

## 第3章 構造物の安定・不安定

### 3.1 概 説

本節では、構造物の挙動を具体的に説明し、それらの挙動を解析する場合の基本事項を述べ、構造物の不安定現象がどのようにして起るのかについて言及する。

#### 3.1.1 構造物の挙動

構造物の安定・不安定の問題を考える前の準備として構造物の挙動に注目してみる。今、代表的な例として図3.1に示すような単純ばりを取り上げる。この単純ばりの中央に集中荷重  $P$  のみが作用している状態を考えると、荷重載荷点でのたわみ  $\delta$  は荷重  $P$  と比例関係にあり、特別大きな荷重  $P$  を作用させない限り、線形挙動を示す。しかしながら、はりに軸方向力  $N$  が作用する場合、軸方向力が引張力のときには、軸方向力  $N$  による付加曲げモーメントの影響で、はり中央のたわみが減少し、図3.1(b)の曲線で表現されるような非線形挙動を示す。これとは逆に、軸方向力が圧縮力であるときには、軸方向力  $N$  による付加曲げモーメントの影響<sup>3.1), 3.2)</sup>で、はり中央のたわみが増大し、図3.1(c)の曲線で表現されるような非線形挙動を示す。これらの例から分るように、はりに横力  $P$  だけでなく軸方向力  $N$  が作用する場合には、はりの変形状態を考慮してつり合いを考える必要があり、その結果、荷重  $P$  とはり中央のたわみ  $\delta$  は比例関係でなくなる。すなわち、たとえはりが常にフックの法則を満たす線形弾性体であると仮定できたとしても、荷重に対するはりのたわみは非線形性を示す。このような幾何学的形状変化に伴う非線形挙動を扱う問題を幾何学的非線形問題と呼ぶ<sup>3.3)</sup>。

一般に、図3.1(b)のような荷重漸増型の幾何学的非線形挙動は、軸方向引張力と曲げモーメントを受ける部材や軸方向引張力の大きいつり橋などで見られる。また、図3.1(c)のような荷重漸減型の幾何学的非線形挙動

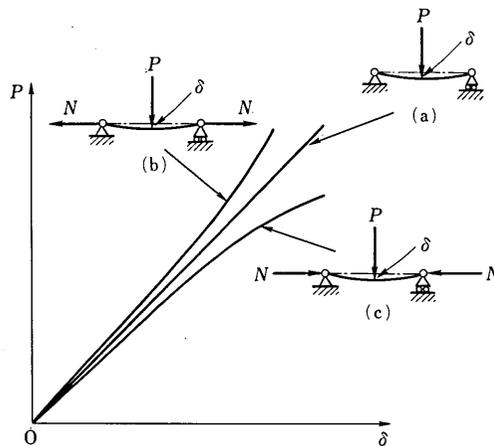


図3.1 幾何学的非線形性

は、軸方向圧縮力と曲げモーメントを受ける部材（はり一柱部材と呼ばれる）や軸圧縮力の大きいアーチなどに見られる。図 3.1 から分るように、たわみが微小であるときには、(b), (c) の場合についても荷重—たわみ関係はほぼ比例関係にあるとみなせる。

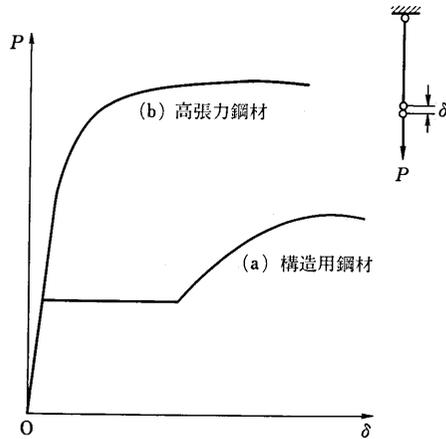


図 3.2 材料非線形性

一方、図 3.2 に示すような引張力のみが作用する部材の挙動を観察してみると、部材の材料に構造用鋼材<sup>3,4)</sup>を用いた場合には引張力  $P$  と荷重載荷点の変位  $\delta$  との関係は図 3.2(a) に示すような関係になり、材料に高張力鋼材<sup>3,4)</sup>を用いた場合には引張力  $P$  と変位  $\delta$  の関係は図 3.2(b) のような関係になる。いずれの鋼材を用いたとしても、荷重  $P$  がある一定値を超えると線形挙動を示さなくなり、鋼材の力学的性質に応じた非線形挙動を呈するようになる。このような材料の非線形性に起因する非線形問題を材料非線形問題と呼び、前述の幾何学的非線形問題と区別している<sup>3,3),3,4)</sup>。

ここでもう一度 図 3.1(c) の横力  $P$  と軸方向圧縮力  $N$  を受ける単純ばりを取り上げ、荷重  $P$  を十分増大させ、たわみを大きくさせた状態を考える。このとき、単純ばりは大きく変形しており、それに伴う断面内の応力も大

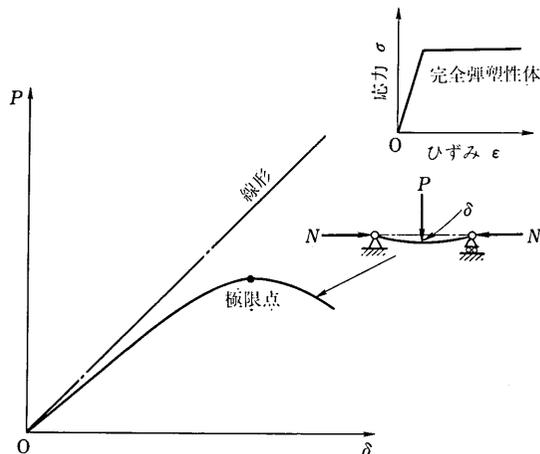


図 3.3 複合非線形性

きくなっていると考えられるので、はりの一部に塑性領域が存在していることが想像される。たとえば、はりの使用鋼材を図3.2(a)の構造用鋼材とし、鋼材の応力—ひずみ関係を図3.3に示すような完全弾塑性体の応力—ひずみ関係で近似すると、荷重の増加につれて幾何学的非線形挙動のみならず、はりの一部が塑性化することによる材料非線形性が加わり非線形性の程度が強くなる。このため、図3.3の荷重—たわみ曲線に見られるように、荷重が最大荷重に到達した後は、荷重の増加は期待できず、構造物の荷重に対する抵抗力（耐荷力または極限強度と呼ぶ）が失われることになる。このように、幾何学的非線形性と材料非線形性を併せもつ非線形問題を複合非線形問題と呼ぶ<sup>3.3), 3.4)</sup>。

図3.3の実線で示される挙動は、構造物が崩壊に至るような段階まで荷重を増加させたときに見られ、必ず最高荷重点（極限点）が存在する。一般に、実際の構造物の非線形挙動は図3.3に見られるような、最高荷重点を持つ荷重—変位曲線になることが知られている。構造物には、初期形状の不整や残留応力などで代表される初期不整（第4章 参照）が存在し、荷重の増加につれて塑性領域が増加してくることが最高荷重点の存在と深く結びついている。

### 3.1.2 構造物の解析

構造設計においては、外力に対する構造物の応答を構造解析により求め、その応答値を構造物の強度と比較し、安全性の検討を行っている。

外力に対する構造物の応答、たとえば、反力・応力・変位などは、一般に次の3つの基礎式によって求められる。

- ① 応力とひずみの関係式
- ② ひずみと変位の関係式
- ③ 力のつり合い式

①は構造物に使用する材料によって決まる式であり、材料の構成方程式とも呼ばれる。たとえば、線形弾性体ではフックの法則で代表される。②は変形の状態を表現するために必要な関係式であり、広義には、ひずみの適合条件式を含めて考えられている。③は力に関するつり合いの式であり、つり合い状態にある構造物であれば、構造物全体でも、構造物のある断面で切断した部分構造についても成り立つ式である。一般に、トラスやラーメンなどの骨組構造物では、①の代わりに力と変位の関係を用い、②の代わりに変位の連続条件式や支点上の変位の適合条件式を用いることが多い<sup>3.4)</sup>。

静定構造物の反力や内力（断面力、応力）は③の力のつり合い式のみで求められるが、不静定構造物では弾性変形を考慮して反力や内力を決定しなければならないので、①から③までの基礎式がすべて必要になる。

外力に対する応答がすべて外力の1次関数で表わされるときには、構造解析の基礎式はすべて線形関係式となり、外力と構造物の応答とが一對一に対応し、常に安定した解を与える。このような線形問題では、構造物の応答を求めるときに重ね合わせの原理を適用することができ、構造物の設計計算が比較的容易に行える。それゆえ、外力を受けている構造物に生じる変位が微小であるときには、弾性線形解析を利用して反力や内力（断面力、応力）を計算することが多い。表3.1に示すように、変位は微小であるとして、すべての基礎式を線形関係に仮定し、線形問題を解くことを微小変位解析と呼ぶ。通常的设计計算では、ほとんど微小変位解析によって反力や内力（断面力、応力）などを求めている。

図3.1(c)に示したような横力 $P$ と軸方向圧縮力 $N$ を受ける単純ばりでは、荷重の増加につれて微小変位の仮定が成立しなくなり、変位を有限と見る必要性が生じる。その結果、表3.1に見られる基礎式のうち、ひずみ

表 3.1 構造解析の基礎式

構造解析の基礎式	線形問題	幾何学的非線形問題	材料非線形問題	複合非線形問題
	微小変位解析	有限変位解析	弾塑性解析	弾塑性有限変位解析
応力-ひずみ関係式	線形	線形	非線形	非線形
ひずみ-変位関係式	線形	非線形	線形	非線形
つり合い式	線形	非線形	線形	非線形

一変位関係式が非線形になり、力のつり合い式も非線形になる。このような幾何学的非線形問題を解くことを有限変位解析と呼ぶ<sup>3.5)~3.8)</sup>。有限変位解析は、たとえ電算機を利用したとしても非常に煩雑になるので、幾何学的非線形性が無視できない問題（たとえば、はり一柱の問題、アーチやケーブルの問題）を除けば、設計計算で利用されることは少ない。

構造物内部の応力が一部弾性限界を超えて塑性域に入った場合には、構造物に塑性変形が生じる。このような弾性領域と塑性領域を持つ構造物を解析するための手法を弾塑性解析と呼ぶ<sup>3.9)</sup>。弾塑性解析では、外力に対する構造物の応答（応力、変位）を求めるにあたって、降伏条件式を用いて塑性領域を判定し、ひずみ増分理論<sup>3.10)</sup>あるいは全ひずみ理論<sup>3.11)</sup>を用いることになる。ひずみ増分理論では塑性法則を応力成分の増分と塑性ひずみの増分の関係として与えており、弾塑性解析に用いるのにより一般性があるとされている。これに対し、全ひずみ理論は塑性法則を応力成分と塑性ひずみの関係で表現するもので、各応力成分が比例的に増加し除荷過程を伴わない場合のみ正しいとされている<sup>3.11)</sup>。

弾塑性解析の特別な場合として、部材内部に生じる塑性域は断面内に集約して生じるものと仮定し、塑性ヒンジの概念を用いて図 3.4 のように曲げモーメント  $M$  と部材の曲率  $\phi$  の関係を単純化して、構造物の塑性崩壊荷重（耐荷力）を簡便に求める塑性解析がある<sup>3.2)</sup>。設計計算に弾塑性解析が使用されることは少ないが、一般に塑性解析は比較的簡単に耐荷力が算出できる点で有効な手法である。

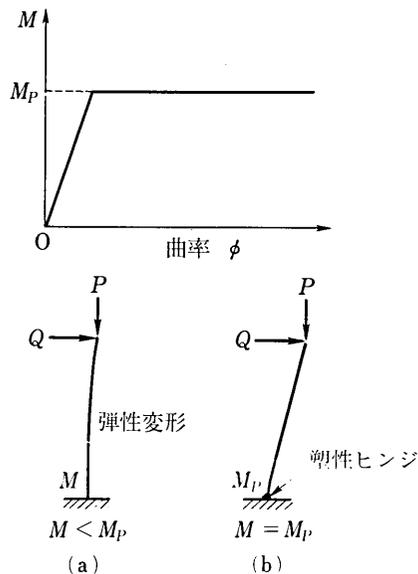


図 3.4 塑性ヒンジの概念

図3.3の横力  $P$  と軸方向圧縮力  $N$  を受けるはり一柱では、幾何学的非線形性の要因である有限変位と、材料非線形性の要因である弾塑性応力状態が同時に存在するため、非線形挙動の解析にあたっては弾塑性有限変位解析が必要となる<sup>3.8)</sup>。この場合には、表3.1に見られるように、構造解析の基礎式はすべて非線形関係式となり、解析が著しく煩雑になる。それゆえ、通常の構造物の設計計算で使用されることはきわめて少ない。ただし、作用外力の少ない比較的単純な構造物の耐荷力（極限強度）を解析的に精度良く求めるには、最も信頼のできる解析手法である。

### 3.1.3 構造物の不安定現象

線形問題においては、外力と構造物の応答とが1対1に対応するため、解は唯一つしか存在しない。しかしながら、図3.3の複合非線形挙動で見たように、構造物の形態、外力の種類、材料の特性によっては荷重—変位曲線上に特異な点（図3.3では極限点）が現われ、その点を境にして構造物の荷重に対する抵抗力が失われることがある。さらに特徴的な例として、鋼構造物でしばしば見受けられる真直ぐな細長い柱や薄い平板を一様に圧縮した場合を考える。このときの変形様式は一様な圧縮変形のみであり、目に見えるような有限変位は生じていない。にもかかわらず、圧縮力が一定値を超えると微小な乱れを与えた瞬間に過大な横方向変位が生じ、構造物は荷重をささえる抵抗力を増加させることなく、場合によっては急激に低下させることがある。以上のような現象は不安定現象と呼ばれ、鋼構造物の設計では最も注意すべき現象である。

不安定現象の例を荷重  $P$  と変位  $\delta$  の関係で整理し、分類すると、図3.5のようになる。図中において、実線は安定なつり合い経路（荷重—変位曲線）を表わし、破線は不安定なつり合い経路を表わす（安定・不安定の判別については次節参照）。図3.5(a)の例は、荷重  $P$  が分岐点（次節参照）の値に達すると、それまでの変形様式（初期変形様式と呼ぶ）から急激に別の変形様式に移行する現象で、分岐座屈あるいは単に座屈と呼ばれている<sup>3.1)–3.7)</sup>。そして、分岐点に対応する荷重を座屈荷重と呼び、座屈時の変形様式を座屈変形モードと呼ぶ。数学的にいえば、一般に座屈荷重は固有値問題における最小固有値に相当し、座屈変形モードは最小固有値に対する固有ベクトル<sup>(註1)</sup>に相当している。

図3.5(a)に見られる中心圧縮を受ける柱の安定分岐座屈（A点）やアーチの不安定分岐座屈（A'点）は分岐

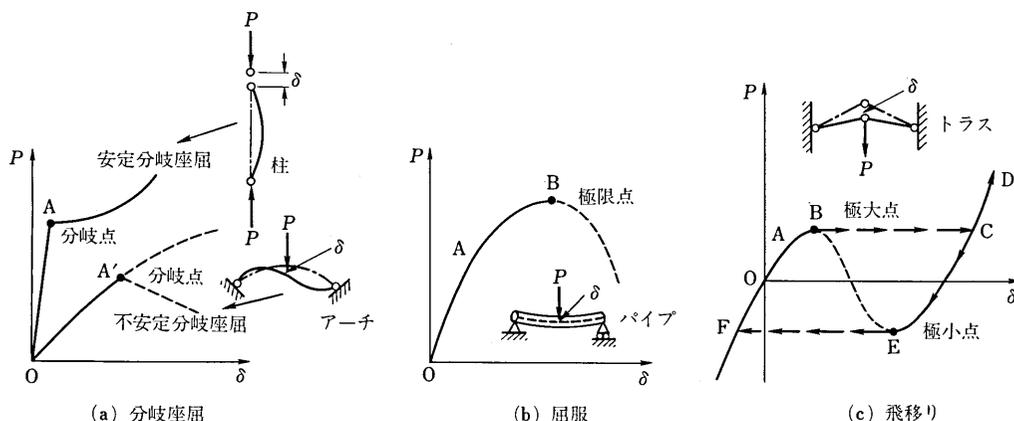


図3.5 不安定現象の分類

注1) 表3.4に示すような非対称分岐座屈の場合には、最小固有値に対する固有ベクトルが、座屈変形モードに相当しないので注意が必要である。

座屈の代表例である<sup>3,3)</sup>。

図 3.5(b) では、荷重の増加につれて非線形性が増し、荷重が極限点 (B 点) に達した後は不安定なつり合い状態になり破壊に至る不安定現象で、屈服と呼ばれている。たとえば、図 3.5(b) に示すように、薄肉のパイプが曲げを受けた場合、断面の偏平化とともに断面剛性が低下することによる屈曲現象、あるいは付加曲げモーメントの影響ではり一柱のたわみが増大し、断面内に塑性域が生じ、剛性が低下することによる屈曲現象が良く知られている。

図 3.5(c) では、荷重が増大し、トラス部材には圧縮力が生じ、極大点 (B 点) に達すると、新しい変形状態に飛移り、さらに荷重を増加させるとトラス部材には引張力が生じ、CD 線上を動く。逆に D 点から荷重を減少させていくと、変位も減少し、荷重が極小点 (E 点) に達したときに、F 点に飛移る。このような現象が飛移りと呼ばれる不安定現象である。たとえば、偏平なアーチやシェルに生じる現象である<sup>3,3)</sup>。

広い意味では、分岐座屈、屈曲、飛移りを含めて座屈と呼ぶことがある。このときには、不安定現象といえば座屈現象を指すことになる。構造物を設計する際に行う構造物の安定性の照査においては、座屈設計という表現の中にすべての不安定現象（ただし、剛体力学的な安定問題は除く）に関する検討を含めて考えている。

### 3.2 安定・不安定の判別

構造物を設計するときには、構造物に不安定現象が生じないように配慮する必要がある。本節では、構造物が安定の状態にあるか、不安定の状態にあるかを判別する方法について述べる。

#### 3.2.1 安定・不安定の概念

一般に、ある構造物が外力の作用のもとでつり合い状態にあるとき、このつり合い状態が安定であるとは、その構造物に微小な乱れを与えたとき、その乱れが時間の経過とともに減少する場合を指す<sup>3,12)</sup>。この安定の判別規準は、静的な安定・不安定の問題だけでなく、動的な安定・不安定の問題に対しても成り立つが<sup>3,13), 3,14)</sup>、ここでは静的な現象に限定して、安定・不安定の問題を考える。

構造物に微小な乱れを与えたときに、どのような量の乱れを考えるかで、安定・不安定の判別方法が異なる。本節では、安定・不安定の判別法のうち、代表的な次の 2 つについて述べる。

- ① エネルギーの変化による安定・不安定の判別<sup>3,1)</sup>
- ② つり合い状態の変化による安定・不安定の判別<sup>3,6)</sup>

① のエネルギーの変化により安定・不安定を判別する方法は、全ポテンシャルエネルギーを利用するため、

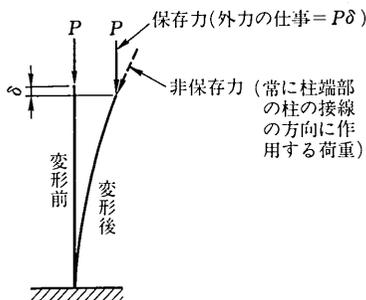


図 3.6 保存力の概念

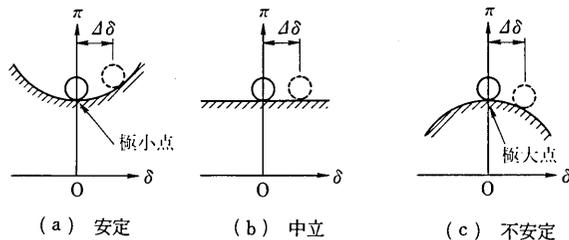


図 3.7 全ポテンシャルエネルギー  $\pi$  の変化と安定・不安定

主として図3.6に示すような保存力<sup>3.12)</sup>のみを受ける構造物の弾性安定問題に適用され、非保存力<sup>3.15)</sup>を受ける構造物の座屈問題や弾塑性座屈問題（耐荷力を求める問題を含む）には適用し難いとされている。しかしながら、安定・不安定の概念が把握し易いため、広く利用されている。たとえば、球が曲面上に乗っている場合を考えると、図3.7(a)の場合には中央にある球は安定した状態にあることが、図3.7(c)の場合には中央にある球は不安定な状態にあることが、球を中心から微小な距離 $\Delta\delta$ だけ移動させて手を離し、その後の球の運動を観察することにより、容易に理解できる。また、図3.7(b)の状態にある球は安定と不安定の間隔的な性格を持つ中立の状態とみなせる。そこで、図3.7(a), (b), (c)の球の持つ全ポテンシャルエネルギーに注目してみると、ポテンシャルエネルギーは位置エネルギーだけであるので、全ポテンシャルエネルギーの量を表わす曲線が曲面の形と同じになっていることが分る。また、つり合いの位置からの微小な乱れによる全ポテンシャルエネルギーの変化によってそのつり合い状態の安定・不安定が判別できることも分る。すなわち、全ポテンシャルエネルギーがつり合い位置において極小であれば、任意の微小な乱れに対してつり合い状態は安定であり、全ポテンシャルエネルギーが極大であれば、ある微小な乱れに対してつり合い状態は不安定になることが分る。

一方、②のつり合い状態の変化により安定・不安定を判別する方法は、弾性・塑性の区別なく一般的な座屈問題に適用することができ、初期不整（第4章 参照）を持つ構造物の耐荷力（極限強度）を調べる問題にも適用できる<sup>3.16)</sup>。たとえば、図3.8に示す軸方向圧縮力 $N$ と横力 $P$ を受けるはり一柱のつり合い曲線を考えてみる。つり合い曲線上のA点を基準のつり合い状態にとり、その状態に微小な変位の乱れ $\Delta\delta$ を与えると（図3.8のA'点）、外力 $P$ を一定にしたままではつり合い状態を保つことができない。それゆえ、つり合い曲線上の他のつり合い状態に移すためには、微小な力 $\Delta P$ が必要になる（図3.8のA''点）。したがって、微小な乱れを与え、外力を増加させない状態（A'点）にはり一柱を置くと、微小な乱れは減少し、元のつり合い位置（A点）に戻る。すなわち、基準のつり合い状態に任意の微小な乱れを与えたとき、近接したつり合い位置に移動させるために正の仕事 $\Delta\delta \cdot \Delta P$ を必要とする場合には、その基準つり合い状態は安定であるといえる。これとは逆に、図3.8のC点に注目すると、基準のつり合い状態に微小な変位の乱れ $\Delta\delta$ を与えた場合、外力 $P$ を一定にしたままではつり合い状態を保つことはできず、近接したつり合い状態に移動させるためには外力を微小な量 $\Delta P$ だけ下

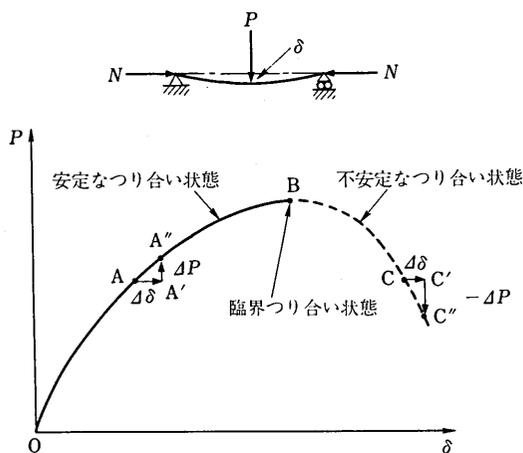


図3.8 つり合い状態の変化と安定・不安定

注2) 外力のなす仕事が、変形の径路に依存せず構造系の最初の状態と最後の状態のみで定まるとき、この外力を保存力と定義している<sup>3.15)</sup>。一般に、重力による力（荷重）は保存力である。また、外力が保存力のみである弾性構造物を保存系と呼ぶ。

げ必要がある。すなわち、基準のつり合い状態に、ある微小な乱れを与えたとき、近接したつり合い状態に移動させるために負の仕事が必要とする場合が1つでもあれば、その基準つり合い状態は不安定であるといえる。また、図3.8のB点のように安定なつり合い状態と不安定なつり合い状態との臨界点は臨界つり合い状態にあると考えられる。厳密に調べれば、この臨界つり合い状態が、安定・不安定・中立に分けられることは3.2.3項で説明する。

### 3.2.2 エネルギーの変化による安定・不安定の判別

#### (1) 1自由度系の場合

図3.9のような剛体ばねモデルの座屈現象について、全ポテンシャルエネルギーの変化を検討し、つり合い状態の安定・不安定を調べる。鉛直方向に荷重  $P$  が作用し、剛体棒が  $\theta$  だけ傾いた状態の系の全ポテンシャルエネルギー  $\pi$  は、線形回転ばねに貯えられるひずみエネルギー  $U$

$$U(\theta) = \frac{1}{2} k \theta^2 \quad (3.1)$$

と荷重  $P$  の持つ位置エネルギー  $V$

$$V(\theta, P) = -Pl(1 - \cos \theta) \quad (3.2)$$

を用いて

$$\pi(\theta, P) = U + V = \frac{1}{2} k \theta^2 - Pl(1 - \cos \theta) \quad (3.3)$$

とかける<sup>3.1), 3.17)~3.19)</sup>。

回転角に微小な乱れを与え、回転角を  $\theta$  から  $\theta + \delta\theta$  に変化させたときの  $\pi$  の変化 (全変分)  $\Delta\pi$  は

$$\Delta\pi = \pi(\theta + \delta\theta, P) - \pi(\theta, P) \quad (3.4)$$

と表わされる。

前節の考察から分るように、構造系の安定・不安定はつり合い状態に微小な乱れを与えたときの  $\Delta\pi$  の符号によって調べることができる。すなわち、図3.7を参照して

$$\left. \begin{array}{l} \text{任意の } \delta\theta \text{ に対して、常に } \Delta\pi > 0 \text{ のとき：安定} \\ \text{任意の } \delta\theta \text{ に対して、常に } \Delta\pi = 0 \text{ のとき：中立} \\ \text{ある } \delta\theta \text{ に対して、} \quad \Delta\pi < 0 \text{ のとき：不安定} \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

であることが分る<sup>3.17)</sup>

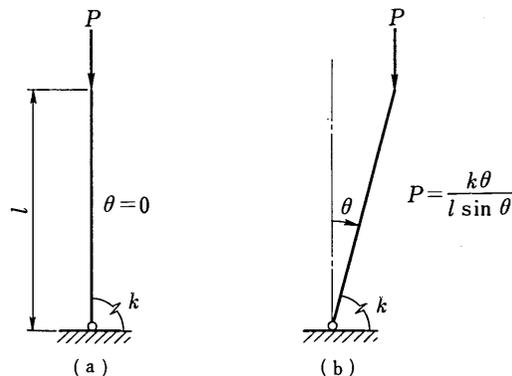


図3.9 分岐座屈の剛体ばねモデル

一般に、 $\Delta\pi$  は高次の非線形性を有しており、 $\Delta\pi$  の符号を直接調べることは困難であるので、 $\Delta\pi$  を展開し、

$$\Delta\pi = \delta\pi + \frac{1}{2!} \delta^2\pi + \frac{1}{3!} \delta^3\pi + \dots \quad (3.6)$$

と表わすことにする。ここに、 $\delta$  は変分演算子であり、

$$\delta\pi = \frac{d\pi}{d\theta} \delta\theta, \quad \delta^2\pi = \frac{d^2\pi}{d\theta^2} (\delta\theta)^2, \quad \delta^3\pi = \frac{d^3\pi}{d\theta^3} (\delta\theta)^3 \quad (3.7 \text{ a, b, c})$$

は、それぞれ第1変分、第2変分、第3変分と呼ばれている。

ポテンシャルエネルギーの停留原理によれば、系のつり合い状態は全ポテンシャルエネルギーが極値を取るときに生じる。そのためには、第1変分  $\delta\pi$  が零となることが必要となる。すなわち、エネルギーの変化に注目すると、十分小さな  $\delta\theta$  に対して、式 (3.6) は右辺の第1項が支配的になる。任意の方向の乱れ  $\delta\theta$  を考えると、 $\delta\theta$  は正負いずれの符号も取りうるので、全ポテンシャルエネルギー  $\pi$  を停留させるための必要条件

$$\delta\pi = 0 \text{ すなわち } \frac{d\pi}{d\theta} = 0 \quad (3.8)$$

が得られる。

つり合い状態では  $\delta\pi = 0$  であるので、 $\Delta\pi$  の符号の変化は乱れ  $\delta\theta$  が微小であれば、 $\delta^2\pi$  の正負によって支配される。その結果、式 (3.7 b) において  $(\delta\theta)^2$  は常に正であることを考慮すれば、安定・不安定は  $d^2\pi/d\theta^2$  の符号で決まり、

$$\left. \begin{aligned} \delta^2\pi > 0 \text{ のとき } \frac{d^2\pi}{d\theta^2} > 0 \text{ (極小): 安定} \\ \delta^2\pi = 0 \text{ のとき } \frac{d^2\pi}{d\theta^2} = 0 \quad \quad \quad \text{: 臨界}^{3.14)} \\ \delta^2\pi < 0 \text{ のとき } \frac{d^2\pi}{d\theta^2} < 0 \text{ (極大): 不安定} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

を得る。ここに、 $\delta^2\pi = 0$  のときには、さらに高次の微小項を調べる必要があることから、このようなつり合い状態を臨界つり合い状態と呼ぶことにする。すなわち、 $\delta^2\pi = 0$  かつ  $\delta^3\pi \neq 0$  のときには、式 (3.6) の  $\Delta\pi$  の符号は右辺の第3項で決まる。任意の方向の乱れを考えると、 $(\delta\theta)^3$  は正負いずれの符号も取り得るので、式 (3.6)

表 3.2 全ポテンシャルエネルギー  $\pi$  の変化による安定・不安定の判別

$\delta^2\pi$	$\delta^3\pi$	$\delta^4\pi$	$\delta^5\pi$	$\delta^6\pi$	.....	安定・不安定	
> 0						安 定	
< 0						不 安 定	
= 0 (臨界)	≠ 0					不 安 定	
	= 0	> 0				安 定	
		< 0				不 安 定	
	= 0	= 0	≠ 0				不 安 定
			= 0	> 0			安 定
				< 0			不 安 定
				= 0	.....	= 0	中 立

の  $\Delta\pi$  は正にも負にもなり得る。したがって、この場合の臨界つり合い状態は不安定であることが分る。さらに、 $\delta^2\pi = \delta^3\pi = 0$  かつ  $\delta^4\pi \neq 0$  のときには、 $(\delta\theta)^4$  は常に正であるので  $d^4\pi/d\theta^4$  が正のとき安定、 $d^4\pi/d\theta^4$  が負のとき不安定となる。

以上のことをまとめると、表 3.2 のようになる。表 3.2 より、中立のつり合い状態が存在するのは、すべての変分量が零のとき、すなわち、全ポテンシャルエネルギーが一定（局所的に）のときに限られることが分る。

そこで、図 3.9 の剛体—ばねモデルについて安定・不安定の判別法を適用してみる。まず、系のつり合い状態は、式 (3.8) より

$$\frac{d\pi}{d\theta} = k\theta - Pl \sin \theta = 0 \quad (3.10)$$

で表わされる。したがって、つり合い位置は、

$$\theta = 0 \text{ または } P = \frac{k\theta}{l \sin \theta} \quad (3.11 \text{ a, b})$$

となる。ここに、 $\theta = 0$  の解は  $P$  の値にかかわらずつり合い式を満足するので、自明な解と呼ばれている。

表 3.2 を用いて、式 (3.11 a, b) の 2 つの解の安定・不安定を調べる。式 (3.7 b) と式 (3.10) より

$$\delta^2\pi = \frac{d^2\pi}{d\theta^2} (\delta\theta)^2 = (k - Pl \cos \theta) (\delta\theta)^2 \quad (3.12)$$

とかけるので、 $\theta = 0$  のつり合い状態については

$$\frac{d^2\pi}{d\theta^2} = k - Pl \quad (3.13)$$

で安定・不安定を判別できる。すなわち、 $\theta = 0$  の解は

$$\left. \begin{aligned} P < \frac{k}{l} \text{ のとき } \frac{d^2\pi}{d\theta^2} > 0 \text{ すなわち } \delta^2\pi > 0 : \text{安定} \\ P = \frac{k}{l} \text{ のとき } \frac{d^2\pi}{d\theta^2} = 0 \text{ すなわち } \delta^2\pi = 0 : \text{臨界} \\ P > \frac{k}{l} \text{ のとき } \frac{d^2\pi}{d\theta^2} < 0 \text{ すなわち } \delta^2\pi < 0 : \text{不安定} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

である。ここに、 $P = k/l$  は安定なつり合いから不安定なつり合いへの臨界つり合い状態における荷重であるので、このときの荷重を特別に

$$P_{cr} = \frac{k}{l} \quad (3.15)$$

とおく。この臨界つり合い状態の安定・不安定を調べるために、高次の変分量を計算すると、式 (3.12) より

$$\delta^3\pi = \frac{d^3\pi}{d\theta^3} \Big|_{\theta=0} (\delta\theta)^3 = 0, \quad \delta^4\pi = \frac{d^4\pi}{d\theta^4} \Big|_{\theta=0} (\delta\theta)^4 = Pl (\delta\theta)^4 > 0 \quad (3.16 \text{ a, b})$$

が得られる。したがって、表 3.2 より、 $P = P_{cr}$  で  $\theta = 0$  の状態にある剛体棒は安定であることが分る。

一方、式 (3.11 b) のつり合い式において、つり合い形状を鉛直な形に近づけると、 $\theta \rightarrow 0$  より  $\theta/\sin \theta \rightarrow 1$  となるので、

$$P = \frac{k}{l} = P_{cr} \quad (3.17)$$

が得られる。このことより、 $P = P_{cr}$  の点は自明な解  $\theta = 0$  と自明でない解  $P = k\theta/l \sin \theta$  の分岐点であることが判明したので、 $P_{cr}$  を座屈荷重と呼ぶことにする。

また、 $\theta \neq 0$  のつり合い状態は、式 (3.11 b) より  $P > P_{cr}$  のときに存在し、式 (3.11 b) と式 (3.12) とから

$P$  を消去して

$$\delta^2 \pi = \frac{d^2 \pi}{d\theta^2} (\delta\theta)^2 = k \left( 1 - \frac{\theta}{\tan \theta} \right) (\delta\theta)^2 \quad (3.18)$$

とかけるので、 $|\theta| < \pi/2$  では常に  $\delta^2 \pi > 0$  となり、傾いている剛体棒は安定のつり合い状態にあることが分る。それゆえ、このような分岐座屈は安定分岐座屈と呼ばれている (図 3.10 参照)<sup>3,20)</sup>。すなわち、座屈した後は、傾いた変形状態が安定したつり合い状態である。

(2) 多自由度系の場合

一般的な構造物の安定・不安定を判別する方法についても 1 自由度系の場合と本質的に変ることはない。すなわち、 $n$  個の自由度  $v_i (i=1, 2, 3 \dots n)$  と保存力  $P_l (l=1, 2, 3 \dots m)$  で構造物の全ポテンシャルエネルギー  $\pi$  が表わせるとすると、全ポテンシャルエネルギーの停留条件より、つり合い状態においては

$$\delta \pi(v, P) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \sum \frac{\partial \pi(v, P)}{\partial v_i} \delta v_i = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (3.19 a, b)$$

が成り立つ。ここに、 $\pi(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, P_1, P_2, P_3, \dots, P_m) = \pi(v, P)$  と略記した。

したがって、基準つり合い状態は、式 (3.19 b) を用いて

$$\frac{\partial \pi(v, P)}{\partial v_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (3.20)$$

より求められる。

この基準つり合い状態の安定・不安定は、第 2 変分  $\delta^2 \pi$  の符号の変化を調べれば良い。すなわち、

$$\delta^2 \pi(v, P) = \sum \sum \frac{\partial^2 \pi(v, P)}{\partial v_i \partial v_j} \delta v_i \delta v_j \quad (i, j=1, 2, 3, \dots, n) \quad (3.21)$$

の符号により

$$\left. \begin{array}{l} \text{常に } \delta^2 \pi(v, P) > 0 \text{ の状態であるとき} \quad : \text{安定} \\ \delta^2 \pi(v, P) = 0 \text{ の状態であるとき} \quad : \text{臨界} \\ \delta^2 \pi(v, P) < 0 \text{ の状態が存在するとき} : \text{不安定} \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

を得る。

一般に、構造物の座屈設計では、設計の際に考えている座屈前の変形様式は安定なつり合い状態にあるので、安定なつり合い状態から不安定なつり合い状態に移る臨界点 (安定限界) に注意を払うことが多い。この臨界点は、式 (3.21) と式 (3.22) を利用して、式 (3.21) が正定値でなくなる条件<sup>3,3), 3.6)</sup>

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 \pi}{\partial v_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial v_1 \partial v_2} & \dots & \frac{\partial^2 \pi}{\partial v_1 \partial v_n} \\ & \frac{\partial^2 \pi}{\partial v_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \pi}{\partial v_2 \partial v_n} \\ & & \dots & \frac{\partial^2 \pi}{\partial v_n^2} \end{array} \right| = 0 \quad (3.23)$$

SYM

により決定できる。すなわち、安定から不安定なつり合い状態へ移る臨界点を求めるには、1 自由度系の場合と同様に、まず式 (3.20) より座屈前の変形様式である基準状態のつり合いを求め、各つり合い点で (3.23) が成立するかどうかを調べれば良い。

### 3.2.3 つり合い状態の変化による安定・不安定の判別

#### (1) 1自由度系の場合

つり合い状態の変化による安定性の検討を前項と同様に1自由度系の剛体—ばねモデルの分岐座屈現象(図3.9参照)を例に行う。

鉛直方向に外力  $P$  を受ける剛体棒は、通常の状態では鉛直な状態にあると考えるのが一般的であると思われるが、1自由度系の剛体棒の安定・不安定を調べるために、 $\theta$  だけ傾いてつり合っているものとする。このときのつり合い状態を、式(3.10)を参照して

$$P = -\frac{k\theta}{l \sin \theta} \equiv F(\theta) \quad (\text{ただし, } \theta \neq 0) \quad (3.24)$$

とおく。この基準のつり合い状態に対して、微小な乱れ  $\Delta\theta$  を与えたとき、外力を  $\Delta P$  だけ加えることによって、近傍のつり合いに移すことができるとすれば、式(3.24)を用いて近傍のつり合い状態は

$$P + \Delta P = F(\theta + \Delta\theta) \quad (3.25)$$

とかける。

式(3.25)の  $F(\theta + \Delta\theta)$  を基準状態  $\theta$  の回りでテイラー展開し、式(3.25)と式(3.23)の差をとると

$$\Delta P = \frac{dF}{d\theta} \Delta\theta + \frac{1}{2!} \frac{d^2F}{d\theta^2} (\Delta\theta)^2 + \dots \quad (3.26)$$

が得られる。ここで、式(3.26)の右辺第1項の導関数はつり合い曲線上で特別な意味を持っているので、

$$K_t(\theta) \equiv \frac{dF(\theta)}{d\theta} \quad (3.27)$$

とおく。この  $K_t(\theta)$  は、基準のつり合い位置  $\theta$  での  $F(\theta)$  と回転角  $\theta$  の間の接線剛性<sup>3.6)</sup>と呼ばれている。

式(3.25)で与えられる  $\Delta P$  は微小な乱れ  $\Delta\theta$  を与えたときに系がつり合うために必要な外力である。したがって、任意の向き of 乱れ  $\Delta\theta$  に対して、常に

$$\Delta\theta \Delta P > 0 \quad (\text{安定}) \quad (3.28)$$

が成り立つとき、この基準つり合い状態は安定と見なせる。これに対して、乱れの中に1つでも、

$$\Delta\theta \Delta P < 0 \quad (\text{不安定}) \quad (3.29)$$

を満たすものが存在すると、この基準つり合い状態は不安定である。また、任意の向き of 乱れ  $\Delta\theta$  に対して、常に

$$\Delta\theta \Delta P = 0 \quad (\text{中立}) \quad (3.30)$$

が成り立つとき、この基準つり合い状態を中立と呼ぶことができる。

よって、式(3.26)を用いて安定・不安定の判別条件を整理すると、基準つり合い状態のまわりの微小な乱れ  $\Delta\theta$  に対して、常に

$$\Delta\theta \left[ K_t(\theta) \Delta\theta + \frac{1}{2!} \frac{d^2F(\theta)}{d\theta^2} (\Delta\theta)^2 + \dots \right] > 0 \quad (3.31)$$

が成り立つとき安定、左辺が常に零となると中立、それ以外の場合が不安定となることが分る<sup>3.6)</sup>。

乱れ  $\Delta\theta$  は微小であることから、 $K_t(\theta) \neq 0$  のときの安定・不安定は式(3.31)の第1項で決まる。 $(\Delta\theta)^2$  は常に正であるので、安定・不安定は  $K_t(\theta)$  の符号で決まり、

注3) 1自由度系を例にとれば、接線剛性とは図3.8の基準つり合い状態(A, B, C点)における接線の傾きである。

表 3.3 つり合い状態の変化による安定・不安定の判別

$K_t = \frac{dF}{dv}$	$\frac{d^2F}{dv^2}$	$\frac{d^3F}{dv^3}$	$\frac{d^4F}{dv^4}$	$\frac{d^5F}{dv^5}$	.....	安定・不安定	
> 0						安 定	
< 0						不 安 定	
= 0 (臨界)	≠ 0					不 安 定	
	= 0	> 0				安 定	
		< 0					不 安 定
	= 0	= 0	= 0	≠ 0			不 安 定
				> 0			安 定
			< 0			不 安 定	
= 0					.....	.....	中 立

(注) つり合い式:  $P=F(v)$

$$\left. \begin{aligned}
 &K_t > 0 \text{ のとき : 安定} \\
 &K_t = 0 \text{ のとき : 臨界} \\
 &K_t < 0 \text{ のとき : 不安定}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

となる。  $K_t=0$  のとき系は臨界つり合い状態にあるので、式 (3.31) の符号は左辺第2項の符号で決まり、任意の向きの乱れを考えると、  $(\Delta\theta)^2$  は正にも負にもなり得る。したがって、この場合は不安定となる。さらに、  $\frac{dF}{d\theta} = \frac{d^2F}{d\theta^2} = 0$  のときには、  $(\Delta\theta)^4$  の係数の正負によって、安定・不安定の判別をすることになる。

以上のような安定・不安定の判別方法をまとめ、回転角  $\theta$  の代りに一般化された変位  $v$  を用いて整理すると、表 3.3 が得られる。

表 3.3 に従って、図 3.9 の剛体—ばねモデルの安定・不安定を判別する。式 (3.24) より

$$K_t = \frac{dF}{d\theta} = \frac{k}{l} \left( \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{1}{l \sin \theta} (k - Pl \cos \theta) \quad (3.33)$$

が得られるので、  $\theta \rightarrow 0$  とすると

$$\left. \begin{aligned}
 &P < \frac{k}{l} \text{ のとき } K_t = +\infty : \text{安定} \\
 &P = \frac{k}{l} \text{ のとき } K_t = 0 : \text{臨界} \\
 &P > \frac{k}{l} \text{ のとき } K_t = -\infty : \text{不安定}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

が得られる。それゆえ、  $\theta=0$  の状態の安定限界荷重は

$$P = \frac{k}{l} = P_{cr} \quad (3.35)$$

となる。すなわち、  $P = P_{cr}$  の点は自明な解  $\theta=0$  と自明でない解  $\theta \neq 0$  との分岐点となっている。また、この臨界つり合い状態は、  $\frac{d^2F}{d\theta^2} = 0$ 、  $\frac{d^3F}{d\theta^3} > 0$  となるため前項と同様に安定であることが分る。

さらに、  $\theta \neq 0$  のつり合い状態は、式 (3.33) より  $P > P_{cr}$  のとき

$$K_t > 0 : \text{安定} \quad (3.36)$$

となる。したがって、 $P > P_{cr}$ で傾いた剛体棒は安定なつり合い状態にあることが分る。

そこで、式 (3.33) の接線剛性と式 (3.18) の全ポテンシャルエネルギーの第2変分とを比べてみると、図 3.10 のような対応が付き、変化の様子は一致することが分る。このことから、剛体-ばねモデルのような保存力を受ける弾性系の安定問題では、全ポテンシャルエネルギー  $\pi$  の第2変分の符号の変化を調べることに、接線剛性の符号の変化を調べることは等価であることが分る。

(2) 多自由度系の場合

多自由度系の場合にも1自由度系の場合と同様に考えることができる。すなわち、反力も含め  $n$  個の外力  $P_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) を受ける構造物が  $n$  個の自由度  $v_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) を持ち、つり合い状態にあると仮定すれば、つり合い式は

$$P = F(v) \text{ すなわち } P_i = F_i(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \tag{3.37}$$

と表わされる。

したがって、表 3.3 を参考に接線剛性を計算すると、

$$K_i = \frac{\partial F_i(v)}{\partial v_i} \quad (i=1, 2, 3, \dots) \tag{3.38}$$

となり、マトリックスの形で書けば、

$$K_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v_1} & \frac{\partial F_1}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial v_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v_1} & \frac{\partial F_2}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial v_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial v_1} & \frac{\partial F_n}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial v_n} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

とかける。この形のマトリックスを接線剛性マトリックスと呼ぶ。

それゆえ、表 3.3 を参照すれば、多自由度系であっても、接線剛性マトリックスが常に正定値マトリックスであれば、安定なつり合い状態にあることが、接線剛性マトリックスの行列式の値が零になることがあれば臨界つり合い状態にあることが、それ以外の場合が不安定なつり合い状態であることが分る。もちろん、臨界つり合い状態の安定・不安定・中立を調べるには、表 3.3 に示したようにさらに高階の導関数の計算が必要である。

一般に、接線剛性マトリックスが正定値であるか否かを判別するには、接線剛性マトリックスの固有値を調べれば良い。接線剛性マトリックスの固有値がすべて正であれば、多自由度系の構造物は安定であり、1つでも負の固有値を持てば、構造物は不安定なつり合い状態にある。したがって、座屈設計の際のように、構造物のつり合い状態が安定から不安定に変化する臨界点を知るだけであれば、零固有値を持つ条件すなわち接線剛性マトリックスの行列式の値が零となる条件を用いて、臨界荷重(座屈荷重)を求めることができる。この臨界点は、式 (3.37) より座屈前の変形様式である基準状態のつり合いを求め、このつり合い点で

$$|K_i| = 0 \tag{3.40}$$

が成立するかどうかを調べるにより決定できる。

1自由度系の場合と同様に、式 (3.23) の行列式から求まる座屈荷重と式 (3.40) の行列式から求まる座屈荷重は、保存系の弾性安定問題では一致し、この場合の両者の安定・不安定の判別方法は等価になる。一般的には、

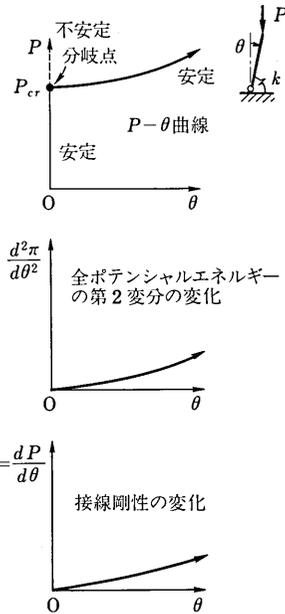


図 3.10 安定・不安定の判別方法の等価性

接線剛性マトリックスを利用する方が適用範囲も広く、汎用性があるので、電算機の利用が増大するにつれて、式 (3.30) の形の接線剛性マトリックスを用いる場合が多くなってきている。

### 3.3 線形座屈解析

本節では、座屈設計で問題となる座屈荷重の求め方について考える。

#### 3.3.1 座屈問題の線形化

前節で、構造物の安定・不安定を調べるには高次の非線形問題を解かねばならないことを知った。しかしながら、実際の構造設計においては設計時に設定する変形様式は当然のことながら安定のつり合い状態になければならない。したがって、座屈設計では、つり合い状態が安定から不安定に移る臨界のつり合い状態に注目し、安定限界を調べれば良いと考えられる。多くの不安定現象が座屈現象と密接に結びついているので、ここでは、座屈問題を対象に、座屈が生じる前の力のつり合い状態を線形化するとともに、座屈前の構造物の形状変化を無視することによって、安定限界（座屈荷重）のみを簡便に求める方法を考える。本節では、座屈荷重のみを求めるために簡略化した解析法を線形座屈解析<sup>3.4),3.8)</sup>と呼び、次節に示すつり合い点を逐次追跡しつつ径路上の特異点（分岐点・極限点）を調べる非線形座屈解析と区別することとした。

安定限界のみに注目すると、座屈が生じたときの力のつり合いは座屈後の形状について考えるものの、座屈に伴う変位は微小と考えられるので、つり合い式を線形化できる（図 3.11 の点線矢印のような線形化）。このような線形化により、安定限界荷重である座屈荷重が 1 回の固有値計算で求まる。

そこで、座屈荷重を求めるための仮定として、

- ① 座屈が生じる前の変位は小さく、座屈以前の構造物の形状変化による影響は無視できる。
- ② 座屈が生じる前の構造物の挙動は線形であり、応力（断面力）は荷重に比例する。
- ③ 座屈が生じるときの力のつり合いは、座屈変形が生じた後の形状について考えるが、座屈に伴う変位は微小であり、座屈に伴う変位に対してつり合い式を線形化できる。

を設ける<sup>3.4)</sup>。

以上の仮定から分るように、線形座屈解析では、座屈前の構造物の挙動を線形化し、かつ、構造物の形状変化を無視しているため、座屈前の変形挙動が強い非線形を示す場合（図 3.11 参照）には、線形座屈解析によって求められる座屈荷重は実際の構造物の座屈荷重よりも大きくなる。付言するならば、等曲げを受ける両端単純支持ばりの横倒れ座屈問題や等分布荷重を受けるアーチの面内座屈問題などにおいても、座屈前の形状変化の影響が存在するが、通常解析では、その影響を無視し、線形座屈解析により座屈荷重を求めている。

そこで、図 3.9 の剛体—ばねモデルの分岐座屈を例に線形座屈解析を行ってみる。まず、仮定①により、与え

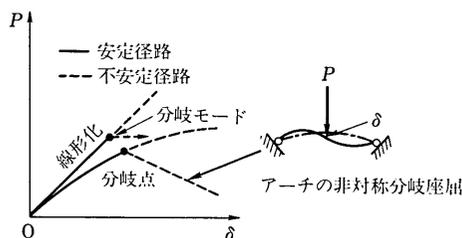


図 3.11 座屈問題の線形化

られた荷重  $P_0$  に対する部材の断面力  $F_0$  を求める。この場合には、剛体棒であるので座屈前の断面力は直ちに

$$P_0 = F_0 \quad (3.41)$$

と求まる。 $P_0$  を  $\lambda$  倍したときに座屈するものとすれば、分岐点での断面力  $F$  は、仮定②より剛体棒について 1 個の無次元パラメータ（荷重係数） $\lambda$  を用いて

$$F = \lambda F_0 \quad (3.42)$$

と表わすことができる。次に、この  $F$  を初期応力と考え、分岐点でのつり合い式を求めると、分岐点では荷重が増減することなく近傍につり合い状態が存在することから、仮定③を考慮して、微小角  $\Delta\theta$  に関するつり合い式

$$k\Delta\theta - F l \Delta\theta = 0 \quad (3.43)$$

が得られる。この式は、式 (3.10) において、 $\theta$  を  $\Delta\theta$  で置き換え、 $\sin \Delta\theta \doteq \Delta\theta$ 、 $P = F$  とおき、線形化した式と同じになっている。

ここで、式 (3.41)、(3.42) を式 (3.43) に代入すると

$$[k - \lambda P_0 l] \Delta\theta = 0 \quad (3.44)$$

が得られる。式 (3.44) の  $k$  はばねの剛性であり、 $-P_0 l$  は形状変化に伴って生ずる幾何剛性である。

式 (3.44) より、 $\Delta\theta = 0$  となる自明な解以外の解が存在するための条件（分岐座屈の起こる条件）として

$$k - \lambda P_0 l = 0 \quad (3.45)$$

が得られる。この式より、固有値  $\lambda_{cr}$  は

$$\lambda_{cr} = \frac{k}{P_0 l} \quad (3.46)$$

となり、座屈荷重  $P_{cr}$  が

$$P_{cr} = \lambda_{cr} P_0 = \frac{k}{l} \quad (3.47)$$

と求まる。この座屈荷重は、前節で求めた座屈荷重と一致している。

### 3.3.2 エネルギー法

座屈荷重が正確に求まらない場合、その近似値を探す必要がある。座屈荷重の近似値を求める有効な方法の一つにエネルギー法がある<sup>3.21), 3.22)</sup>。

線形座屈解析によれば、分岐点近傍に座屈後のつり合い状態が存在することから、分岐点を全ポテンシャルエネルギーの基準点に選べば、座屈前後の全ポテンシャルエネルギーの変化量  $\Delta\pi$  のみに注目して、前節の臨界つり合い状態の判別基準より、座屈荷重を求めることができる。すなわち、座屈に伴う微小変位  $\Delta v$  によるひずみエネルギーの増加量  $\Delta U$  と外力  $P_0$  のポテンシャルエネルギーの変化量  $\Delta V$  を用い、外力  $P_0$  を  $\lambda$  倍したときに座屈するものとすれば、臨界つり合い状態の判別条件より

$$\Delta\pi(\Delta v, \lambda P_0) = \Delta U(\Delta v) + \Delta V(\Delta v, \lambda P_0) = \Delta U(\Delta v) + \lambda \Delta V(\Delta v, P_0) = 0 \quad (3.48)$$

が得られる。ここに、保存系では外力のポテンシャルエネルギーは外力に比例するので、 $\Delta V(\Delta v, \lambda P_0) = \lambda \Delta V(\Delta v, P_0)$  を用いている<sup>3.22)</sup>。

したがって、無次元パラメータ  $\lambda$  は

$$\lambda = - \frac{\Delta U(\Delta v)}{\Delta V(\Delta v, P_0)} \quad (3.49)$$

と表わせる。もしも座屈モード  $\Delta v$  が正確に分り、そのときの  $\lambda$  が  $\lambda_{cr}$  として計算できるならば、座屈荷重  $P_{cr}$

は

$$P_{cr} = \lambda_{cr} P_0 \quad (3.50)$$

となる。これに対して、すべての境界条件を満たす分岐方向の変形様式（座屈モード） $\Delta v$ として、近似値を利用した場合には、座屈荷重は  $P_{cr}$  に比べて高めの近似値になる。

さらに、エネルギー法では、座屈モード  $\Delta v$  の仮定の仕方によって数多くの近似解法が存在する<sup>3,3)</sup>。一般には、境界条件を満たす座屈モード  $\Delta v$  として、任意の数の関数  $\Delta v_k$  の線形結合

$$\Delta v = \sum C_k \Delta v_k \quad (3.51)$$

を使用することが多い。ここに、 $C_k$  は未定係数である。

以上の一般的な解析法を、図3.9の剛体—ばねモデルに適用し、座屈荷重を求めてみることにする。線形座屈解析では、座屈後の変位は微小であると仮定しているのので、式(3.3)に関して  $\theta$  を  $\Delta\theta$  とおき、 $\cos \Delta\theta \doteq 1 - \frac{(\Delta\theta)^2}{2}$  を用いれば、式(3.48)より

$$\Delta\pi(\Delta\theta, \lambda P_0) = \frac{1}{2} k (\Delta\theta)^2 - \lambda \cdot \frac{1}{2} P_0 l (\Delta\theta)^2 = 0 \quad (3.52)$$

が得られる。それゆえ、無次元パラメータ  $\lambda$  は臨界状態において

$$\lambda_{cr} = \frac{\frac{1}{2} k (\Delta\theta)^2}{\frac{1}{2} P_0 l (\Delta\theta)^2} = \frac{k}{P_0 l} \quad (3.53)$$

と表わせる。したがって、座屈荷重  $P_{cr}$  は

$$P_{cr} = \lambda_{cr} P_0 = \frac{k}{l} \quad (3.54)$$

となり、これまでの結果と一致する。

### 3.3.3 マトリックス変位法

構造物が多く部材あるいは変断面部材を含む部材より構成されている場合には、マトリックス構造解析により座屈荷重を求めるのが一般的である。この手法では、構造物を有限個の要素に分割し、微小変位解析を用いて、与えられた外力  $P_0$  に対する各要素の内力（断面力） $F_0$  を計算する。今、外力  $P_0$  を  $\lambda$  倍したときに座屈するものとすれば、分岐点での内力（断面力） $F$  は、1個の無次元パラメータ  $\lambda$  を用いて

$$F = \lambda F_0 \quad (3.55)$$

とかける。次に、この  $F$  を、分岐点を基準状態としたときの初期応力として、分岐点近傍のつり合い式を幾何学的形状変化を考慮して作成すると、各要素について、

$$[k_L + \lambda k_C] \Delta v^e = \Delta f^e \quad (3.56)$$

が得られる。ここに、 $\Delta v^e$  は座屈後の微小な節点変位であり、 $\Delta f^e$  は各要素の節点力である。また、 $k_L$  は微小変位理論による線形の剛性マトリックスであり、 $k_C$  は変形後の幾何学的形状変化を考慮してつり合い式をたてたために生じたことから幾何剛性マトリックスと呼ばれ、基準状態における初期内力（断面力、応力）にも依存することより初期応力マトリックスとも呼ばれている。

式(3.56)を全体座標系に変換して全要素を集め、次の固有値問題の形に構造物全体のつり合い式を作成する。

$$[K_L + \lambda K_C] \Delta v = 0 \quad (3.57)$$

ここに、 $\Delta v$  は構造物全体の座屈後に生ずる微小節点変位であり、 $K_L$ 、 $K_C$  はそれぞれ全体座標系における構造物全体の剛性マトリックスと幾何剛性マトリックスである。数学的には、式(3.57)は  $\lambda$  を固有値、 $\Delta v$  を固有ベ

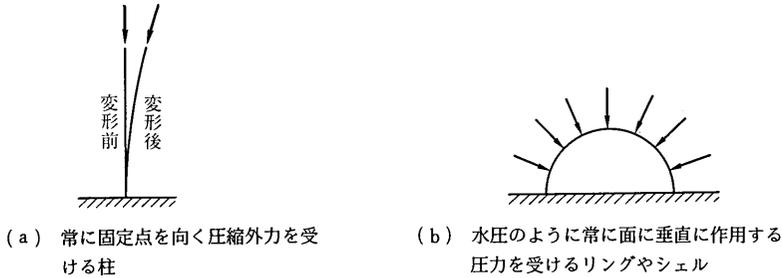


図 3.12 特別な幾何剛性マトリックスを必要とする例

クトルとする固有値問題を構成している。

したがって、 $\Delta v = 0$  の自明な解以外の解が存在する条件

$$|K_L + \lambda K_G| = 0 \quad (3.58)$$

より、固有値  $\lambda_{cr}$  が求まり、座屈荷重は  $\lambda_{cr} P_0$  と計算できる。

しかしながら、座屈変形に伴って外力の方向が変化する場合、すなわち、図 3.12 に見られるような

(a) 常に固定点を向く圧縮外力を受ける柱の場合

(b) 水圧のように常に面に垂直に作用する圧力を受けるリングやシェルの場合

などに対しては、通常の幾何剛性マトリックスを用いた線形座屈解析では誤った座屈荷重を計算することになるので注意を要する。このような場合には、厳密な非線形つり合い式 (3.37) から出発し、構造物全体の接線剛性マトリックスを式 (3.38) から求め、それを基準つり合い状態の内力 (断面力、応力) や変位に関して線形化すれば、正しい幾何剛性マトリックスが求まる。このとき、基準状態の内力は微小変位解析の仮定を用いて外力と線形関係で結びつけられるので、固有値解析により座屈荷重が求められる。

このように、マトリックス変位法は適用範囲が広く、汎用性に富んでいるので、電算機の進歩とともに線形座屈解析の有力な解法としての位置づけが明確になってきている。

### 3.4 数値計算法

本節では、不安定現象の発生する分岐点や極限点の求め方および非線形つり合い径路の追跡方法について述べる。

#### 3.4.1 線形座屈解析

圧縮荷重を受ける柱や平板の弾性座屈、あるいは剛なラーメンの弾性座屈のように、分岐点に達するまでの変形が微小で、その変形挙動がほぼ線形とみなせる場合 (図 3.5(a) の安定分岐座屈の場合) には、マトリックス法、たわみ角法などを用いて求めた式 (3.57) で表現される固有値問題を解いて固有値 (座屈荷重) と固有ベクトルが求められる。このような固有値問題を効率的に解くためには、問題の性質 (標準形か一般形の固有値問題<sup>注4)</sup>か、マトリックスは実対称か否かなど) に応じて、適切な解法を選ぶことが重要である。

数学上の固有値問題として扱うことのできる式 (3.57) の解法については文献 3.23)～3.25) に詳しく紹介さ

注4) 固有値を  $\lambda$ 、固有ベクトルを  $\Delta v$  としたとき、固有値問題は次のように分類できる。

$[A + \lambda I] \Delta v = 0$ : 標準形の固有値問題

$[A + \lambda B] \Delta v = 0$ : 一般形の固有値問題

ここに、 $[I]$  は単位マトリックスであり、 $[A]$ 、 $[B]$  は正方マトリックスである。

れているので、それらを参照されたい。一般論として、固有値問題のプログラム作成上の難易度に注目すると、マトリックスの次元数が100元程度で数個の固有値と固有ベクトルを求めるのであれば、べき乗法か、あるいは多少複雑になるが、計算効率のよい逆反復法を用いるのが最も簡単である。次元数がさらに大きくなるときには、スツルム法とか二分法（バイセクション法）と呼ばれる解法を用いると良い。この解法では、求める固有値の数が多くなると計算時間が長くなる難点はあるが、求めた固有値が第何番目の固有値であるかが分り、信頼性のある解法である。さらに優れた解法としては、サブスペース法がある。プログラムは複雑になるものの、立体骨組構造解析などのように近接固有値や重複固有値が現われる場合には有効な方法である。

なお、骨組構造物の座屈解析においてたわみ角法などに基づき安定関数を使用した場合には、接線剛性マトリックスの要素が固有値 $\lambda$ に関する超越関数になるので、公式的な解法がなくなり、問題に応じて適切な解法を考える必要がある（第11章参照）。最も簡単な方法は、固有値 $\lambda$ の初期値を接線剛性マトリックスに代入し、そのときの行列式の符号の変化から固有値 $\lambda$ の近似値を改良してゆく方法である。この反復計算には2分法<sup>3.22)</sup>が使い易い。数値計算上注意すべき点は、安定関数を用いた式では桁落ちやオーバーフローが生じることがあるので、できるだけ簡単な式に変形してから計算すると良い。

### 3.4.2 非線形構造解析

図3.5に見られる不安定分岐座屈や屈服、飛移り現象のように特異点に達する前の非線形性が無視できない問題では、特異点直前の変位や応力を求めるための非線形構造解析と、特異点を求めるための計算が必要である。後者の計算法については3.4.3項で説明する。

非線形構造解析の数値計算法としては、増分法と反復法が最もよく知られており<sup>3.26), 3.27)</sup>、通常はつり合い径路（荷重—変位曲線）を追跡するためと解の精度を上げるために両者を併用した混合法が用いられている<sup>3.9)</sup>。

荷重増分法では、既知の荷重（たとえば、設計荷重）を構造物の非線形性に応じて分割し<sup>注5)</sup>、各増分段階で変位や応力などの増分量を、線形化された式を用いて求める。対象構造物（骨組構造、板構造、シェル構造など）や解析内容（弾性有限変位解析、弾塑性有限変位解析）によって構造解析に用いる式の形は異なるが、最も汎用性のあるマトリックス変位法を用いた場合には、前の増分段階で求められた変位（または応力）を接線剛性マトリックスに使用して増分変位を計算する。接線剛性マトリックスは前の増分段階において線形化された剛性であるので、これを用いて求めた増分変位やその他の増分量には線形化による誤差が含まれている。そこで、この誤差を除くために反復法であるニュートン・ラフソン法（ニュートン法ともいう）を用いた収束計算によって解の精度を上げる。図3.13(a)は両解法を併用した場合の荷重—変位曲線上での解の収束状態を示したものである。また、図3.13(b)は第 $k$ 増分段階でのニュートン・ラフソン法の収束状態を示している。

ニュートン・ラフソン法では、図3.13(b)に示すように、反復計算の度ごとに接線剛性マトリックスを求めなおすが、このマトリックスを計算する時間（連立1次方程式の解法にコレスキー法を用いれば、さらにマトリックスを分解する時間）を節約するために前の反復計算で用いた接線剛性マトリックスで代用する解法（修正ニュートン・ラフソン法）もある。しかし、特異点の近傍ではマトリックスの性質が悪化して（特異点では、その接線剛性マトリックスの行列式の値は零になる）、解が発散することがあるので、弾性安定問題の計算では使用しない方が良い。増分法と反復法を併用した混合法を用いる場合には、ニュートン・ラフソン法を用いても、真の解（図3.13の・印）に対してわずかながら誤差（不つり合い力）が残るので、この誤差を次の増分段階で新たな

注5) 総荷重を100%として、30%、20%、10%、10%、……などのように増分する。弾塑性有限変位解析において塑性域が生じた場合には、塑性域の進展状態に応じて増分量を小さくする必要がある。

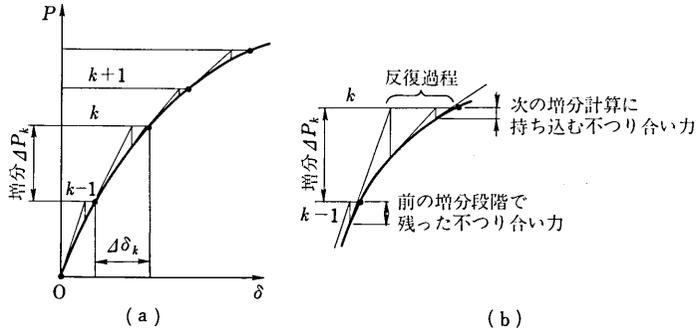


図 3.13 荷重増分法とニュートン・ラフソン法の組合せ

荷重増分に加えて誤差の累積を防ぐようにすることが重要である (図 3.13(b) 参照)。

荷重増分法を用いた混合法では、荷重が大きくなって構造物の剛性が低下してくると、ニュートン・ラフソン法の収束性が悪化して計算時間が長くなる。また、図 3.5 の曲線では、荷重の値によっては複数個のつり合い点 (図 3.5(c) では最大 3 個) が存在するために解が収束しないことがある。このような場合には、ある適当な点の変位 (成分) を増分して計算を制御する変位増分法を用いると収束性が飛躍的に良くなる。変位増分法とニュートン・ラフソン法を組合せた場合の収束状態を図 3.14 に示す。

一般に、圧縮荷重によって構造物の剛性が低下する場合や、弾性安定問題のように不安定領域が存在する場合には、荷重増分法に比べて変位増分法は極めて安定した解法である。変位増分法では荷重増分 (あるいは荷重倍率) は未知量になるが、座屈荷重や最高荷重などを求める問題では支障は起きない。ただし、特定点の変位のみを増分させる変位増分法では問題が生じることがある<sup>3.28)</sup>。

一方、分岐座屈が生じるような構造物においては、初期不整の影響が大きいので、分岐点近傍でのつり合い曲線の径路を求める必要性が生じることがある。この目的に、弧長増分法が有効であることが指摘されている<sup>3.28), 3.29)</sup>。

この計算法は、前述の荷重増分と変位増分を利用し、荷重-変位曲線の弧の長さを増分パラメータとして用いることにより、つり合い径路の追跡を行い、荷重-変位曲線上の特異点を求めようとする手法である。

弧長増分法の考え方は、図 3.15 に示すように、C 点における接線剛性マトリックスを用い、距離  $\Delta S$  だけ離れた  $D^{(1)}$  点を求め、 $D^{(1)}$  点における不釣り合い力を減少させるように  $\overline{CD}^{(1)}$  に垂直な方向に  $D^{(1)}$  点における接線剛性マトリックスとの交点として  $D^{(2)}$  点を求める。次に、初めの  $\overline{CD}^{(1)}$  に垂直な方向に、 $D^{(2)}$  点における接線剛性マトリックスとの交点として点  $D^{(3)}$  を求める。以下同様にして、点  $D^{(i)}$  を順に決定し、収束させる ( $D$  点)。このとき、 $\overline{CD}^{(i)}$  の長さは、 $\Delta S$  が十分小さければ、近似的に  $\Delta S$  となり、一定と考えられる。

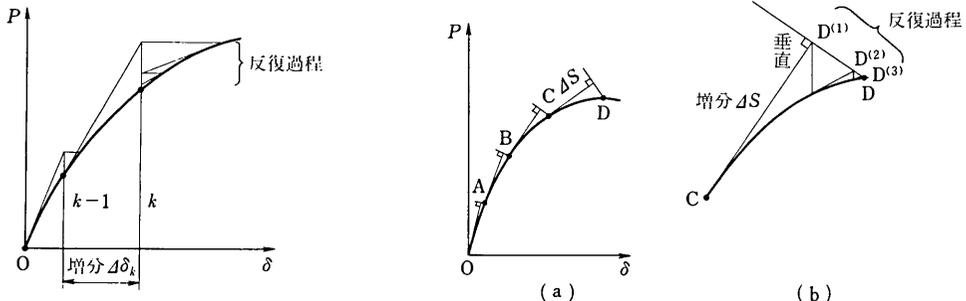


図 3.14 変位増分法とニュートン・ラフソン法の組合せ

図 3.15 弧長増分法とニュートン・ラフソン法の組合せ

この方法は、一般の非線形代数方程式に対して安定した性能を持っているため、他の解法に比べ、分岐点や極限点の近傍での収束状態が良好であり、つり合い径路が連続的に求められる点に特長がある。

### 3.4.3 非線形座屈解析

構造解析では、表 3.4 に示すような各種の特異点を求める解析を非線形座屈解析と呼ぶことがある。これは、特異点に対する条件式が式 (3.57) のような数学で扱われる固有方程式の形にならないためである。条件式には 1 個のパラメータ (固有値) と構造物の自由度数  $n$  に等しい数だけの未知数が含まれるために、 $n$  元連立非線形方程式となる構造全体のつり合い式と連立させて解く必要がある。そこで、特異点近傍における接線剛性マトリックスの性質について考える。

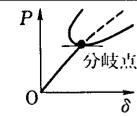
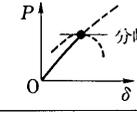
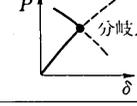
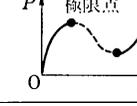
特異点では、構造全体の接線剛性マトリックス  $K_t$  は特異であり、少なくとも 1 つの零固有値を持つ。構造物が安定であれば、表 3.3 から分るように  $K_t$  は正定値であり、 $K_t$  の固有値はすべて正である。逆に、構造物が不安定な状態であれば、 $K_t$  は正定値ではなく、少なくとも 1 つの負の固有値を持つ。一般的には、特異点の前後のつり合い状態で負の固有値の数が 1 つ変化する。それゆえ、数値計算では、構造全体の接線剛性マトリックスの負の固有値の存在の有無によって安定・不安定の判別を行うことができ、負の固有値の数の変化を調べることによって、特異点の存在を知ることができる。

一例として、ライズスパン比が 1/20 の偏平な 2 ヒンジ放物線アーチに等分布荷重  $q$  を満載したときのアーチクラウンの鉛直変位  $\delta$  と  $q$  との関係を図 3.16 に示す<sup>3,30)</sup>。図中の数字は負の固有値の数を表わし、実線の飛び現象では 0~2 個の範囲で変化している。一点鎖線の不安定分岐径路では 1 個である。

構造解析で線形化されたつり合い式を解くときには、ガウスの消去法またはその演算順序を変更した種々の計算法が用いられる。このときの演算過程で現われるピボットの符号を調べれば負の固有値の存在を知ることができるので<sup>3,23)</sup>、計算時間に無駄はない。ここで、負の固有値の値そのものを求める必要はないことに注意されたい。

特異点を求める場合、安定領域から増分計算を始めたものとするれば、そのときの接線剛性マトリックス  $K_t$  か

表 3.4 特異点の分類

特異点の分類		荷重-変位曲線	不安定現象の名称
分 岐 点	対称分岐点		安定対称分岐座屈
			不安定対称分岐座屈
	非対称分岐点		非対称分岐座屈
極 限 点			屈 服
			飛 移 り

ら求めたピボットの値はすべて正である。前述の3.4.2の解法を用いて次々と増分計算を行い、各増分段階でニュートン・ラフソン法が収束したときの $K_t$ のピボットの符号を調べ、負のピボットが発生すれば増分計算を中止して特異点を求めるための反復計算に移る。反復計算に最も簡単な2分法を用いるのであれば、前増分段階との中点( $k$ 回目の増分段階であれば、図3.13の $\Delta\delta_k/2$ の点)に増分量を戻してニュートン・ラフソン法による収束計算を行い、前回と同様に $K_t$ のピボットを調べる。この手法により、必要な精度(通常は、有効数字が3~4桁程度)まで反復計算を行えば、座屈荷重(または最高荷重など)とそのときの変形状態(分岐問題では分岐前の変形様式)や応力が求められる。たとえば、対称分岐座屈問題において、分岐の方向、すなわち座屈モードを求める場合には、分岐点における $K_t$ を用いて零固有値に対する固有ベクトルを逆反復法で求めれば良い。一般には、負のピボットの数の増減を調べることにより特異点の存在を知ることができるので、荷重-変位曲線上に複数個の特異点がある場合にもこの方法を適用することができる。

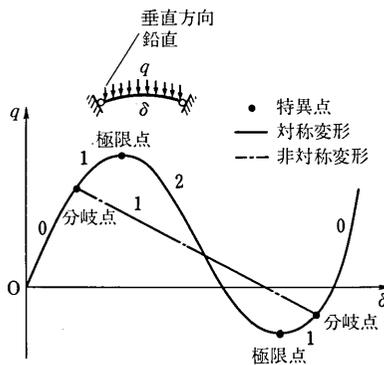


図3.16 負の固有値の数の変化と特異点

分岐後の計算を行う場合には、先に求めた座屈モードに微小なスケーリングファクター( $10^{-3}$ ~ $10^{-5}$ 程度)を掛けた変位を初期値として、この変位に対する不釣り合い力(残差)を求める<sup>注6)</sup>。次に、不釣り合い力を荷重増分としてニュートン・ラフソン法による収束計算を行えば、分岐後のごく近傍ではあるが、分岐後の変形状態が求められる。それ以後は、通常の変位増分法(あるいは弧長増分法)により計算を続行すれば良い。また、屈服や飛移りの問題では、これらの特異点を求めなくとも、変位増分法により一方的に計算を進めれば、図3.5(b)、(c)の荷重-変位曲線が得られる。さらに、弧長増分法が特異点を含む釣り合い径路の追跡に有効であることも事実である。

特異点を求める計算では桁落ちにより数値計算の安定性が悪くなるので、倍数度演算を用いるのが好ましい。これにより解の収束性も良くなり、計算時間の短縮が計れる。

### 3.5 構造物の弾性安定の一般論

#### 3.5.1 構造物の安定条件

実構造物が安定であるための必要、十分条件は必ずしも明らかにされていない<sup>3.31)</sup>。構造物を解くにあたって、何らかの方法で離散化されることが多いことを考えて、ここでは離散化系に限って弾性構造物のつり合いの安定条件を述べる<sup>3.32)</sup>。

注6) 固有ベクトルは分岐後のつり合い曲線の接線方向の変位であるので、この変位は分岐後のつり合い式を厳密には満たさない。

一般に非線形の弾性構造物の支配方程式は離散化すると

$$F_i = K_i(X) \quad (i=1 \sim n) \tag{3.59}$$

と表わされる。ここに、 $F_i$ は離散化した系に働く外力ベクトルの  $i$  番目の成分、 $K_i$ は外力  $F_i$  とつり合う内力ベクトルの  $i$  番目の成分、 $X = \langle X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \rangle^T$  は変位ベクトル、あるいは位置ベクトルの成分、 $n$  は離散化系の自由度である。一般的な载荷条件のもとでの外力ベクトルの成分は、一つのパラメータ  $f$  の関数とし

$$F_i = \int_0^f f_i(t) dt \quad (i=1 \sim n) \tag{3.60}$$

と表わすことができる。ここに、 $t$  は擬パラメータであり、真のパラメータ  $f$  の関数  $f_i(f)$  は外力の载荷パターンを表わすベクトルの  $i$  番目の成分である。パラメータ  $f$  は時間と考えてもよいし、荷重強度を表わすともよい。静的なつり合いの安定問題では、载荷径路は問題となるものの、時間が問題となることはないので、本節では  $f$  は荷重強度を表わすものとする。いわゆる比例载荷は载荷パターンが変化せず、 $f_i(f)$  が  $f$  にかかわらず一定の場合に相当する。したがって、式 (3.60) で  $f_i$  を一定とすることにより、比例载荷は

$$F_i = f f_i \tag{3.61}$$

と表わされる。

载荷パターンを表わす  $f_i(f)$  は外力の载荷径路によって決まるが、構造問題では、外力  $F_i$  は局部的に線形変化する  $f$  の関数としても一般性を失うことはないと考えられる。このとき、一つの線形区間内では  $f_i$  は定数となり、式 (3.60) は

$$F_i = \sum f_i^{(j)} \Delta f^{(j)} \tag{3.62}$$

と表わされる。ここに  $\Delta f^{(j)}$  は  $f_i$  が一定な  $f$  の微小区間を表わす。

载荷径路を式 (3.60) で定義した一つのパラメータ  $f$  で表わすと、式 (3.59) の支配方程式の解は変位の自由度  $n$  に  $f$  を1つ加えた  $n+1$  次元空間での曲線となる。式 (3.59) は  $n$  個の式であるのに対し、同式中には  $X$  の成分  $n$  個と  $f$  の合計  $n+1$  個の未知量が存在する。このため、条件式を一つ追加しないとつり合い曲線中の解を表わす点が求まらない。任意の点  $P$  での解が求まっているとして、この点からつり合い曲線にそった弧の無次元長さが  $R$  の点を求めるとすると、この追加条件式は

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 (x_i - x_i^P)^2 + (\alpha_f)^2 (f - f^P)^2 - R^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 (\Delta x_i)^2 + (\alpha_f)^2 (\Delta f)^2 - R^2 = 0 \tag{3.63}$$

と表わされる<sup>3,6)</sup>。ここに ( )<sup>P</sup> は点  $P$  での解を表わし、 $\Delta x_i = x_i - x_i^P$ 、 $\Delta f = f - f^P$  はそれぞれ変位、および荷重の点  $P$  での解からの増分を表わす。 $\alpha_i$ 、 $\alpha_f$  はそれぞれ  $x_i$ 、 $f$  を無次元化するための係数であり、その値は任意である。 $\alpha_i$ 、 $\alpha_f$  の値の選び方によって、数値解の収束の度合いが異なるので、実際に解を求めるときには試行錯誤が必要である。式 (3.63) で  $\alpha_f$  のみを非零、他はすべて零とすると荷重の増分を与えて解を求めることになり、荷重制御と呼ばれる。同様に  $n$  個の  $\alpha_i$  のうちの一つのみを非零に選び、残りの  $\alpha_i$  と  $\alpha_f$  を零とおく解法は変位制御と呼ばれる。式 (3.63) の条件式で、少なくとも2つ以上の  $\alpha$  の成分を非零とおいたとき、弧長制御と呼んで良いであろう。式 (3.59)、(3.63) を解くには<sup>3,6)</sup>、ニュートン・ラフソン法等の逐次近似解法を用いるのが一般的である。

$n+1$  次元空間でのつり合い曲線上の点  $P$  と、この点の近傍の点  $P + \Delta P$  を考える。両点とも、外力ベクトル  $F_i^P$  の局所的な線形载荷領域にあるものとするとき式 (3.59) は式 (3.62) を考慮して

$$F_i^P = K_i(X^P), \quad F_i^P + f_i^P \Delta f = K_i(X^P + \Delta X) \tag{3.64 a, b}$$

と表わされる。式 (3.64b) の右辺をテーラー展開し、式 (3.64a) との差をとると

$$f_i^P \Delta f = \sum_{j=1}^n K_{i,j}^P \Delta x_j + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n K_{i,jh}^P \Delta x_j \Delta x_h + \dots \tag{3.65}$$

ここに  $(\ )_{,j}$  は  $\partial(\ )/\partial x_j$  を表わす。  $K_{Lj}^P$  は正方形行列であり、点  $P$  での接線剛性マトリックスと呼ばれる。この接線剛性マトリックスを座標変換により対角化する。  $K_{Lj}$  が対角化される座標系をここでは主座標系と呼ぶ。  $F_i, f_i, K_{Lj}, x_i$  に対応する主座標系での量をそれぞれ  $G_i, g_i, D_{Li}, u_i$  と表わすと、式 (3.64 a, b) は

$$G_i^P = D_{Li}(u^P), \quad G_i^P + g_i^P \Delta f = D_{Li}(u^P + \Delta u) \quad (3.66 \text{ a, b})$$

と書ける。式 (3.64) から式 (3.65) を求めたときと同じ操作を式 (3.66) に行い、  $D_{Lj}$  が対角マトリックスであることを考慮すると、点  $P$  から近傍の点  $P + \Delta P$  にいたる増分関係式は、主座標系の成分を用いて

$$g_i^P \Delta f \equiv \Delta G_i^P = D_{Li}^P \Delta u_i + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n D_{Ljh}^P \Delta u_j \Delta u_h + \frac{1}{3!} \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^n D_{Ljhl}^P \Delta u_j \Delta u_h \Delta u_l \quad (3.67)$$

と表わされる。

保存力が作用する問題で、支配方程式を満たす解  $P$  が安定であるための必要十分条件は  $D_{Li}^P$  部が正定値マトリックスであることである<sup>3.32)</sup>。座標変換によって固有値は変化しないので<sup>3.33)</sup>、式 (3.65) の  $K_{Lj}^P$  が正定値マトリックスのとき、支配方程式の解  $P$  は安定である。

$D_{Li}^P$  の固有値、すなわち対角項の少くとも一つが零のとき、この零の対角値に対応する外力  $\Delta G_i^P$  を与えても、式 (3.67) の右辺第 1 項のみを考慮すると、  $D_{Li}^P$  が零のため、対応する変位  $\Delta u_i$  が求まらない。  $\Delta G_i^P$  に対して変位を求めるためには、少なくとも式 (3.67) の右辺第 2 項を考慮する必要がある。右辺第 2 項は変位増分に対して 2 次の非線形項となっているため、微小な荷重増分  $\Delta G_i^P$  に対して解が一つに限らない。このように、  $D_{Li}^P$  および  $K_{Lj}^P$  が零固有値を持つ特異マトリックスとなるつり合い曲線上の点を特異点と呼ぶ。一般の点での量を上付きの  $P$  で表わしたのに対し、特異点での量を上付きの  $C$  を用いて表わすこととする。

特異点で  $D_{Li}^C$  の対角要素のうち、最初の  $S$  個の要素が 0 となる場合を考える。このとき、式 (3.67) の  $D_{Ljh}^C$  が全て零でない限り、この特異点は不安定となる<sup>3.19), 3.32), 3.34)</sup>。  $D_{Li}^C$  の全てが零のときには、  $D_{Li}^C$  のさらに高次の微係数によって安定、不安定が決まる<sup>3.19), 3.32), 3.34)</sup>。

$D_{Li}^C$  および  $K_{Lj}^C$  が正定値マトリックス、あるいは半正定値マトリックスとならないとき、この点  $P$  は不安定となる<sup>3.19), 3.32), 13.34)</sup>。

### 3.5.2 特異点の分類

$D_{Li}^C$  が零固有値を持つ特異点を、零固有値の数が一つの場合と複数の場合に分け、前者を単一特異点、後者を複合特異点と呼ぶこととする。

単一特異点として、  $D_{Li}^C$  の要素のうち、第 1 番目の要素  $D_{i1}^C$  が零となる場合を考える。  $g_i^C$  が零でない場合には解が一つに決まり、同時に  $\Delta f$  が零となる<sup>3.19), 3.32), 3.34)</sup>。したがって、この点は荷重強度  $f$  に対して、停留点、すなわち極大点、極小点あるいは変曲点となる。構造力学では荷重強度に関する極大点を極限点と呼ぶことが多い。この停留点が極大値か、極小値かは、  $D_{i1}^C$  と  $g_i^C$  の符号によって決まり、  $D_{i1}^C/g_i^C$  が負、正の場合に、それぞれ極大値、極小値となる。  $D_{i1}^C$  が零の場合で、  $D_{i11}^C$  が零でない場合には変曲点となる。  $D_{i11}^C$ 、  $D_{i111}^C$  が零の場合にはさらに  $D_{i1}^C$  の高次の微係数によって、この特異点での挙動が決まる<sup>3.19), 3.32), 3.34)</sup>。

$g_i^C$  が零のときには、  $D_{i1}^C=0$  を考慮して式 (3.67) で  $i=1$  のみ  $\Delta u_i$  の 2 次項まで考慮し、  $i=2, 3, \dots, n$  については  $\Delta u_i$  の 1 次項のみを考慮すると、一般に 2 つの異なった解が求まり、 2 つのつり合い曲線が交わる交点であることが解かる。荷重が零のときの初期状態から荷重を増やして行ったときのつり合い曲線を主たるつり合い曲線と呼ぶと、この点は主たるつり合い曲線が、他のつり合い曲線と交わる点となる。実構造物の荷重応答を考

えたとき、主たるつり合い曲線から、この点で交わる他のつり合い曲線に応答が移ることが多いため、この点をつり合いの分岐点と呼ぶことが多い。この分岐点での  $D_{i,11}^c$  の値が零でないとき、2つのつり合い曲線の接線は荷重の強度軸  $f$  と直交しない。すなわち、分岐点は荷重強度に対して停留点となっていない。この分岐点是非対称分岐点と呼ばれる。非対称分岐点では、 $D_{i,11}^c$  が零でないため、この分岐点はつねに不安定点となる。これに対して、 $D_{i,11}^c$  が零のとき、分岐点で交わる2つの曲線のうちの一つの曲線の接線は  $f$  軸と直交し、荷重強度に対して停留点となっている。つり合い曲線のうち、初期位置と滑らかにつながっていない分岐曲線が停留点となっているとき、この分岐点是对称分岐点と呼ばれる。この分岐点は、 $D_{i,11}^c$  が半正定値マトリクスで、かつ  $D_{i,11}^c$  が正、負のとき、それぞれ安定、不安定となる。これら停留点、分岐点を図3.17に示す2次元の図で示す。

複合特異点での挙動については、ごく簡単な結果が文献<sup>3,32)</sup>に示されている程度で、ほとんど研究がなされていないのが現状である。

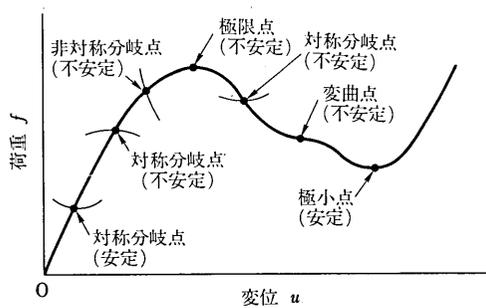


図3.17 特異点の分類

すでに述べたように特異点には分岐点と極限点があるが、実用設計で問題となるのは主つり合い径路上の最初の特異点での挙動であり、各種不整を含む実構造物でもこの最初の特異点の影響が最も大きいと考えられる。しかし、2番目、あるいは3番目の特異点が問題とならないという保証は必ずしもない。今後の研究課題の一つであろう。

参 考 文 献

3. 1) 福本啓士：構造物の座屈・安定解析，新体系土木工学⑨，技報堂出版，1982.
3. 2) 西野文雄・長谷川彰夫：構造物の弾性解析，新体系土木工学⑦，技報堂出版，1983.
3. 3) 鷺津久一郎他編：有限要素法ハンドブック，Ⅰ基礎編，1981，Ⅱ応用編，1983，培風館.
3. 4) 土木学会編：構造力学公式集，土木学会，1984.
3. 5) 川井忠彦：座屈問題解析，コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-6-B，培風館，1974.
3. 6) 西野文雄：連続体の力学（Ⅱ），土木工学大系6，彰国社，1984.
3. 7) 吉識雅夫・山本善之：弾性安定論，共立出版，1959.
3. 8) 成岡昌夫・中村恒善共編：骨組構造解析法要覧，日本鋼構造協会，1976.
3. 9) 山田嘉昭編：マトリクス法の応用，東京大学出版会，1972.
3. 10) 山田嘉昭：塑性・粘弾性，コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2-A，培風館，1972.
3. 11) 北川 浩：塑性力学の基礎，日刊工業新聞社，1979.
3. 12) ツィーグラ著，砂川恵訳：構造安定の原理，培風館，1973.
3. 13) ボローチン著，近藤誠治・中田和夫共訳：弾性系の動的安定，コロナ社，1972.
3. 14) クロール・ウォーカー著，大山宏訳：構造安定性の基礎，コロナ社，1978.
3. 15) ボローチン著，関谷 社・杉山吉彦共訳：非保存的弾性安定問題，培風館，1977.
3. 16) ガランボス著，福本啓士・西野文雄共訳：鋼構造部材と骨組一強度と設計一，丸善，1973.
3. 17) Pflüger, A. : Stabilitäts Probleme der Elastostatik, Springer-Verlag, 1950.
3. 18) Allen, H.G. and Bulson, P.S. : Background to Buckling, McGraw-Hill, 1980.

- 3.19) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W. : A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, 1973.
- 3.20) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W. : Elastic Instability Phenomena, John Wiley & Sons, 1984.
- 3.21) Bleich, F. : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
- 3.22) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961.
- 3.23) 林 正・浜田政則：数値計算法，新体系土木工学①，技報堂出版，1984.
- 3.24) 戸川隼人：マトリックスの数値計算，オーム社，1971.
- 3.25) パーテ・ウィルソン著，菊地文雄訳：有限要素法の数値計算，構造工学シリーズ⑥，科学技術出版社，1979.
- 3.26) デサイ・アーベル著，山本善之訳：マトリックス有限要素法，科学技術出版，1974.
- 3.27) 大坪英臣：幾何学的非線形問題の解析，数理科学，No.260, 1985.
- 3.28) Ramm, E. : Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Springer-Verlag, 1981.
- 3.29) Crisfield, M.A. : Numerical Analysis of Structures, Chap. 7 of Developments in Thin-Walled Structures-1, Rhodes, J. and Walker, A.C. ed., Applied Science Publishers, 1982.
- 3.30) 前田幸雄・林 正：構造解析における多元連立非線形方程式の数値計算法，JSSC 第11回マトリックス解析法研究発表論文集，日本鋼構造協会，1977.
- 3.31) Marsden, J.E., and Hughes, T.J.R. : Mathematical Foundations of Elasticity, Prentice-Hall, New Jersey, 1983.
- 3.32) Nishino, F., Hartono, W., Fujiwara, O. and Karasudhi, P. : A Study of the Stability and Behavior at the Critical Point by the Taylor Expansion, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.4, No.1, JSCE, April 1987.
- 3.33) 矢野健太郎・石原 繁：線形代数，裳華房，1972.
- 3.34) Huseyin, K. : Nonlinear Theory of Elastic Stability, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1975.