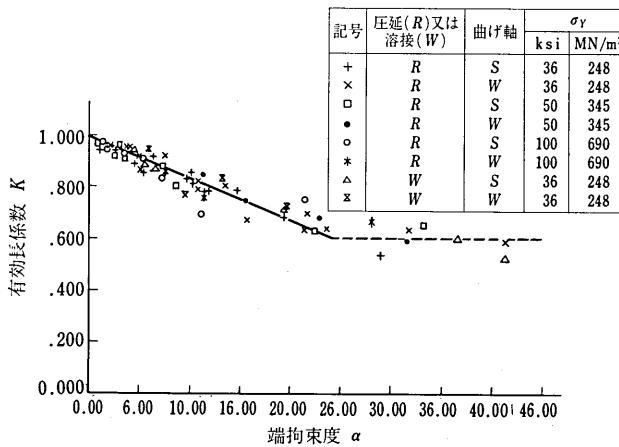


図 5.26 有効長係数 K と端拘束度 α との関係^{5.39)}

次に式 (5.26) の弾性拘束度係数 α と式 (5.27) の K との関係を 83 本の柱に対する計算結果から求め、図示すると図 5.26 のようになる。 α のある範囲で、 K と α との間に直線関係が見られる。文献 5.39) では柱の座屈方向、製作方法 (圧延か溶接か) および残留応力の大きさによってそれぞれ異なる近似直線を求めている。またこれらすべてを包含する次の近似式も求めている。

$$K = 1.000 - 0.017 \alpha \geq 0.6 \quad (\alpha < 24) \tag{5.28}$$

結局、式 (5.26) の柱の弾性拘束度 α が定められると、式 (5.28) から K が求められ、さらに式 (5.27) から有効細長比 λ_a が決定できる。よって規定の規準耐力曲線の λ_a に対応する耐力が弾性拘束柱の耐力として求められる。

わが国でも、同じ考えに基づく実験的研究^{5.42), 5.43)}が行われている。実験ははりにより弾性拘束された溶接 H 形柱を弱軸まわりに回転支持し、中心軸圧縮している。実験柱に対し、式 (5.26) の α を求め、また K の値は同じ実験柱について別に行われた中心軸圧縮実験結果および数値解析結果と弾性拘束柱の最大耐力の実験結果との比較を図 5.25 に示すような方法で各試験体ごとに行って求めている。

実験柱に対する α と K との関係を図示すると図 5.27 のようになる。文献 5.39) では溶接 H 形柱に対して α

と K の関係を次式で近似している。

$$K = 1.035 - 0.014\alpha \quad (2.5 < \alpha < 24) \quad (5.29)$$

式 (5.28) および式 (5.29) を図 5.27 に示す。実験値は $l/r=40$ の柱を除いて両式によく一致している。式 (5.29) の妥当性を確かめるために、弾性支持柱の α の値を同式に代入して K を求め、弾性支持柱の細長比 λ_e を λ_e に変換して最大耐荷力を図に示すと図 5.28 が得られる。同図から、弾性支持柱強度が、単純支持柱の基準強度曲線によく一致していることがわかる。したがって、ここに述べた方法により、ばね剛性のわかった弾性的拘束柱の耐荷力が既存の両端単純支持中心軸圧縮柱の基準耐荷力曲線によって精度よく評価できることが確かめられた。小松・西村^{5.44), 5.45)} は両端に異なったバネ定数 K_1, K_2 を有する偏心圧縮柱をストラットモデルと名づけて弾塑性解析を行い、トラスの全体弾塑性解析との挙動を比較している。

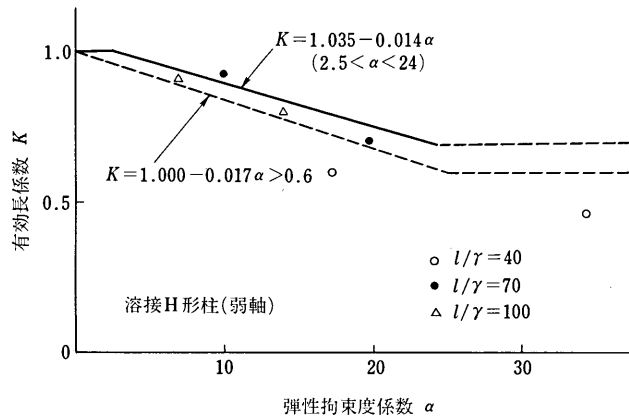


図 5.27 溶接H形柱の実験値に K と α の関係^{5.42)}

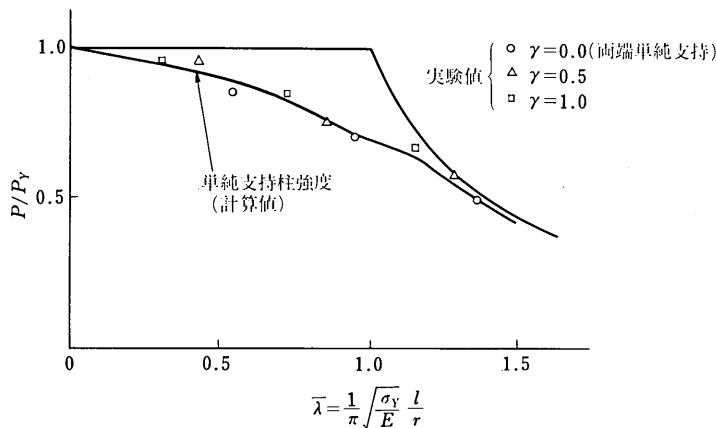


図 5.28 有効座屈係数により変換された後の実験値と単純支持柱強度との比較^{5.42)}

5.3.4 中間で支持された柱

細長比の大きい柱でも中間に支材を取付けることができれば柱の強度を著しく増加させることができる。また H 形断面柱のように強軸方向と弱軸方向で座屈強度が大きく異なる部材を用いる場合、弱軸まわりの変形に対し

て柱を中間支持すれば、構造部材としての強度を増大させ得る。

中間支持された圧縮柱の強度は中間支材の剛性や強度によって変わるが、中間支持がある大きさ以上の剛性をもてば、支点間距離を有効座屈長と考慮して設計することが可能となる。よって道路橋示方書の解説にはトラス部材の中間支材の強度を腹材圧縮力の1%の大きさに耐えられるように設計しておけば上記の取扱いができると述べている。また日本建築学会鋼構造設計規準^{5.46)}は、精算によらない場合、支材を圧縮力の2%以上の作用力に対して設計するように定めている。

以下に中間でばね支持された両端単純支持柱を例に支材の必要剛性と支持反力について述べる。

図5.29に示す中心圧縮柱の長さを $2l$ 、中点におけるばね定数を k とする。この柱の弾性座屈荷重はばねの剛性 k によって変わり、次の座屈条件式としての超越方程式^{5.32)}の解として得られる。

$$\frac{\tan 2u}{2u} = 1 - \frac{P}{kl/2} \quad (5.30)$$

ただし、 $u = (l/2)\sqrt{P/EI} = (\pi/2)\sqrt{P/P_E}$ 、 P_E ：オイラーの座屈荷重 ($=\pi^2 EI/l^2$)

上式の解は図5.29に示すようになる。同図で横軸の α は次式で与えられる無次元量である。

$$\alpha = k/k_0 \quad (5.31 a)$$

$$k_0 = \frac{2}{l} \left(\frac{\pi^2 EI}{l^2} \right) = \frac{2 P_E}{l} \quad (5.31 b)$$

ここに、 k_0 は基準ばね定数で、座屈波形が図5.29に破線で示す一波形となるのに必要な最小ばね剛性である。

図5.29からわかるように $\alpha \geq 1$ の全範囲で $P_{cr}/P_E = 1$ となる。また $\alpha < 1$ の範囲で P_{cr}/P_E と α の関係はほとんど直線的である。

次にこの柱が両端に等しい偏心量を有する場合を考える。文献5.33)はやや大きな偏心量を有し、理想弾塑性材に近い応力-ひずみ関係を仮定した矩形断面柱の耐荷力を数値解析的に求め、中間ばね定数 α との関係を調べている。それによると $\alpha=3$ 程度で、中間剛支持の場合にはほぼ近い値が得られている。また、もし材端の偏心が逆対称の場合、柱の耐荷力はかなり減少し、 $\alpha=3$ の場合でも、偏心が同じ側にある $\alpha=1$ の柱の強度近くまで低下する。

柱が期待される強度を有するために、中間支持材には十分な剛性ととも強度を有することが必要である。支材の必要強度を調べるために、等偏心圧縮柱の中間支持材に剛性 $\alpha=3$ を与えて数値計算を行い、柱の圧縮力 P と支持反力 F との関係を求めた結果^{5.49)}は設計規準に定められた強度を得るのに必要な補剛力 F が柱の圧縮力の1~2%の間にあることを示している。

5.6 局部座屈と全体座屈の連成強度

5.6.1 まえがき

長さが一定の柱の座屈強度を断面積一定のまま増大させるためには、薄肉断面として断面2次モーメントおよび断面2次半径を大きくする方が一般には経済的となる。しかし断面を構成する板要素が薄くなり過ぎると局

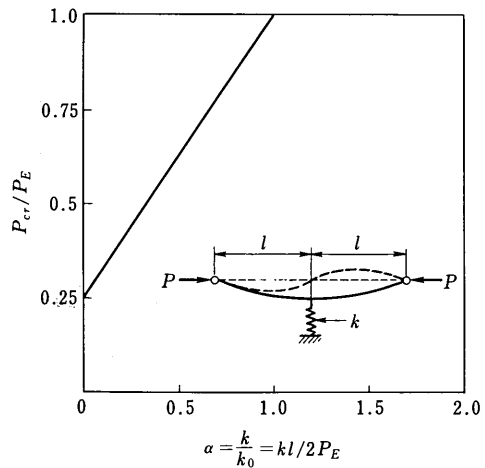


図5.29 中間で弾性支持された柱の座屈強度とばね定数

部座屈が生じ、柱全体の耐荷力を失わせる恐れがある。

平らな板要素からなる柱の中心軸圧縮による座屈荷重は、固有値問題の解として、板としての局部座屈と柱としての全体座屈の2つのモードに対して別々に得られる。

この場合、最小の座屈荷重が柱の強度を支配すると考えられるから、板要素の局部座屈強度が柱としての全体座屈強度を下まわらないように板厚を選ばなければならない。これが Bleich^{5.50)} によって代表される伝統的な薄肉鋼柱の座屈設計に対する考え方である。

ところが実構造部材には、前節までに見てきたように初期たわみや残留応力等の様々な初期不整があり、特に板要素では局所的な初期たわみが局部座屈の低下に主要な影響を及ぼす。部材は荷重の増加とともに全体変形と板要素の局部変形とが同時に進行し、中心軸圧縮柱では板要素ごとに一様であった応力も不均一となる。そして柱全体の変形が局部座屈を助長し、局部座屈変形は柱の剛性を低下させる。すなわち局部座屈と全体座屈は実構造物中では別のものではなく、相互に影響し合って連成座屈が生じる。この現象は今日でも数値解析的に複雑な問題の一つとなっている。

薄肉鋼柱の断面形には種々あるが、パイプ断面柱については第13章で、また軽量形鋼などの冷間圧延材は第14章でそれぞれ取扱い、本章では主に箱形断面柱の連成座屈強度について述べる。ただし、単一板要素の座屈強度については第8章で詳述されており、ここではその結果を利用する。

5.6.2 局部座屈強度

板要素の局部座屈強度を取扱い易くするため、有効幅の概念が用いられる。Dwight^{5.51)} は実際の板に存在する初期たわみや残留応力の影響を考慮して、両非載荷辺が単純支持された板の座屈強度式を有効幅理論をもとに導き、次式を提案した。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cr}/\sigma_y &= 1.0 & (0 \leq R \leq C) \\ \sigma_{cr}/\sigma_y &= C/R & C = 0.85 - \sigma_{rc}/\sigma_y \quad (C < R) \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

ここに、 σ_{rc} は板内部の圧縮残留応力量、 R は次式に示す板の幅厚比パラメータである。

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_E}} = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k}} \quad (5.33)$$

σ_E : 板の弾性座屈応力、 ν : ポアソン比、 E : ヤング率、 b : 板幅、 t : 板厚、 k : 座屈係数(両縁支持板の場合 4.0、自由突出板の場合 0.43)

一方、道路橋示方書^{5.52)}では局部座屈に対する許容圧縮応力度に安全率を乗じた基準耐荷力式として次式を規定している。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cr}/\sigma_y &= 1.0 & (R \leq 0.7) \\ \sigma_{cr}/\sigma_y &= 0.5/R^2 & (0.7 < R) \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

上式は $R > 0.7$ の範囲で、弾性座屈強度の1/2を基準耐荷力としている。これを図5.30に破線で示す。

わが国では板の局部座屈実験がいくつか行われているが、溶接箱形断面柱の全体座屈との関連で行われた短柱圧縮実験結果^{5.54), 5.55)}は式(5.34)よりもむしろ式(5.32)の近似式によく一致した結果を得ている。図5.31はSM 58材に対する結果で、 $C = 0.737$ となっている。

5.6.3 局部座屈と全体座屈の連成強度

板要素の局部座屈がただちに部材の全体座屈を引き起こすので、柱の全体座屈を生じる前に局部座屈を起こし

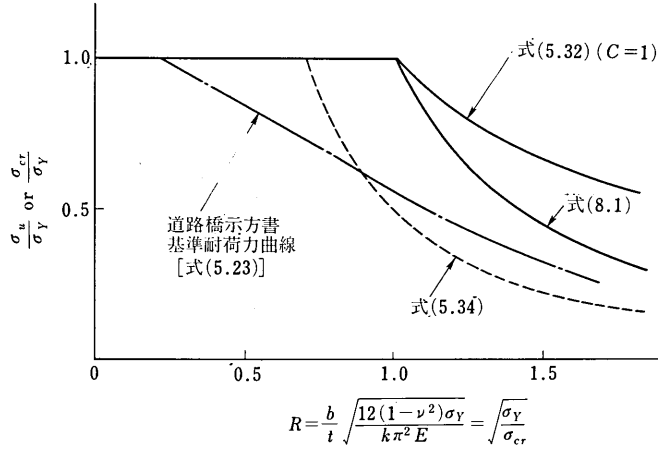


図 5.30 板の局部座屈設計公式

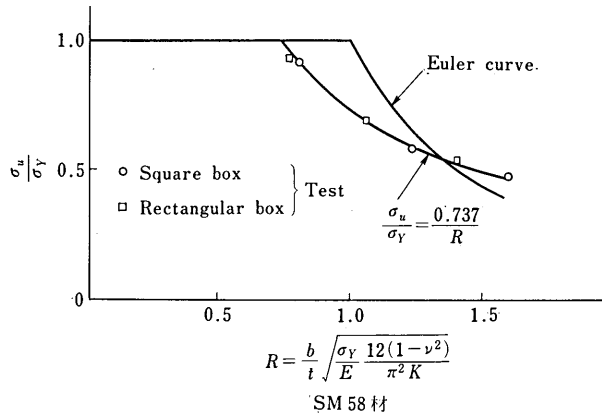


図 5.31 溶接箱形短柱の局部最大強度^{5.55)}

てはならないという前述の考えが長い間認められていた。そのため従来の示方書には板要素は降伏点応力以下では座屈しないという条件から導かれた幅厚比制限が設けられていた。

しかしながら構造物の経済的設計や高張力鋼の使用の要求に伴い、近年国内外ともこのような制限を緩和し、局部座屈を許して局部座屈と全体座屈の連成強度に基づく設計式を採用する傾向にある。わが国の道路橋示方書(1980)、AISC (1969)^{5.27)}、西ドイツの DAST 指針^{5.56)}がそれである。

道路橋示方書に新しく規定された許容軸方向圧縮応力度 σ_{ca} は次式のようなのである。

$$\sigma_{ca} = \sigma_{cag} \cdot \sigma_{cal} / \sigma_{ca0} \tag{5.35}$$

ここに、 σ_{cag} は局部座屈を考慮しない許容軸方向圧縮応力度で、基準耐力式は式 (5.23) および図 5.30 に与えられている。

σ_{cal} は板要素の局部座屈に対する許容応力度で、基準耐力式は前述の式 (5.34) である。

σ_{ca0} は局部座屈を考慮しない許容軸方向圧縮応力度の上限値で、式 (5.35) を基準耐力式で表し、母材の降伏点応力で無次元化すれば σ_{a0} の項は消える。

従来の局部座屈を許さない設計方法から、これを許す設計法へと基本的な考え方に変更が行われたが、これに

対する実験的検証は国内外とも極めて少ない。

最近わが国で行われた研究では、HT 80 材^{5.54)}、および SM 58 材^{5.55)}を用いて幅厚比の大きい溶接箱形断面柱の中心軸圧縮実験を行い、局部座屈と全体座屈の連成強度を調べている。これらの研究から以下のような結論が得られている。

1) 高張力鋼を用いた幅厚比の大きい柱では局部座屈は最高荷重に達する以前から生ずるが、これが直ちに柱の全体座屈を引起こしている訳ではなく、かなり大きな後座屈強度が見られる。また最高荷重後の変形能もかなり大きい。

2) SM 58 材による実験も同様の結果を得ているが、幅厚比の大きい部材では最高荷重後の変形能が小さいので構成要素の幅厚比は $R \leq 1.2$ 程度以下におさえることが望ましい。

3) 中心軸および偏心圧縮柱の局部座屈と全体座屈の連成強度は、AISC の考えを用いて次のように整理すれば精度のよい推定式が定められる。はじめに、柱と同一断面の短柱の局部座屈強度を式 (5.32) と同じく次式で近似する。

$$Q = C/R \leq 1.0 \tag{5.36}$$

ここに、 $Q = \sigma_{\max} / \sigma_y$ 。定数 C は実験結果から求める。 $Q\sigma_y$ すなわち短柱強度をその柱の仮想の低減された降伏点応力と考える。従来の柱の圧縮強度式、すなわち局部座屈を考えていない柱の強度式中の降伏点応力 σ_y を $Q\sigma_y$ に置き換えた式を局部座屈が生じた柱の強度式とする。この手法は Q ファクター法とも呼ばれ補剛断面柱の実験結果に対してもよい推定式となっている。

5.7 変断面柱

ラーメン構造やタワー等の主として曲げが支配的な部材は変断面にすると経済的となる。曲げと軸力を受ける部材は本書では第7章で取扱っているので、この章では軸力のみ受ける変断面柱について述べる。

変断面柱の座屈強度についての理論的および実験的研究は今日まで十分行われていない。SSRC ガイド^{5.57)}には変断面柱の設計について Lee^{5.58)} の文献より以下の考え方を示している。これは基本的には弾性拘束柱のところで述べた有効座屈長の考えと同じものである。

図 5.32 に示すような長さ l 、ある基準断面の断面 2 次モーメント I_0 をもつ変形断面柱の座屈強度を P_v とする。これが長さ gl 、断面 2 次モーメント I_0 の両端単純支持の等断面柱の座屈強度に等しいと考えると

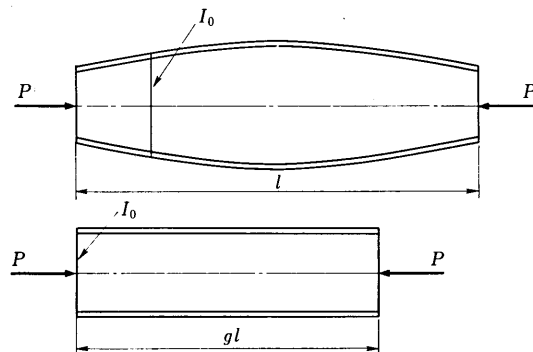


図 5.32 変断面柱と強度の等しい等断面柱

$$P_v = \frac{\pi^2 EI_0}{(gl)^2} = \frac{1}{g^2} \frac{\pi^2 EI_0}{l^2} = \frac{1}{g^2} P_0 \quad (5.37)$$

ここに、 P_0 は長さ l 、断面 2 次モーメント I_0 の両端単純支持等断面柱強度である。

もし、変断面柱の有効長さ係数 g が定められれば、すでに定められている等断面柱の座屈強度設計公式を利用して、長さ gl の柱の強度すなわち変断面柱強度を知ることができる。

g の値は半理論的に求められる。たとえばウェブ高さのみ直線的に変化する 2 軸対称 I 形断面部材について、次の近似式が求められている。この場合の I_0 は小さい方の端断面の断面 2 次モーメントをとる。

$$g = 1.000 - 0.375 \gamma + 0.080 \gamma^2 (1.000 - 0.0775 \gamma) \quad (5.38)$$

ここに、 γ はウェブ高さの変化率を表わすパラメータ。

以上は弾性座屈の場合に有効であり、実用柱に見られる弾塑性座屈強度に関しては不明なことが多い。

わが国では、主には一柱としての強度を調べた吉田^{5,59)}らの研究の一部に、柱としての Euler 座屈荷重が数値解析的に求められている。

文献 5.60) は道路橋示方書の改訂の背景と運用について解説したもので、変断面柱の座屈長および Euler 座屈荷重の求め方が紹介されている。この方法では、はじめに構造物に設計荷重を作用させ、すべての部材の断面力 N を求める。次に固有値解析を行って最小の正の固有値 λ を求めると座屈時部材力は λN となるから、有効座屈長 l_e は

$$l_e = \pi \sqrt{\frac{EI}{\lambda N}} \quad (5.39)$$

より求められる。

同文献に示された計算例では、両端単純支持された変断面柱を 10 等分し、階段状に断面変化する柱に理想化した後に固有値解析を行って λ を求めている。上式 (5.39) より各分割要素ごとに有効座屈長が求められる。 λN はすべての部分に対し一定となるが、 EI が異なるため、有効座屈長はそれぞれの部分で異なる。断面が小さく、 EI が小さいところでは式 (5.39) より有効細長比は短くなるため、柱としての許容応力 σ_{ca} は大きくなる。これは実際の変断面柱の座屈時の応力状態とも一致している。この方法による座屈荷重は安全側にあり、また従来の示方書による両端単純支持変断面柱の長さ l を有効長 l_e に等しくおいた場合の座屈荷重より高く、合理的かつ経済的となることを示している。

ただ、この方法では簡単な部材でも常に固有値解析を行わねばならない。より簡便な設計法の確立が望まれる。

5.8 今後の展望

鋼柱の強度については他のどの部材より多くの理論的および実験的研究がなされている。にもかかわらずなお多くの解決すべき問題が残されている。主なものをまとめると以下のようなろう。

(1) 複数曲線の設計に採用する動きは各国とも現実的なものとなりつつあるが、ある種の柱では基礎となる実験データが不十分であり、また実験に用いられた試験体の寸法が全般的に小さい。

解析等で柱の初期たわみ量を柱長の 1/1 000 と仮定することが多いが、実測例ではこの量は下限値としても大き過ぎると思われる。この値を用いた数値解析結果と実験値との比較には注意が必要である。ただ、実構造物中の避けられない偏心量は定量的に不明なところが多く、これを初期たわみ量に含ませていると考えれば設計上は妥当な値と言えるかも知れない。

数値解析を行って複数柱曲線を求めるとき、入力すべき広範な種類の柱についての残留応力実測データが不十

分である。

(2) 現在の柱の設計では、両端単純支持柱の強度曲線を基に柱の強度が求められている。しかし実構造物中の柱は一般に両端が弾性拘束されているので、そのような柱の強度を理論的、実験的に明らかにする必要がある。また実構造物中の弾性拘束度あるいは有効長さの評価をより明確にしていくことが望まれる。

(3) 経済的設計の要求によって薄肉板要素を用いた柱の局部座屈と全体座屈の連成強度に基づく設計法が採用されつつあるが、実際の挙動を再現する実験的研究が少ない。特に板要素の幅厚比と柱の変形能との関係を実験的に明確にする必要がある。

(4) 中心軸圧縮荷重を受ける変断面柱強度に関する実験がほとんど行われておらず、実験データの蓄積の必要がある。

参 考 文 献

5. 1) Johnston, B. G. : Column Buckling Theory : Historic Highlights, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 109, No. 9, Sept. 1983, pp. 2086~2096 (Discussions and Closure, Vol. 110, No. 8, Aug., 1984, pp. 1930~1933).
5. 2) ガランボス, T. V., 福本啓士・西野文雄訳 : 鋼構造部材と骨組—強度と設計—, 丸善, 1970.
5. 3) Bleich, F. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
5. 4) Timoshenko, S. and Gere, J. : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1961.
5. 5) 文献 5.4) p. 38.
5. 6) 文献 5.4) p. 32.
5. 7) Johnston, B (ed) : Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York, p. 41, 1976.
5. 8) 文献 5.4) p. 177.
5. 9) 文献 5.2) p. 210.
5. 10) 木原博監修 : 塑性設計法, 森北出版, p. 116, 1967.
5. 11) 青木徹彦・福本啓士 : 鋼柱の座屈強度のばらつきに及ぼす残留応力分布の影響について, 土木学会論文報告集, No. 201, pp. 31~41, 1972. 5.
5. 12) 道路橋示方書・同解説, 日本道路協会, p. 137, 昭和 55 年.
5. 13) 宇佐美勉・Galambos, T. V. : 二軸曲げを受ける単一山形鋼材の強度, 土木学会論文報告集, No. 191, pp. 31~44, 1971. 7.
5. 14) 宇佐美勉・福本啓士 : プレーシング材としての山形および T 形鋼部材の圧縮強度と設計, 土木学会論文報告集, No. 201, pp. 43~50, 1972. 5.
5. 15) 文献 5.7) p. 59.
5. 16) 加藤 勉・青木博文 : 電気抵抗溶接鋼管のひずみ履歴と残留応力—短柱の圧縮試験における見掛けの応力—ひずみ関係への影響について—, 日本建築学会論文報告集, No. 230, 1975. 4.
5. 17) 日本鋼構造協会, 標準委員会, 鋼管 JIS 小委員会 : 塑性加工をうけた鋼材の機械的性質—STK 41 の引張りならびに圧縮に対する機械的性質—, JSSC, Vol. 6, No. 53, p. 8, 1970. 3.
5. 18) Kato, B : Column Curve for Cold-formed and Welded Steel Tubular Members, Stability of Steel Structures, Preliminary Report, Second International Colloquium at Liege, ECCS, pp. 53~60, April, 1977.
5. 19) 青木徹彦・福本啓士 : 小口径電縫鋼管の統計的材料強度特性と残留応力分布の評価, 土木学会論文報告集, No. 314, pp. 39~51, 1981. 10.
5. 20) 青木徹彦・福本啓士 : 小口径電縫鋼管柱の中心軸圧縮強度分布, 土木学会論文報告集, No. 337, pp. 17~26, 1983. 9.
5. 21) 文献 5.12) pp. 93~99.
5. 22) 文献 5.2) p. 216.
5. 23) AASHTO, Standard Specifications for Highway Bridges, 10th ed., American Association of State Highway and Transportation Officials, 1969.
5. 24) AREA, Specifications for Steel Railway Briges, American Railway Engineering Association, 1970.
5. 25) DIN 4114, German Buckling Specifications, DIN 4114, Vol. I (1952).
5. 26) 文献 5.7).
5. 27) AISC : Specifications for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildinds, 1968.
5. 28) Sfantesco, D. : "Experimental Basis of the European Column Curves", Constr. Metal., No. 3 (1970), p. 5.
5. 29) Beer, H., and Schultz, G. : "Theoretical Basis of the European Column Curves", Constr. Metal., No. 3 (1970), p. 58.

- 5.30) Eurocode 3, "Common Unified Code of Practice for Steel Structures" (draft), July 1983.
- 5.31) Rondal, J. and Maquoi, R. : Single Equation for SSRC Column-Strength Curves, ASCE, ST1 Technical Notes pp. 247~250, 1979. 1.
- 5.32) 青木徹彦・福本昉士：溶接H形鋼柱の座屈強度分布について，土木学会論文報告集，No. 222，pp. 37~48，1974. 2.
- 5.33) 青木徹彦・福本昉士：200×200 mm 溶接H形鋼柱の中心軸座屈強度に関する統計的実験，土木学会年次学術講演会，pp. 397~398，1982. 10.
- 5.34) 福本昉士・伊藤義人：座屈実験データベースによる鋼柱の基準強度に関する実証的研究，土木学会論文報告集，No. 335，1983.
- 5.35) Fukumoto, Y. and Itoh, Y. : Evaluation of Multiple Column Curves from the Experimental Data-Base Approach, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 3, No. 3, pp. 2~19, 1983.
- 5.36) 福本昉士：構造物の座屈・安定解析，土木学会編，新体系土木工学 9，技報堂出版，1982.
- 5.37) 文献 5.7) p. 74.
- 5.38) 文献 5.4) p. 62.
- 5.39) Lue, E.M. and Chen, W.F. : "Strength of H-columns with Small End Restraints", The Structural Engineer, Vol. 61 B, March, 1983.
- 5.40) Jones, S.W., Kirby, P.A. and Nethercot, D.A. : "Effect of Semi-Rigid Connections on Steel Column Strength", JCSR, Vol. 1, No. 1, Sept., 1980.
- 5.41) Sugimoto, H. and Chen, W.F. : "Small End Restraint Effects on Strength of H-Columns", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 108, No. ST3, 1982.
- 5.42) 青木徹彦・福本昉士：弾性拘束された溶接H形鋼柱の中心軸・偏心軸圧縮実験，土木学会年次学術講演会，pp. 235~236，1983. 9.
- 5.43) Aoki, T. and Fukumoto, Y. : Experimentants of End-Restraint Steel Welded H-Columns, preliminary report, 3rd Int. Colloq. Stability of Metal Structures, pp. 71~76, Nov. 1983.
- 5.44) 西村宣男・小松定夫・山縣延文：弾性拘束を受ける圧縮部材の有効座屈長に関する考察，土木学会年次学術講演会，pp. 241~242，昭和 58 年.
- 5.45) 西出俊亮・小松定夫・西村宣男：ストラットモデルによるトラス圧縮材の極限強度の評価，土木学会年次学術講演会，pp. 87~88，昭和 59 年
- 5.46) 鋼構造座屈設計指針，日本建築学会，pp. 161~170，1980.
- 5.47) 文献 5.4) p. 78.
- 5.48) Matsui, C. and Yagi, K. : On the Lateral Bracing Required for Compression Members, 2nd Int. Colloq. on Stability of Steel Structures, Preliminary Report, Liege, pp. 101~106, 1977. 4.
- 5.49) 最相元雄・田中 尚・高梨晃一・宇田川邦明：圧縮材の横方向補剛について，日本建築学会論文報告集，No. 184，pp. 73~79，1971. 6.
- 5.50) 文献 5.36) p. 302.
- 5.51) Dwight, J.B. : Collopse of Steel Compression Panels, in "Developments in Bridge Design and Construction", Crosby Lockwood & Son 1971.
- 5.52) 文献 5.12) p. 93.
- 5.53) 奥村敏恵・西野文雄・長谷川彰夫：箱形断面柱の局部座屈強度，土木学会論文報告集，No. 205，1972. 9.
- 5.54) 宇佐美 勉・福本昉士・青木徹彦：溶接箱形断面柱の局部座屈と全体座屈の連成強度に関する実験的研究，土木学会論文報告集，No. 308，1981. 4.
- 5.55) 宇佐美 勉・福本昉士：鋼圧縮部材の連成座屈強度実験と有効幅理論による解析，土木学会論文報告集，No. 326，1982. 10.
- 5.56) Deutscher Ausschuss für Stahlbau (DAST.) : Beulsicherheitsnachweise für Platten, DAST-Richtlinie 012, 1978.
- 5.57) 文献 5.7) p. 344.
- 5.58) Lee, G.C., Morrell, M.L., and Ketter, R.L. : "Design of Tapered Members", Welding Research Council, Bulltin No. 173, June, 1972.
- 5.59) 吉田 博・西田 進：変断面H形鋼柱の強度と変形，土木学会論文報告集，No. 220，1973. 12.
- 5.60) 西野文雄・三木千寿・鈴木 篤：道路橋示方書，Ⅱ鋼橋編改訂の背景と運用，第 8 回 13 章ラーメン構造，橋梁と基礎，1981. 10.